## Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

# Aufgabe 8

### zu §15. Vervollständigung eines Maßraumes

$\boxed{1}$ Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei *vollständig*, d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge gehört ebenfalls zu $\mathcal{A}$. Zeige: Sind $f$ und $g$ numerische Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ fast überall, dann impliziert die Messbarkeit von $f$ auch jene von $g$.

### zu §16. Die Banachräume $\mathbf{L^p}(\mu)$

$\boxed{2}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei weiters $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und fast überall beschränkt. Zeige, dass dann auch $g \cdot f$ zu $\mathcal{L}^p$ gehört.

$\boxed{3}$ Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit **endlichem** Maß (d.h. $\mu(\Omega) < \infty$) und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeige: $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$. Insbesondere gilt also $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^1$ für jedes $p \geq 1$.

$\boxed{4}$ Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Borel-Lebesgue-Maßraum. Gilt dann eine der Inklusionen $\mathcal{L}^1(\lambda) \subseteq \mathcal{L}^2(\lambda)$ oder $\mathcal{L}^2(\lambda) \subseteq \mathcal{L}^1(\lambda)$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

$\boxed{5}$ Finde ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, die aber nicht fast überall punktweise konvergent ist. Wie veträgt sich das mit Theorem 16.9 der VO?