Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 3

$\boxed{1}$ [Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, vgl. VO Bem.2.3] Für jede *beschränkte* Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir ein sogenanntes inneres Maß durch

$$\lambda_*(A) := \mathrm{Vol}(Q) - \lambda^*(Q \setminus A),$$

wobei Q ein beliebiger Quader mit $Q \supseteq A$ ist. Zeige, dass die λ^*-Messbarkeit einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ äquivalent ist zur Bedingung

$$\lambda^*(A) = \lambda_*(A).$$

zu §5, §6 und §7. Maße auf $\mathbb{R}$, Maße auf $\mathbb{R}^n$ und Borel-σ-Algebren

$\boxed{2}$ Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.
Zeige (evtl. unter Zuhilfenahme eines Lehrbuches der Analysis):

(a) F besitzt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ einen linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert.

(b) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von F ist (höchstens) abzählbar und besteht gänzlich aus Sprungstellen.

$\boxed{3}$ Sei $\mathcal{R}$ der von den halboffenen Intervallen der Form $]a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) erzeugte Ring (vgl. VO 3.3(3) und Anfang von §5). Weiters sei ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ gegeben. Definiere die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \begin{cases} \mu(]0, x]) & x \geq 0, \\ -\mu(]x, 0]) & x < 0. \end{cases}$$

und zeige folgende Aussagen:

(a) F ist monoton wachsend.

(b) Ist μ sogar ein Prämaß, so ist F auch rechtsseitig stetig und daher eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$.

(c) Sei nun μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{R}$ und die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie oben definiert. Zeige: für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\} \in \mathcal{B}$ und weiters

$$F \text{ ist stetig in } x \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\{x\}) = 0.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sei λ das[1] Lebesgue-(Borel-)Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die affine Hyperebene der Form $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \alpha\}$, wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und fest sind, eine Borelmenge ist und $\lambda(H) = 0$ gilt.

[1] Wir nehmen mit dieser Sprechweise schon die in §8 zu beweisende Eindeutigkeit vorweg.