Themenvorschläge für das Proseminar zur

Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Ein Beispiel zu den Vorbemerkungen der VO

$\boxed{\mathbf{1}}$ [Diese Aufgabe könnte als Vortrag von 1-2 Studierenden gemeinsam vorbereitet werden. Sie liefert die Details zur Bemerkung in der VO über die Defizite des Riemann-Integrals bzgl. Vertauschung von Limes und Integral. Für die vollständige Argumentation benötigen wir aber Resultate, die in der VO erst später diskutiert und bewiesen werden, insbesondere das Lebesguesches Integralkriterium für Riemann-Integrale und zumindest das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ (siehe auch Aufgabe $\boxed{\mathbf{??}}$ unten).]

Verwende die Anleitungen gemäß [SS05, Exercises 4.(a) and 10 on pp. 38,39,41], um eine Folge *stetiger* Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) zu konstruieren, die folgende Eigenschaften hat:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1]$: $\quad 0 \le f_n(x) \le 1$;

(ii) es gibt eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $\forall x \in [0,1]$ gilt: die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ strebt monoton fallend gegen $f(x)$;

(iii) (der punktweise monotone Limes) f ist beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar.

zu §3. Inhalte und Ringe

$\boxed{\mathbf{2}}$ Bei Interesse können z.B. 1-2 Studierende gemeinsam einen Vortrag vorbereiten: zuerst kurze Wiederholungen zu den Schlüsselbegriffen aus §3 der VO; daran anschließend Diskussion einer alternativen Charakterisierung von μ^*-messbaren Mengen mittels Approximation bzgl. einer Pseudometrik auf der Potenzmenge der Grundmenge wie in [TM10] (vgl. übrigens auch die Definition Lebesgue-messbarer Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ im Analysis-Buch [Def.11.9, Seite 359] von W. Rudin, Oldenburg Verlag, 3.Auflage 2005).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Das *Cantorsche Diskontiuum* und die *Cantorsche Funktion* (letztere wird in der Literatur auch *Lebesgue's singular function* oder *devil's staircase* genannt): Vortrag von 1-2 Studierenden basierend auf [Els05], Seiten 70-74, Kapitel II, §8, Punkte 1 (Konstruktion von C), 2 (Triadische Entwicklung) und 4 (Die Cantorsche Funktion).

$\boxed{\textbf{4}}$ Themenvorschlag für einen vorbereiteten Vortrag: Die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-(Borel-)Maßes auf $\mathbb{R}^n$. (Siehe z.B. [Bau92, §8, pp. 45-48].)

$\boxed{\textbf{5}}$ Themenvorschlag für einen vorbereiteten Vortrag: Parameter-abhängige Integrale. (Siehe z.B. [Els05, Kapitel IV, Sätze 5.6 und 5.7, Seiten 147-148])

$\boxed{\textbf{6}}$ Themenvorschlag für einen vorbereiteten Vortrag: Eine Riemann-integrierbare Funktion, die nicht Borel-messbar ist (Siehe z.B. [Coh80, Ex. 3, p. 78 und Prop. 2.1.9, p. 56])

$\boxed{\textbf{7}}$ Themenvorschlag: ein Referat über John von Neumanns Variante für ein Kernstück im Beweis des Satzes von Radon-Nikodym (vgl. z.B. [Els05, Kapitel VII, §2, zweiter Beweis von Lemma 2.2, S. 281] oder suche selbst weitere Literatur dazu).

$\boxed{\textbf{8}}$ Themenvorschlag: liefere alle Details zu Beispiel 19.9.(3) der VO und zeige, dass die dort konstruierte Verteilungsfunktion F mit der früher im PS diskutierten Cantorschen Funktion übereinstimmt.

Literatur

[Bau92] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1992.

[Coh80] Donald L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[Els05] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].

[SS05] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis*. Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.

[TM10] Jun Tanaka and Peter F. McLoughlin. A realization of measurable sets as limit points. *Amer. Math. Monthly*, 117(3):261–266, 2010.