Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 5

$\boxed{1}$ (Rechnen mit Indikatorfunktionen) Seien Ω und I Mengen und $A, B \subseteq \Omega$ sowie $A_i \subseteq \Omega$ für $i \in I$. Zeige folgende Eigenschaften der entsprechenden charakteristischen Funktionen:

(a) $A \subseteq B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

(b) $A \cap B = \emptyset \iff \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ (insbesondere gilt $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$)

(c) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

(d) Für $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ist $\mathbb{1}_A = \sup\limits_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$ (punktweise Gleichheit)

(Bem.: analog ist $\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \inf_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$)

$\boxed{2}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Zeige, dass die Menge $\{\omega \in \Omega \mid (F_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

$\boxed{3}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeige:

(a) f ist messbar $\iff$ f^+ **und** f^- sind messbar

(b) f ist messbar $\implies$ $|f|$ ist messbar, ABER die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

zu §10. Integral im Stile von Lebesgue

$\boxed{4}$ Betrachte den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra und λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Ist die Dirichletfunktion $u = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ eine Elementarfunktion? Falls ja, was ist dann der Wert des Integrals $\int u \, d\lambda$?

$\boxed{5}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{M}^+$ die Menge der nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen darauf. Zeige, dass jede *beschränkte* Funktion aus $\mathcal{M}^+$ sogar gleichmäßiger Limes einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen ist.

$\boxed{6}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ in jedem Fall integrierbar?