Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 7

zu §13. Konvergenzsätze

$\boxed{\mathbf{1}}$ Wir betrachten wieder den Borel-Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Finde Beispiele für drei Folgen (f_n), (g_n) und (h_n) integrierbarer Funktionen, die allesamt fast überall gegen 0 konvergieren, aber

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda = 1$,

(c) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = -1$ und $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = 1$ erfüllen.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Seien $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Borel-Lebesgue-Maßraum, $h_n(x) := n \sin(\cos(x)/n)$ (für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$) und f eine integrierbare Funktion. Existiert $\lim_{n\to\infty} \int h_n f \, d\lambda$? Wenn ja, was ist der Grenzwert? (Hinweis: $|\sin(y)| \leq |y|$ und $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = \ldots$?)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0 = \lim_{n\to\infty} f(x-n).$$