Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B16b (1987), 10 pp.
[Formerly: Publ. I. R. M. A. Strasbourg, 1988, 341/S-16, p. 87 - 98.]

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE LÖSUNGEN DER GLEICHUNG per(zI − A) = 0

VON

ARNOLD RICHARD KRÄUTER

ZUSAMMENFASSUNG. Im Mittelpunkt der vorliegenden Note stehen Abschätzungen für den Maximalabstand zweier Nullstellen des Permanentenpolynoms der Matrix A, $\mathrm{per}(zI - A)$. Der Motivation für diese Untersuchungen dient ein kurzgefaßter Überblick über dieses Polynom und seine Anwendungen auf Fragestellungen der Graphentheorie.

ABSTRACT. This note focuses on bounds for the maximal distance of two zeros of the permanental polynomial of a matrix A, $\mathrm{per}(zI - A)$. In order to motivate these investigations, we present a short survey of this polynomial and its applications to problems arising in graph theory.

1. Das Permanentenpolynom

Die *Permanente* einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ über einem beliebigen kommutativen Ring ist definiert durch

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}, \tag{1.1}$$

wobei S_n die symmetrische Gruppe der Ordnung n bezeichnet. Ist z eine komplexe Veränderliche und bezeichnet I die $n \times n$-Einheitsmatrix, dann nennen wir $\mathrm{per}(zI - A)$ das *Permanentenpolynom* von A. Einen ausführlichen Überblick über dieses Polynom findet man bei Merris-Rebman-Watkins [14]; ergänzend dazu sei die neuere Arbeit [5] von Cvetković und Doob (siehe insbesondere pp. 171 - 174) angeführt.
Für $k \leq n$ bezeichne $Q_{k,n}$ die Menge

$$Q_{k,n} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbf{N}^k : \, 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq n \right\}. \tag{1.2}$$

Für eine $n \times n$-Matrix A und einen Vektor $\alpha \in Q_{k,n}$ sei $A[\alpha]$ jene Hauptuntermatrix von A, welche durch Streichen der Zeilen und Spalten mit den Indizes α entsteht. In der Darstellung

$$\text{per}(zI - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, c_k \, z^{n-k} \tag{1.3}$$

haben die c_k folgende Form (siehe Turner [22, p. 522]):

$$\begin{cases} c_k = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \text{per}(A[\alpha]), & k = 1, ..., n, \\ c_0 = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Insbesondere ist $c_1 = \text{tr}(A)$ und $c_n = \text{per}(A)$.
Eine wichtige Eigenschaft des Permanentenpolynoms ist seine Invarianz gegenüber der *P-Ähnlichkeit,* das heißt für jede $n \times n$-Permutationsmatrix P gilt

$$\begin{cases} \text{per}(zI - P^{-1}AP) & = & \text{per}[P^{-1}(zI - A)P] = \\ & = & \text{per}(zI - A). \end{cases} \tag{1.5}$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß beliebige Zeilen- und Spaltenvertauschungen im Argument den Wert der Permanentenfunktion unverändert lassen (siehe Minc [17, p. 16]).
Um auf Probleme eingehen zu können, in welchen das Permanentenpolynom von Bedeutung ist, sind einige vorbereitende und motivierende Bemerkungen erforderlich.
Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph ohne Schlingen oder mehrfache Kanten, wobei $V = \{v_1, ..., v_n\}$ die Knotenmenge von G und E die Kantenmenge von G bezeichnet. Die *Adjazenzmatrix* von G, $A(G) = (a_{ij})$, ist eine $n \times n$-Matrix, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.6}$$

wobei (v_i, v_j) die (ungerichtete) Kante bezeichnet, welche $v_i, v_j \in V$ miteinander verbindet.
$A(G)$ hängt von G sowie von der Numerierung der Knoten von G ab. Es ist bekannt, daß Adjazenzmatrizen bezüglich zweier verschiedener Numerierungen der Knoten desselben Graphen P-ähnlich sind. Ferner sind zwei Graphen G_1 und G_2 genau dann *isomorph,* falls $A(G_1)$ und $A(G_2)$ P-ähnlich sind. Somit ist jede gegenüber der P-Ähnlichkeit invariante Funktion von $A(G)$ eigentlich eine Funktion des zugrundeliegenden Graphen G. Aus (1.5) folgt, daß $\text{per}(zI - A(G))$ eine solche Funktion darstellt. *Das Permanentenpolynom scheint also ein natürliches Hilfsmittel beim Studium von Graphen zu sein* (Merris-Rebman-Watkins [14, p. 276]).

Man weiß, daß die Adjazenzmatrizen isomorpher Graphen das gleiche Permanentenpolynom besitzen (Turner [22, p. 521]). Es erhebt sich nun die Frage, ob umgekehrt von der Gleichheit der Permanentenpolynome auf die Isomorphie der jeweiligen Graphen geschlossen werden darf. Daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, zeigte Turner anhand eines einfachen Gegenbeispiels [22, pp. 524 - 525]. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß auch das *charakteristische Polynom* isomorphe Graphen nicht zu charakteristieren vermag; dieser Sachverhalt findet sich bereits 1957 in der Arbeit [2] von Collatz und Sinogowitz (siehe auch [4, p. 156]; man vergleiche dazu auch die einleitenden Bemerkungen bei Merris [15, p. 397].) Diese negativen Befunde waren der Anlaß dafür, anstelle der Adjazenzmatrix $A(G)$ die damit zusammenhängenden Matrizen

$$B(G) = D(G) + A(G) \tag{1.7}$$

und

$$L(G) = D(G) - A(G) \tag{1.8}$$

zu betrachten. Dabei ist

$$D(G) = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n), \tag{1.9}$$

worin d_i den Grad des Knotens $v_i \quad (1 \leq i \leq n)$ bezeichnet. In der Literatur ist $L(G)$ unter dem Namen *Admittanzmatrix* [4, p. 27], *Laplace-Matrix* [14, p. 279] oder *Kirchhoff-Matrix* [3, p. 182] bekannt (siehe auch [10, p. 345]). Die Hoffnung, das Isomorphieproblem bei Graphen mithilfe des Permanentenpolynoms der Laplace-Matrix lösen zu können, hat sich bisher nicht erfüllt. Allerdings ist zur Zeit kein Paar nichtisomorpher Graphen G_1 und G_2 bekannt, für welches $\operatorname{per}(zI - L(G_1)) = \operatorname{per}(zI - L(G_2))$ gilt [14, p. 282]. (Für jenen Fall, in dem die Permanente durch eine andere Matrizenfunktion, die *zweite Immanante,* ersetzt wird, verweisen wir auf die jüngsten Untersuchungen von Merris [16].)

Im Zusammenhang mit dem Studium der Matrizen $B(G)$ und $L(G)$ verdient die Arbeit [7] von Faria besondere Beachtung, welche unter anderem eine überraschende Beziehung zwischen dem Permanentenpolynom von $B(G)$ und dem Sterngrad von G präsentiert.

Unter einem *hängenden Stern* S eines Graphen G verstehen wir den maximalen Untergraphen von G, welcher von allen hängenden Kanten gebildet wird, die mit demselben Knoten („Zentrum von S“) inzidieren. Bezeichnet $\nu(S)$ die Anzahl hängender Kanten in S, dann definiert man als *Grad* von S die Differenz $\nu(S) - 1$.

Der *Sterngrad* von G ist erklärt als Summe der Grade aller hängenden Sterne von G. (Falls es keinen hängenden Stern in G gibt, ist der Sterngrad definitionsgemäß Null.)

SATZ 1.1 (Faria [7, p. 256]). *Der Sterngrad eines Graphen G ist gleich der Vielfachheit der Nullstelle 1 von* $\operatorname{per}(zI - B(G))$.

Satz 1.1 wird falsch, wenn man das Permanentenpolynom durch das charakteristische Polynom ersetzt. Schließlich konnte Faria zeigen, daß für ungerichtete paare Graphen G die Beziehung $\operatorname{per}(zI-B(G)) = \operatorname{per}(zI-L(G))$ gilt [7, p. 262]. Hier kann also in Satz 1.1 $B(G)$ durch $L(G)$ ersetzt werden.

2. Permanentenwurzeln

Satz 1.1 legt die Betrachtung der Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{per}(zI - A) = 0 \tag{2.1}$$

für eine komplexe quadratische Matrix A nahe. Eine komplexe Zahl $z = \omega$, welche der Beziehung (2.1) genügt, wollen wir *Permanentenwurzel* von A nennen.
Da die explizite Bestimmung von Permanentenwurzeln im allgemeinen äußerst schwierig ist, ist man sehr an Abschätzungen dafür interessiert.

SATZ 2.1 (Brenner-Brualdi [1, p. 586]). *Es sei A eine nichtnegative quadratische Matrix mit dem Spektralradius ϱ. Dann gilt für jede Permanentenwurzel ω von A*

$$|\omega| \leq \varrho. \tag{2.2}$$

SATZ 2.2 (Merris [13, p. 156]). *Es sei A eine normale $n \times n$-Matrix mit dem Spektralradius ϱ. Dann gilt für jede Permanentenwurzel ω von A*

$$|\omega| \leq c\,\varrho \tag{2.3}$$

mit

$$c = \left\{1 + \left(\frac{2n}{\pi}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

Die Konstante c in (2.3) kann im allgemeinen nicht durch 1 ersetzt werden. In Analogie zu entsprechenden Ergebnissen über Eigenwerte sind auch *Einschließungssätze* für Permanentenwurzeln hergeleitet worden.

SATZ 2.3 (Oliveira [20, p. 192]). *Jede Permanentenwurzel einer quadratischen Matrix A liegt in der Vereinigung der Geršgorin-Kreise von A.*

SATZ 2.4 (Gibson [9, p. 20]). *Jede Permanentenwurzel einer quadratischen Matrix A liegt in der Vereinigung der Cassini-Ovale von A.*

Verwandt mit der Frage nach (möglichst kleinen) Bereichen, welche alle Permanentenwurzeln einer gegebenen Matrix enthalten, ist jene nach dem Maximalabstand zweier Permanentenwurzeln. (Für Eigenwerte stammen diesbezügliche Untersuchungen in erster Linie von Mirsky [18], [19]; siehe auch [12, pp. 167 - 168].) Dieses Problem soll im folgenden ausführlicher behandelt werden (siehe Kräuter [11]).
Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix mit den Permanentenwurzeln $\omega_1, ..., \omega_n$ (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Wir definieren

$$s_p(A) := \max_{i,j} |\omega_i - \omega_j|, \tag{2.5}$$

$$s_{p,R}(A) := \max_{i,j} |\mathrm{Re}\, \omega_i - \mathrm{Re}\, \omega_j|, \tag{2.6}$$

$$s_{p,I}(A) := \max_{i,j} |\mathrm{Im}\, \omega_i - \mathrm{Im}\, \omega_j|. \tag{2.7}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, für diese Ausdrücke obere und untere Schranken anzugeben, welche sich als einfach zu berechnende Funktionen der Elemente von A darstellen lassen. Die Herleitung derartiger Schranken ist aufgrund technischer Schwierigkeiten bisher lediglich für gewisse Matrizenklassen geglückt.
Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *untere Hessenberg-Matrix* (oder *untere Fastdreiecksmatrix*), falls

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \leq j - 2 \tag{2.8}$$

gilt. A heißt *obere Hessenberg-Matrix,* falls A^T untere Hessenberg-Matrix ist.
A heißt *Jacobi-Matrix* (oder *Tridiagonalmatrix*), wenn A sowohl obere als auch untere Hessenberg-Matrix ist.
Zwei untere Hessenberg-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ heißen *verwandt,* falls

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{für} \quad i < j, \\ +a_{ij} & \text{für} \quad i \geq j \end{cases} \tag{2.9}$$

gilt. Zwei obere Hessenberg-Matrizen heißen verwandt, wenn ihre Transponierten verwandt im vorhin erklärten Sinn sind. Bezeichnen A und B verwandte (entweder beide untere oder beide obere) Hessenberg-Matrizen, so schreiben wir $B = \tilde{A}$. Die Matrix $\tilde{A}$ ist aufgrund der Beziehung (2.9) eindeutig bestimmt.
Analog zu (2.5) - (2.7) seien $s_d(A)$, $s_{d,R}(A)$ und $s_{d,I}(A)$ erklärt, wenn die Permanentenwurzeln durch die Eigenwerte von A ersetzt werden.
Mit diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den folgenden wichtigen Hilfssatz zu formulieren:

Hilfssatz 2.1 (Kräuter [11, p. 42]). *Für eine Hessenberg-Matrix A gilt*

$$s_p(A) = s_d(\tilde{A}), \tag{2.10}$$

$$s_{p,R}(A) = s_{d,R}(\tilde{A}), \tag{2.11}$$

$$s_{p,I}(A) = s_{d,I}(\tilde{A}). \tag{2.12}$$

Ehe wir eine erste Abschätzung behandeln, benötigen wir eine weitere Bezeichnung.
$n \geq 2$ komplexe Zahlen $z_1, ..., z_n$ heißen *streckenhalbierende Punkte,* falls sie die folgende Eigenschaft besitzen:
(1) im Fall $n = 2$ können z_1 und z_2 beliebig sein;
(2) im Fall $n > 2$ sind $z_1, ..., z_n$ derart beschaffen, daß $n-2$ von ihnen gleich dem arithmetischen Mittel der übrigen zwei sind.

Hilfssatz 2.2 (Mirsky [18, p. 128]). *Es seien $z_1, ..., z_n$, $n \geq 2$, komplexe Zahlen und es sei $s = \max_{i,j} |z_i - z_j|$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2} n s^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \tag{2.13}$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann auf, wenn $z_1, ..., z_n$ streckenhalbierende Punkte sind.

Satz 2.5 (Kräuter [11, pp. 43 - 44]). *Für eine $n \times n$-Hessenberg-Matrix A $(n \geq 2)$ gilt*

$$s_p(A) \leq \left\{ 2\,\|A\|^2 - \frac{2}{n}\,|\mathrm{tr}(A)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.14}$$

Gleichheit tritt in (2.14) *genau dann auf, wenn $\tilde{A}$ normal ist und wenn die Permanentenwurzeln von A streckenhalbierende Punkte sind.*

Beweis: Für die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A gilt nach Schur [21, pp. 492 - 493]

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|^2, \tag{2.15}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann auftritt, wenn A normal ist. Mit etwas Rechnung erhält man

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 = n \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 - |\mathrm{tr}(A)|^2, \tag{2.16}$$

woraus mit Hilfssatz 2.2 und (2.15) nach einigen Umformungen folgt:

$$\frac{1}{2}\, n\, [s_d(A)]^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \leq n\,\|A\|^2 - |\mathrm{tr}(A)|^2, \tag{2.17}$$

$$s_d(A) \leq \left\{ \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ 2\,\|A\|^2 - \frac{2}{n}\,|\mathrm{tr}(A)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.18}$$

Ersetzt man in (2.18) A durch $\tilde{A}$, so erhält man (2.14) mit Hilfssatz 2.1 und aufgrund der Tatsache, daß $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ sowie $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \mathrm{tr}(A)$ gilt. Die Gleichheitsbedingung folgt aus dem oben zitierten Satz von Schur sowie Hilfssatz 2.2. □

Die Anwendung einer Ungleichung von Deutsch [6] für Eigenwerte liefert unmittelbar eine weitere obere Schranke für $s_p(A)$, welche in manchen Fällen eine Verschärfung von (2.14) darstellt.

Satz 2.6 (Kräuter [11, p. 44]). *Für eine $n \times n$-Hessenberg-Matrix $A = (a_{ij})$ $(n \geq 3)$ gilt*

$$s_p(A) \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|. \tag{2.19}$$

Beispielsweise erhält man für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 101 \end{bmatrix}$$

mit (2.14) $s_p(A) \leq 114,36$, mit (2.19) jedoch $s_p(A) \leq 104$. (Es ist $s_p(A) \approx 98,99$.) Abschätzungen für die Real- und Imaginärteile der Permanentenwurzeln von Jacobi-Matrizen durch Gibson [8] dienten als Motivation für die Herleitung oberer Schranken für $s_{p,R}(A)$ beziehungsweise $s_{p,I}(A)$.

Satz 2.7 (Kräuter [11, p. 46]). *Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Hessenberg-Matrix $(n \geq 2)$, sodaß $\mathrm{Re}\,(a_{i,i+1}\, a_{i+1,i}) \geq 0$ für $i = 1, ..., n-1$ ist. Dann gilt*

$$s_{p,R}(A) \leq \left\{ \|A\|^2 + \mathrm{Re}\,[\mathrm{tr}(A^2)] - \frac{2}{n}\,[\mathrm{Re}\,(\mathrm{tr}(A))]^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.20}$$

Gleichheit tritt in (2.20) *genau dann auf, wenn $\tilde{A}$ normal ist,* $\mathrm{Re}\,(a_{i,i+1}\, a_{i+1,i}) = 0$ *für alle $i = 1, ..., n-1$, und wenn die Realteile aller Permanentenwurzeln von A streckenhalbierende Punkte sind.*

Ein analoger Satz gilt für $s_{p,I}(A)$. Abschließend seien noch *untere* Schranken für die Größen (2.5) - (2.7) angeführt.

Satz 2.8 (Kräuter [11, p. 48]). *Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Hessenberg-Matrix $(n \geq 2)$, sodaß $\tilde{A}$ normal ist. Dann gilt*

$$s_p(A) \geq \sqrt{3} \max_{i \neq j} |a_{ij}|, \tag{2.21}$$

$$s_{p,R}(A) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_{i,i+1} - \overline{a_{i+1,i}}|,\ \max_{j \neq i, i+1} |a_{ij} + \overline{a_{ji}}| \right\}, \tag{2.22}$$

$$s_{p,I}(A) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_{i,i+1} + \overline{a_{i+1,i}}|,\ \max_{j \neq i, i+1} |a_{ij} - \overline{a_{ji}}| \right\}. \tag{2.23}$$

Man beachte, daß die Abschätzung (2.21) bestmöglich ist. Dazu sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus O_{n-3},$$

wobei $a > 0$ ist und O_{n-3} die $(n-3) \times (n-3)$-Nullmatrix bezeichnet. A besitzt die Permanentenwurzeln $\omega_i = a\,\zeta^{i-1},\ \ i = 1, 2, 3$, wobei ζ eine fest gewählte dritte Einheitswurzel ist, und $\omega_4 = ... = \omega_n = 0$. Somit ist $s_p(A) = a\sqrt{3}$ und wegen

$\max_{i \neq j} |a_{ij}| = a$ haben wir Gleichheit in (2.21).
Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die Sätze 2.5 - 2.8 für umfangreichere Matrizenklassen als die dort angegebenen gültig sind. Dieser Umstand sowie weitere Ergebnisse, deren detaillierte Behandlung den Rahmen dieser Note sprengen würde, werden ebenfalls in der Arbeit [11] behandelt.

Literatur

[1] Joel Lee BRENNER and Richard Anthony BRUALDI, Eigenschaften der Permanentefunktion. *Archiv der Mathematik* **18,** 585 - 586 (1967).

[2] Lothar COLLATZ und Ulrich SINOGOWITZ, Spektren endlicher Grafen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **21,** 63 - 77 (1957).

[3] Gregory M. CONSTANTINE, Schur convex functions on the spectra of graphs. *Discrete Mathematics* **45,** 181 - 188 (1983).

[4] Dragoš M. CVETKOVIĆ, Michael DOOB, and Horst SACHS, *Spectra of Graphs. Theory and Applications.* New York: Academic Press, 1980.

[5] Dragoš M. CVETKOVIĆ and Michael DOOB, Developments in the theory of graph spectra. *Linear and Multilinear Algebra* **18,** 153 - 181 (1985).

[6] Emeric DEUTSCH, On the spread of matrices and polynomials. *Linear Algebra and Its Applications* **22,** 49 - 55 (1978).

[7] Isabel FARIA, Permanental roots and the star degree of a graph. *Linear Algebra and Its Applications* **64,** 255 - 265 (1985).

[8] Peter Murray GIBSON, Eigenvalues of complex tridiagonal matrices. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2)* **17,** 317 - 319 (1971).

[9] Peter Murray GIBSON, Localization of the zeros of the permanent of a characteristic matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society* **31,** 18 - 20 (1972).

[10] Mohammad ISHAQ, Russell MERRIS, and Elaine ZASLAWSKY, Problems concerning permanental polynomials of graphs. *Linear and Multilinear Algebra* **15,** 345 - 350 (1984).

[11] Arnold Richard KRÄUTER, On the greatest distance between two permanental roots of a matrix. *Linear Algebra and Its Applications* **93,** 39 - 55 (1987).

[12] Marvin MARCUS and Henryk MINC, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Boston: Allyn & Bacon, 1964.

[13] Russell MERRIS, Two problems involving Schur functions. *Linear Algebra and Its Applications* **10,** 155 - 162 (1975).

[14] Russell MERRIS, Kenneth Ralph REBMAN, and William WATKINS, Permanental polynomials of graphs. *Linear Algebra and Its Applications* **38,** 273 - 288 (1981).

[15] Russell MERRIS, The Laplacian permanental polynomial for trees. *Czechoslovak Mathematical Journal* **32,** 397 - 403 (1982).

[16] Russell MERRIS, The second immanantal polynomial and the centroid of a graph. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **7,** 484 - 503 (1986).

[17] Henryk MINC, *Permanents.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 6. Reading: Addison-Wesley, 1978.

[18] Leon MIRSKY, The spread of a matrix. *Mathematika* **3,** 127 - 130 (1956).

[19] Leon MIRSKY, Inequalities for normal and Hermitian matrices. *Duke Mathematical Journal* **24,** 591 - 599 (1957).

[20] Graciano Neves de OLIVEIRA, On the multiplicative inverse eigenvalue problem. *Canadian Mathematical Bulletin* **15,** 189 - 193 (1972).

[21] Issai SCHUR, Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. *Mathematische Annalen* **66,** 488 - 510 (1909).

[22] James TURNER, Generalized matrix functions and the graph isomorphism problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **16,** 520 - 526 (1968).

Arnold Richard KRÄUTER
Institut für Mathematik und
Angewandte Geometrie
Montanuniversität Leoben
Franz-Josef-Straße 18
A-8700 Leoben, Österreich
E-mail: kraeuter@unileoben.ac.at