Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 9

mehr zu §16. Die Banachräume $\mathbf{L^p}(\mu)$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Fßr $r < p < s$ beweise man, dass $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$ ist. Zeige, dass die Inklusion

$$\mathcal{L}^s(\mu) \cap \mathcal{L}^r(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$$

folgt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sei $\|f\|_r < \infty$ für ein $r < \infty$. Beweis, dass dann gilet $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ als $p \to \infty$.

$\boxed{\mathbf{3}}$Sei $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $n = 1, 2. \dots$ und $f_n - f\|_p \to 0$ und $f_n \to g$ f.ü. für $n \to \infty$. Welche Beziehung besteht zwischen f und g?

zu §Borel-Maß

$\boxed{\mathbf{4}}$Sei μ ein Borel-Maß auf einem kompaktten metrischer Raum X, und sei $\mu(X) = 1$. Zeitge, dass eine kompakte Menge $K \subseteq X$ gibt (der *Träger* oder support von μ) so dass $\mu(K) = 1$ ist, aber $\mu(H) < 1$ für jede echte kompakte Teilmenge H von K gilt.

$\boxed{\mathbf{5}}$Zeige, dass jede kompakte Teilmange von $\mathbb{R}^1$ der Träger eines Borel-Maßes ist.