Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A - 1090 WIEN

Elementare q - Identitäten

J. Cigler

Ich möchte einen Überblick über einige einfache q - Identitäten geben, bei welchen man ohne Rückgriffe auf die Theorie der Partitionen oder Heine'schen Reihen auskommt. Ich will mich vor allem bemühen, die Analogie mit der klassischen Analysis hervorzuheben und soweit wie möglich auch die "natürliche Umwelt" der wichtigsten Formeln berücksichtigen. Um die wesentlichen Ideen zu verdeutlichen, möchte ich mich auf die charakteristischen "Normalfälle" beschränken und solche Aspekte betonen, die mir besonders typisch erscheinen.

Wer sich ein wenig mit q - Identitäten beschäftigt hat, wird wahrscheinlich viele Dinge kennen. Ich hoffe aber, daß die hier gewählte Darstellung dazu beiträgt, die Theorie einfacher und leichter durchschaubar zu machen.

1. Grundlegende Tatsachen.

Ich darf wohl davon ausgehen, daß die zugrunde liegende analytische Situation bekannt ist:

Der q- Differentiationsoperator D_q, der durch $(D_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$ definiert ist, stellt ebenso wie der Differenzenoperator Δ_h, definiert durch $(\Delta_h f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ein diskretes Analogon des gewöhnlichen Differentiationsoperators dar.

Dabei ist die formale Analogie zur Differentialrechnung noch enger und interessanter als das bei der Differenzenrechnung der Fall ist. Insbesondere existieren für jeden speziellen Begriff der Analysis ein oder mehrere q -Analoga, die sich für $q \to 1$ auf den Ausgangsbegriff reduzieren. Welches q -Analogon das "richtige" ist, hängt von der gewählten Fragestellung ab. Wir wollen alle Formeln so formulieren, daß sie sich für $q = 1$ direkt auf die entsprechenden klassischen Formeln reduzieren.

1.1. Der q -Differentiationsoperator und seine Eigenschaften .

Sei q eine feste von 0 und -1 verschiedene reelle Zahl. Sei P der Vektorraum aller Polynome über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und Q die Menge aller formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$. (Um Konvergenzfragen bzw. tiefer liegende analytische Probleme zu vermeiden, werden wir uns ausschließlich auf formale Potenzreihen beschränken. Das Symbol f(x) bedeutet daher immer eine formale Potenzreihe

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$).

Wir definieren den q-Differentiationsoperator D für

$f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k \in Q$ durch

$$(1) \quad (Df)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)\,x} = \sum [k]\, a_k \, x^{k-1} \quad , \text{ wobei}$$

$$(2) \quad [n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gesetzt wurde.

Für $q = 1$ sind dabei die entsprechenden Limiten für $q \to 1$ zu nehmen. Es ist klar, daß sich dann der übliche Differentiationsoperator ergibt, den wir mit D_o bezeichnen wollen.
Statt (Df)(x) schreiben wir auch kurz f'(x).

Führen wir den Operator ϵ auf Q ein durch

$$(3) \quad (\epsilon f)(x) = f(qx),$$

so gilt

$$(1') \quad D = \frac{1}{(q-1)\underline{x}} (\epsilon - 1).$$

Hier bedeutet 1 die identische Abbildung und $\underline{a(x)}$ den Multiplikationsoperator , der durch $\underline{a(x)}\, f(x) = a(x)\, f(x)$ definiert ist.
(Da $f(qx) - f(x) = \sum_1^\infty (q^k - 1)\, a_k\, x^k$ ein Vielfaches von x ist, kann durch x dividiert werden, ohne aus Q herauszukommen).

Es ist klar, daß D ein linearer Operator auf Q ist.

Wegen

$$\frac{a(qx)\,b(qx) - a(x)\,b(x)}{(q-1)\,x} = \frac{a(qx)(b(qx)-b(x))}{(q-1)\,x} + \frac{(a(qx)-a(x))b(x)}{(q-1)\,x}$$

gilt

$$(a(x)\,b(x))' = a(qx)\,b'(x) + a'(x)\,b(x).$$

In Operatorschreibweise heißt das

$$(4) \quad D\,\underline{a(x)} = \underline{a(qx)}\,D + \underline{a'(x)}$$

oder, wenn man a und b vertauscht,

$$(4') \quad D\,\underline{a(x)} = \underline{a(x)}\,D + \underline{a'(x)}\,\varepsilon$$

Beachtet man, daß $D\,x^k = [k]\,x^{k-1}$ gilt, so folgt speziell

$$(5) \quad D\,\underline{x}^k - q^k\,\underline{x}^k\,D = [k]\,\underline{x}^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(5') \quad D\,\underline{x}^k - \underline{x}^k\,D = [k]\,\underline{x}^{k-1}\,\varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Für $k = 1$ reduziert sich das auf $D\,\underline{x} - q\,\underline{x}\,D = 1$

bzw. $D\,\underline{x} - \underline{x}\,D = \varepsilon$.

Wendet man (5) bzw (5') auf x^n an, $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ergeben sich die Formeln

$$(6) \quad [n+k] - q^k\,[n] = [k]$$

$$(6') \quad [n+k] - [n] = [k]\,q^n,$$

die natürlich auch sofort aus (2) abzulesen sind.

Wir benötigen im folgenden oft die q - Faktoriellen $[n]! = [1][2] \dots [n]$, $[o]! = 1$, und die q - Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}$

Wir führen nun auf P ein inneres Produkt ein durch

(7) $< x^k, x^l > = [k]!\ \delta_{kl}$, $k, l = 0,1,2,\dots$

Dieses läßt sich auch folgendermaßen beschreiben: Sei L das lineare Funktional auf Q, das durch

(8) $L f(x) = f(o)$

definiert ist. Dann gilt

(9) $< x^k, x^l > = L\, D^k x^l$.

Es ist nun leicht zu sehen, daß das innere Produkt (7) auch auf den Fall erweitert werden kann, daß ein Faktor in Q liegt. Es gilt dann

$< a(x), b(x) > = < b(x), a(x) >$, $a \in P$, $b \in Q$.

Ist A ein linearer Operator, so definieren wir den transponierten Operator A^t durch

(10) $< A\, a(x), b(x) > = < a(x), A^t\, b(x) >$.

Dann gilt

(11) $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$, $(A\,B)^t = B^t A^t$,

$x^t = D$, $D^t = x$, $\epsilon^t = \epsilon$.

Speziell geht für $a(x) = \Sigma a_k x^k$ der Multiplikationsoperator $a(x)$ auf Q in den Operator $a(\mathbf{x})^t = \Sigma a_k D^k$ auf P über, der durch $(\Sigma a_k D^k)\, p(x) = \Sigma a_k p^{(k)}(x)$ definiert ist. Aus (9) und (10) folgt dann die nützliche Formel

(12) $L\, a(D)\, b(x) = L\, b(D)\, a(x)$ für $a \in P$, $b \in Q$.

Versteht man unter $a'(D)$ den Operator $(a'(x))^t$, so gilt

(12') $L\, f(D)\, x = L\, D\, f(x) = L\, f'(x) = L\, f'(D)\, 1$.

Außerdem ist der Koeffizient a_k in den formalen Potenzreihen $f(x) = \Sigma a_k x^k$ gegeben durch

(13) $a_k = L \dfrac{D^k}{[k]!} f(x) = L\, f(D) \dfrac{x^k}{[k]!}$

Jede Operatoridentität geht durch Transposition wieder in eine Operatoridentität über. Speziell gehen (4) und (4') über in

(14) $a(D)\, \underline{x} = \underline{x}\, a(qD) + a'(D)$

(14') $a(D)\, \underline{x} = \underline{x}\, a(D) + \epsilon\, a'(D)$

Analog ergibt sich aus (5) und (5')

(15) $D^k \underline{x} - q^k \underline{x} D^k = [k]\, D^{k-1}$

(15') $D^k \underline{x} - \underline{x} D^k = \epsilon\, [k]\, D^{k-1}$

Wendet man diese Identitäten auf x^n an, so ergeben sich die Rekursionsformeln für die q-Binomialkoeffizienten:

(16) $\left[{n+1 \atop k}\right] - q^k \left[{n \atop k}\right] = \left[{n \atop k-1}\right]$

(16') $\left[{n+1 \atop k}\right] - \left[{n \atop k}\right] = q^{n-k+1} \left[{n \atop k-1}\right]$.

Im weiteren benötigen wir auch das q-Analogon der Leibniz'schen Formel.

Da D f(ax) = a f'(ax) gilt, zeigt man mit Induktion sofort, daß

$$(a(x)\ b\ (x))^{(n)} = \Sigma \left[{n \atop k}\right] a^{(n-k)}(q^k x)\ b^{(k)}(x)$$

gilt. Denn für n=1 ist das richtig. Somit ist

$$(a(x)\ b\ (x))^{(n+1)} = \Sigma \left[{n \atop k}\right] a^{(n-k)}(q^{k+1} x)\ b^{(k+1)}(x) +$$

$$+ \Sigma \left[{n \atop k}\right] q^k a^{(n+1-k)}\ (q^k x)\ b^{(k)}(x) =$$

$$= \Sigma \left(\left[{n \atop k}\right] q^k + \left[{n \atop k-1}\right]\right) a^{(n+1-k)}(q^k x)\ b^{(k)}(x).$$

In Operatorschreibweise erhalten wir

$$(17) \quad D^n\ \underline{a(x)} = \Sigma \left[{n \atop k}\right] \underline{a^{(n-k)}(q^k x)}\ D^k$$

$$(17') \quad D^n\ \underline{a(x)} = \Sigma \left[{n \atop k}\right] \underline{a^{(k)}(x)}\ \epsilon^k\ D^{n-k}$$

<u>Bermerkung</u>: Wir werden auch gelegentlich den Operator D_α benötigen, der durch

$$(18) \quad (D_\alpha p)(x) = \frac{p(q^\alpha x) - p(x)}{(q^\alpha - 1)\ x}$$

definiert ist.

Er erfüllt $D_\alpha x^n = [n]_\alpha\ x^{n-1}$ mit

$$(19) \quad [n]_\alpha = \frac{q^{n\alpha}-1}{q^\alpha - 1} = \frac{[n\alpha]}{[\alpha]}$$

1.2. Die q - Exponentialfunktion

Die eindeutig bestimmte formale Potenzreihe f (x) mit Df = af und Lf = 1 ist gegeben durch f(x) = e(ax) mit

$$(1) \qquad e(x) = \sum_{o}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$$

Wir nennen e(x) die q-Exponentialfunktion.

Wegen

$$\frac{e\,(aqx) - e(ax)}{(q-1)\,x} \equiv a\, e(ax)$$

ist e (ax) auch charakterisiert durch

$$(2) \quad e\,(aqx) = (1 + (q-1)\,ax)\, e\,(ax)\;, \quad e\,(o) = 1.$$

Wir fragen nun etwas allgemeiner nach der Lösung der q-Differentialgleichung D f(x) = ax f(x) mit L f = 1.

Setzt man $f(x) = \Sigma\, a_k\, x^k$, so muß aber gelten

$$\Sigma\, [k]\, a_k\, x^{k-1} = a\, x\, \Sigma\, a_k\, x^k$$

oder $a_o = 1,\; a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = o,$

$$[2k]\, a_{2k} = a \times a_{2k-2}$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \frac{a^k}{[2]\ldots[2k]} = \left(\frac{a}{[2]}\right)^k \frac{1}{[k]_2\;!}$$

Setzt man also allgemein

$$(3) \quad e_q(x) = \sum_{o}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}$$

so ergibt sich, daß die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$D\, f(x) = a\, x\, f(x)$ mit $L\, f = 1$

gegeben ist durch

$$f(x) = e_2\left(\frac{ax^2}{\lceil 2 \rceil}\right) .$$

Es existieren eine Reihe von Beziehungen zwischen den verschiedenen e_α's. Wir wollen hier nur zwei erwähnen:

$$(4) \quad \frac{1}{e_\alpha(x)} = e_{-\alpha}(-x) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n\, q^{\alpha\binom{n}{2}} \frac{x^n}{\lceil n \rceil_\alpha !}$$

Es genügt natürlich, den Fall $\alpha = 1$ zu behandeln.

Aus (2) folgt

$$e\left(\frac{a\,x}{q}\right) = \frac{1}{1 + \frac{q-1}{q} xa}\; e\,(ax)$$

und daher

$$e_{-1}(-qx) = \frac{1}{1-(1-q)x}\, e_{-1}(-x)$$

$$\Rightarrow \; e\,(qx)\, e_{-1}(-qx) = (1 + (q-1)\,x)\, \frac{1}{1+(q-1)x}\, e\,(x)\, e_{-1}(-x)$$

$$\Rightarrow \; D\,(\, e(x)\, e_{-1}(-x)) = o$$

$$\Rightarrow \; e\,(x)\, e_{-1}(-x) = 1, \text{ d.h. } (4).$$

Eine weitere weitere nützliche Beziehung ist

$$(5) \quad e_2\left(\frac{x}{\lceil 2 \rceil}\right) e_2\left(\frac{qx}{\lceil 2 \rceil}\right) = e\,(x).$$

Es ist nämlich

$$e_2\left(\frac{q\,x}{\lceil 2 \rceil}\right) e_2\left(\frac{q^2\,x}{\lceil 2 \rceil}\right) = e_2\left(\frac{qx}{\lceil 2 \rceil}\right)\left(1 + (q^2-1)\,\frac{x}{\lceil 2 \rceil}\right) e_2\left(\frac{x}{\lceil 2 \rceil}\right) =$$

$$= \left(1 + (q-1)x\right) e_2 \left(\frac{x}{[2]}\right) e_2\left(\frac{qx}{[2]}\right) .$$

Aus (2) folgt die Behauptung.

Bemerkung: Man hätte (5) natürlich auch durch Koeffizientenvergleich beweisen können.

Es ist nämlich allgemein

$$\Sigma \frac{a_k}{[k]!} x^k \Sigma \frac{b_l}{[l]!} x^l = \Sigma \frac{c_n}{[n]!} x^n$$

mit $c_n = \Sigma \left[{n \atop k} \right] a_k b_{n-k}$.

Daher ist (5) äquivalent mit

$$(5') \sum_{k=o}^{n} \left[{n \atop k} \right]_2 q^k = (1 + q) (1 + q^2) \ldots (1 + q^n).$$

Diese Formel läßt sich sehr leicht mit Induktion beweisen.

Aus 1.1. (4), (4') ergeben sich die folgenden nützlichen Formeln (man beachte $D\epsilon = q \epsilon D$)

$$(6) \quad e (a D) \underline{x} \frac{1}{e(aD)} = \underline{x} + a \epsilon$$

$$(7) \quad \frac{1}{e(aD)} (\underline{x} \epsilon^{-1}) e (aD) = (\underline{x} -a) \epsilon^{-1}$$

$$(8) \quad \frac{1}{e_2\left(- \frac{\underline{x}^2}{[2]}\right)} D e_2 \left(- \frac{\underline{x}^2}{[2]}\right) = D - \underline{x}\epsilon$$

$$(9) \quad e_2 \left(\frac{q\underline{x}^2}{[2]}\right) (\epsilon^{-1}D) \frac{1}{e_2\left(\frac{q\underline{x}^2}{[2]}\right)} = D_{-1} - \underline{x}\epsilon^{-1} = \epsilon^{-1}D - \underline{x}\epsilon^{-1}$$

1.3. Das q-Analogon der Polynome $(x-a)^n$.

Die Polynome $p_n(x,a) = (x-a)^n$ sind charakterisiert durch $p_n(a,a) = \delta_{no}$ und $D_o\, p_n = np_{n-1}$.

Um ein q-Analogon zu finden, stellen wir daher die folgende Frage: Gibt es Polynome $p_n(x,a)$ vom Grad n mit $p_n(a,a) = \delta_{no}$ und $Dp_n = \lceil n \rceil\, p_{n-1}$?

Wenn solche Polynome existieren, dann muß wegen

$$\frac{p_n(qx,a) - p_n(x,a)}{(q-1)\,x} = Dp_n(x,a) = \lceil n \rceil\, p_{n-1}(x,a)$$

gelten

$$p_n(qx,a) = p_n(x,a) + (q^n-1)\, x\, p_{n-1}(x,a)$$

$$\Rightarrow \quad p_n(qa,a) = o \quad \text{für } n > 1$$

$$\Rightarrow \quad p_n(q^i a,a) = o \text{ für } n > i$$

$$\Rightarrow \quad p_n(x,a) = (x-a)\,(x-qa)\,\ldots\,(x - q^{n-1}a).$$

Man überzeugt sich sehr leicht, daß diese Polynome tatsächlich alle Forderungen erfüllen.

<u>Satz:</u> Die eindeutig bestimmten Polynome n-ten Grades $p_n(x,a)$ mit $p_n(a,a) = \delta_{no}$ und $Dp_n = \lceil n \rceil\, p_{n-1}$ sind gegeben durch $p_o(x) \equiv 1$ und (1) $p_n(x,a) = (x-a)\,(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a)$, $n \geq 1$.

Um die explizite Gestalt dieser Polynome zu finden, setzen wir $p_n(x,a) = \Sigma\, a_{nk}\, x^k$.

Dann folgt aus 1.1. (13) und (1)

$$a_{nk} = L\,\frac{D^k}{\lceil k \rceil !}\, p_n(x,a) = L \left\lceil {n \atop k} \right\rceil p_{n-k}(x,a) =$$

$$= (-1)^{n-k}\, q^{\binom{n-k}{2}}\, a^{n-k}$$

$$\Rightarrow (2)\quad p_n\,(x,a) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] q^{\binom{n-k}{2}} a^{n-k}\, x^k$$

Das läßt sich auch in der Gestalt

$$p_n\,(x,a) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k\, q^{\binom{k}{2}} \frac{a^k D^k}{[k]!}\, x^n$$

schreiben. Beachtet man 1.2. (4), so gilt also

$$(3)\quad p_n\,(x,a) = \frac{1}{e(aD)}\, x^n = e_{-1}\,(-aD)\, x^n$$

Beachtet man, daß $D^n\, e\,(x\,t) = t^n\, e\,(x\,t)$ ist, so folgt daraus

$$(4)\quad \sum_{o}^{\infty} \frac{p_n(x,a)}{[n]!}\, t^n = \frac{1}{e(aD)}\, e\,(x\,t) = \frac{e(x\,t)}{e(a\,t)}$$

Wegen $\frac{e\,(x\,t)}{e\,(a\,t)}\,\frac{e\,(a\,t)}{e\,(y\,t)} = \frac{e\,(x\,t)}{e\,(y\,t)}$ folgt durch Koeffizientenvergleich

$$(5)\quad \sum_{k=o}^{n} \left[{n \atop k}\right] p_k\,(x,a)\; p_{n-k}\,(a,y) = p_n\,(x,y)$$

Die Polynome $p_n\,(x,a)$ treten bei verschiedenen Problemen auf.
So gilt z.B.

$$(6)\quad e\,(q^n x) = p_n\,(1,\,(1-q)\,x)\; e\,(x).$$

Das folgt sofort aus 1.2. (2).

$$\Rightarrow e\,(\varepsilon\, z\,)\; e\,(x\,t) = \sum \frac{\varepsilon^n z^n}{[n]!}\, e\,(x\,t) = \sum \frac{z^n\, e\,(q^n\, xt)}{[n]!} =$$

$$= \sum \frac{p_n\,(1,(1-q)x\,t)}{[n]!}\, z^n\, e\,(x\,t) = \frac{e\,(z)}{e\,((1-q)xtz)}\, e\,(x\,t)$$

$$\Rightarrow (7)\quad e\,(\varepsilon z)\; e\,(x\,t) = \frac{e(z)\; e\,(x\,t)}{e((1-q)\,xtz)}$$

Eine weitere nützliche Formel ist

$$(8)\quad \frac{p_n(\varepsilon,1)}{(q-1)^n} = q^{\binom{n}{2}} \underline{x}^n D^n$$

Denn wendet man beide Seiten auf x^r an, $r = o, 1, 2, \dots$, so ergibt sich in beiden Fällen

$$\lceil r \rceil \lceil r-1 \rceil \dots \lceil r-n+1 \rceil x^r .$$

1.4. Die Rogers - Szegö - Polynome.

Die Polynome $r_n(x,a) = (x+a)^n$ können auch durch $D_o e_n = n r_{n-1}$ und $L\, r_n(x,a) = a^n$ charakterisiert werden.

Das führt zu folgender Frage:

Gibt es Polynome $r_n(x,a)$ n-ten Grades mit $Dr_n = \lceil n \rceil r_{n-1}$ und

$Lr_n(x,a) = a^n$?

Wenn es solche Polynome gibt, so folgt $r_n(x,a) = \Sigma\, a_{nk} x^k$ mit

$$a_{nk} = L \frac{D^k}{\lceil k \rceil !} r_n(x,a) = \lceil {n \atop k} \rceil L\, r_{n-k}(x,a) = \lceil {n \atop k} \rceil a^{n-k}$$

$$\Rightarrow r_n(x,a) = \sum_{k=o}^{n} \lceil {n \atop k} \rceil a^{n-k} x^k .$$

<u>Satz</u>: Die eindeutig bestimmten Polynome n-ten Grades $r_n(x,a)$ mit $Dr_n = \lceil n \rceil r_{n-1}$ und $Lr_n(x,a) = a^n$ sind die Rogers-Szegö-Polynome.

$$(1)\quad r_n(x,a) = \sum_{k=o}^{n} \lceil {n \atop k} \rceil a^{n-k} x^k = a^n r_n\left(\frac{x}{a}\right) \text{ mit } r_n(x) = r_n(x,1).$$

Es gilt dann

$$r_n(x,a) = \Sigma \frac{a^k}{\lceil k \rceil !} D^k x^n \text{ oder}$$

$$(2)\quad r_n(x,a) = e(aD)\, x^n$$

$$\Rightarrow \quad (3) \sum_{o}^{\infty} \frac{r_n(x,a)}{[n]!} t^n = e(aD)\, e(xt) = e(at)\, e(xt).$$

Aus (2) und 1.2. (6) ergibt sich

$$r_n(x,a) = e(aD)\, \underline{x}^n \frac{1}{e(aD)} 1 = (e(aD)\, \underline{x} \frac{1}{e(aD)})^n 1 = (\underline{x} + a\epsilon)^n 1$$

$$\Rightarrow (4)\; r_n(x,a) = (\underline{x} + a\epsilon)^n 1.$$

Aus (4) folgt

$$r_{n+1}(x,a) = (\underline{x} + a\epsilon)\, r_n(x,a) = (\underline{x} + a)\, r_n(x,a) + a(\epsilon - 1)\, r_n(x,a) =$$

$$= (x+a)\, r_n(x,a) + a(q-1)\, xD\, r_n(x,a)$$

$$= (x+a)\, r_n(x,a) + a(q^n - 1)\, x\, r_{n-1}(x,a)$$

$$\Rightarrow (5)\; r_{n+1}(x,a) = (x+a)\, r_n(x,a) + a(q^n-1)\, x\, r_{n-1}(x,a)$$

Die bekanntesten Spezialfälle sind für $a = 1$, $x = 1$

$$(6)\; r_{n+1}(1) = 2r_n(1) + (q^n - 1)\, r_{n-1}(1)$$

mit $r_n(1) = \sum_{k=o}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

und die Gauß'sche Identität ($x = 1$, $a = -1$)

$$(7) \sum_{k=o}^{2n} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2n-1}).$$

2. Der q-binomische Lehrsatz.

Es gibt viele Formeln, die als q-binomischer Lehrsatz bezeichnet werden. Für mein Gefühl stellt der folgende Satz die einfachste und klarste Version dar:

<u>Satz 1 (q-binomischer Lehrsatz)</u>: Seien Λ_o und Λ_1 lineare Operatoren auf dem Vektorraum P mit $\Lambda_1 \Lambda_o = q \Lambda_o \Lambda_1$.
Dann gilt

$$(1) \quad (\Lambda_o + \Lambda_1)^n = \sum_{k=o}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \Lambda_o^{\ k} \Lambda_1^{\ n-k}$$

<u>Beweis:</u> Mit Induktion unter Verwendung von 1.1. (16) ergibt sich

$$(\Lambda_o + \Lambda_1) \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \Lambda_o^{\ k} \Lambda_1^{\ n-k} = \sum \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) \Lambda_o^{\ k} \Lambda_1^{\ n+1-k}$$

$$= \sum \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \Lambda_o^{\ k} \Lambda_1^{\ n+1-k}.$$

Der entsprechende multinomische Lehrsatz ist gegeben durch

$$(2) \quad (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots \Lambda_s)^n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_s \end{bmatrix} \Lambda_1^{\ k_1} \dots \Lambda_s^{\ k_s} ,$$

Hier gilt $\Lambda_j \Lambda_i = q \Lambda_i \Lambda_j$ für $i < j$ und

$$\begin{bmatrix} n \\ k_1, \dots, k_s \end{bmatrix} = \frac{[\ n\ ]!}{[k_1]! \dots [k_s]!} \quad \text{falls } \sum k_j = n.$$

Der Beweis folgt sofort mit Induktion nach s.

Einfache Beispiele für Operatorenpaare (Λ_o, Λ_1) mit $\Lambda_1 \Lambda_o = q \Lambda_o \Lambda_1$ sind $(x^a \varepsilon^b, x^c \varepsilon^d)$ oder $(\varepsilon^d D^c, \varepsilon^b D^a)$ mit $ad - bc = 1$, also etwa (x,ε), $(x,x\varepsilon)$, $(x\varepsilon,\varepsilon)$, (ε,D), $(\varepsilon D,D)$ und $(\varepsilon,\varepsilon D)$.

So folgt etwa

$$(x + a\varepsilon)^n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k} \varepsilon^{n-k}$$

oder

$$(-x\varepsilon + a\varepsilon)^n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-x\varepsilon)^k (a\varepsilon)^{n-k}$$

Somit ist

$$(3) \quad p_n(a,x) = (-x\varepsilon + a\varepsilon)^n \, 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man, daß Satz 1 äquivalent ist mit

Satz 2: Seien Λ_o und Λ_1 lineare Operatoren auf P mit $\Lambda_1 \Lambda_o = q\Lambda_o\Lambda_1$. Dann gilt

$$(4) \quad e(\Lambda_o t)\, e(\Lambda_1 t) = e((\Lambda_o + \Lambda_1)t)$$

Beispiele: 1) $(\Lambda_o, \Lambda_1) = (x, -x\varepsilon)$ liefert
$e(x)\, e(-x\varepsilon) = e(x(1-\varepsilon))$

$\Rightarrow e(x)\, e(-x\varepsilon)\, 1 = 1$ weil $(1-\varepsilon)\, 1 = o$ ist.

$$\Rightarrow \frac{1}{e(x)} = e(-x\varepsilon)\, 1 = \sum_o^\infty (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{\lceil n\rceil!}$$

Das ist wohl der einfachste Beweis für dieses Resultat, welches wir in 1.2. (4) schon auf anderem Wege bewiesen hatten.

2) Für $(\Lambda_o, \Lambda_1) = (x, a\varepsilon)$ ergibt sich 1.4. (3)

3) Für $(\Lambda_o, \Lambda_1) = (-x\varepsilon, a\varepsilon)$ folgt 1.3. (4).

Aus
$$\sum_o^\infty \frac{(\Lambda_o+\Lambda_1)^n}{\lceil n\rceil!} t^n = e(\Lambda_o t)\, e(\Lambda_1 t) = e(\Lambda_o t)\, e(a\, t) \frac{e(\Lambda_1 t)}{e(a\, t)} =$$
$$= \sum \frac{r_n(\Lambda_o, a)}{\lceil n\rceil!} t^n \cdot \sum \frac{p_n(\Lambda_1, a)}{\lceil n\rceil!} t^n$$
folgt durch Koeffizientenvergleich der

Satz 3: Gilt $\Lambda_1 \Lambda_o = q \Lambda_o \Lambda_1$, dann gilt

$$(5) \quad (\Lambda_o + \Lambda_1)^n = \sum_{k=o}^n \left\lceil {n \atop k} \right\rceil r_k(\Lambda_o, a)\, p_{n-k}(\Lambda_1, a)$$

Beispiel: Wählt man $(\Lambda_o, \Lambda_1) = (x, \varepsilon)$, so folgt

$$(6) \quad (x+\varepsilon)^n = \sum_{k=o}^n \left\lceil {n \atop k} \right\rceil r_k(x)\, p_{n-k}(\varepsilon, 1)$$

Aus 1.4.(4) und 1.3.(8) folgt daraus z.B. die Carlitz'sche Formel

$$(7)\quad r_{m+n}(x) = (x+\varepsilon)^n\, r_m(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]!\, (q-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}\, x^k\, r_{n-k}(x)\, r_{m-k}(x)$$

Aus 1.4. (3), 1.3. (7) und 1.4. (4) ergibt sich sehr einfach das folgende Resultat von L.J.Rogers (1893).

$$(8)\quad \sum \frac{r_n(x,a)\, r_n(y,b)}{[n]!}\, t^n = \frac{e(abt)\, e(btx)\, e(aty)\, e(xyt)}{e((1-q)\, x y a b t^2)}$$

<u>Beweis</u>:

$$\sum \frac{r_n(x,a)\, r_n(y,b)}{[n]!}\, t^n = \sum \frac{r_n(y,b)}{[n]!}\, t^n\, (x+a\varepsilon)^n\, 1 =$$

$$= e(y\, t\, (x + a\varepsilon))\, e(b\, t\, (x + a\varepsilon))\, 1$$

$$= e(y\, t\, x)\, e(y\, a\, t\, \varepsilon)\, e(b\, t\, x)\, e(a\, b\, t\, \varepsilon)\, 1$$

$$= e(y\, t\, x)\, e(y\, a\, t\, \varepsilon)\, e(b\, t\, x)\, e(a\, b\, t)$$

$$= e(a\, b\, t)\, e(y\, t\, x)\, \frac{e(y\, a\, t)}{e((1-q) b\, t\, x\, y\, a\, t)}\, e(b\, t\, x)$$

$$= \frac{e(a\, b\, t)\, e(b\, t\, x)\, e(a\, t\, y)\, e(x\, y\, t)}{e((1-q)\, x\, y\, a\, b\, t^2)}$$

Beachtet man, daß $(\Lambda_0+\Lambda_1)^2 = (\Lambda_0{}^2 + q\Lambda_0\Lambda_1)+(\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_1{}^2)$ gilt und daß $(\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_1{}^2)(\Lambda_0{}^2+q\Lambda_0\Lambda_1) = q^2(\Lambda_0{}^2+q\Lambda_0\Lambda_1)(\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_1{}^2)$ ist, so folgt

$e_2((\Lambda_0+\Lambda_1)^2) = e_2(\Lambda_0{}^2 + q\Lambda_0\Lambda_1)\, e_2(\Lambda_0\Lambda_1+\Lambda_1{}^2)$. Aus

$\Lambda_0\Lambda_1\Lambda_0{}^2 = q^2\Lambda_0{}^2\Lambda_0\Lambda_1$ und $\Lambda_1{}^2\Lambda_0\Lambda_1 = q^2\Lambda_0\Lambda_1^3$ folgt weiter

$e_2((\Lambda_0+\Lambda_1)^2) = e_2(\Lambda_0{}^2)\, e_2(q\Lambda_0\Lambda_1)\, e_2(\Lambda_0\Lambda_1)\, e_2(\Lambda_1{}^2)$.

Aus 1.2. (5) folgt daraus der

<u>Satz 4:</u> Gilt $\Lambda_1 \Lambda_0 = q \Lambda_0 \Lambda_1$, dann ist

$$e_2\left((\Lambda_0+\Lambda_1)^2\right) = e_2\left(\Lambda_0{}^2\right)\, e\left(\lceil 2 \rceil\, \Lambda_0 \Lambda_1\right)\, e_2\left(\Lambda_1{}^2\right)$$

Speziell gilt

$$e\,(tD)\; e_2\left(\frac{x^2}{\lceil 2 \rceil}\right) = e_2\left(\frac{(x+\epsilon t)^2}{\lceil 2 \rceil}\right) 1 =$$

$$e_2\left(\frac{x^2}{\lceil 2 \rceil}\right) e\,(x \epsilon t)\; e_2\left(\frac{\epsilon^2\, t^2}{\lceil 2 \rceil}\right) 1$$

$$\Rightarrow (9) \quad \frac{1}{e_2\left(\frac{x^2}{\lceil 2 \rceil}\right)}\; e\,(t\,D)\; e_2\left(\frac{x^2}{\lceil 2 \rceil}\right) = \frac{e_2\left(\frac{t^2}{\lceil 2 \rceil}\right)}{e\,(-x\,t)}$$

Ersetzt man hier q durch $\frac{1}{q}$, so erhält man wegen $D_{-1} = \epsilon^{-1} D$

$$(10) \quad e_2\left(\frac{qx^2}{\lceil 2 \rceil}\right) \frac{1}{e(\epsilon^{-1} D\, t)}\; \frac{1}{e_2\left(\frac{qx^2}{\lceil 2 \rceil}\right)} \doteq \frac{e\,(x\,t)}{e_2\left(\frac{q\,t^2}{\lceil 2 \rceil}\right)}$$

3. Die q-Hermite-Polynome.

3.1. Vorbemerkungen:

Die klassischen Hermite-Polynome $h_n(x)$ können durch die erzeugende Funktion

$$\sum \frac{h_n(x)}{n!} t^n = e^{tx-\frac{t^2}{2}}$$

definiert werden. Sie sind Polynome n-ten Grades, die durch

$$h_n(x) = e^{-D_o^2/2} x^n = (x-D_o)^n 1 = e^{x^2/2}(-D_o)^n e^{-x^2/2}$$

gegeben sind.

Sie erfüllen die Rekursion $h_o=1$, $h_1(x)=x$,

$$h_{n+1}(x) = x\, h_n(x) - n\, h_{n-1}(x)$$

und die Gleichung $D_o h_n = n\, h_{n-1}$.

Sie sind außerdem orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$[f(x),g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x^2/2}\, dx \,.$$

Wir suchen ein q-Analogon, welches womöglich alle diese Eigenschaften in geeigneter q-Version besitzt. Soviel mir bekannt ist, gibt es bis auf unwesentliche Normierungen, nur zwei Arten von q-Hermite-Polynomen, die sich als brauchbar erwiesen haben.

Wir wollen zunächst die erste Version $H_n(x)$ betrachten, die auf L.J.Rogers zurückgeht. Sie kann folgendermaßen motiviert werden:

Wir wollen, daß $\sum \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n$ ein q-Analogon von $e^{tx-t^2/2}$ ist.

Diese Funktion genügt der Differentialgleichung $D_o f(x,t) = (x-t)f(x,t)$, wobei D_o die Ableitung nach t bedeutet.

Wir suchen also jene Polynomfolge $H_n(x)$, für welche gilt

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n = (x-t) \sum \frac{H_n(x)}{[n]!} t^n$$

oder $$\sum \frac{H_{n+1}(x)}{[n]!} t^n = \sum \frac{xH_n(x)}{[n]!} t^n - \sum \frac{H_{n-1}(x)}{[n-1]!} t^n \,.$$

Das ergibt mit $H_o \equiv 1$, $H_1(x) = x$ und

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - [n] H_{n-1}(x).$$

Daraus wieder ergibt sich die Orthogonalität bezüglich eines geeigneten Funktionals.
Es besteht ein enger Zusammenhang mit den Szegö-Rogers-Polynomen.
Es ist nämlich

$$H_n\left(\frac{2}{\sqrt{1-q}} \cos \theta\right) \sqrt{(1-q)}^n = r_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta}),$$

denn beide Seiten erfüllen die Rekursion

$$B_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta\, B_n(\cos \theta) + (q^n-1)B_{n-1}(\cos \theta)$$

und $\quad B_o = 1, \quad B_1(\cos \theta) = 2 \cos \theta.$

Es lassen sich daher alle Aussagen über die Polynome r_n auf diese Klasse von Hermite-Polynomen übertragen.
So ergibt sich etwa aus 2. (7)

$$H_{m+n}(x) = \Sigma \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} [k]! \; (-1)^k q^{\binom{k}{2}} H_{n-k}(x)H_{m-k}(x).$$

Allerdings besteht kein einfaches q-Analogon zur Gleichung $D_o h_n = n\, h_{n-1}$ und daher ist dieses q-Analogon vom Standpunkt der Analogie zur klassischen Analysis aus doch nicht ganz ideal.

Um ein q-Analogon zu finden, das alle Eigenschaften erfüllt, suchen wir eine Polynomfolge h_n mit $Dh_n = [n]h_{n-1}$, welche orthogonal bezüglich eines geeigneten linearen Funktionals F ist, für die also $F(h_k(x)h_l(x)) = 0$ für $k \neq l$ und $F(h_k^2(x)) \neq 0$ ist.

Da $xh_n(x) = \sum_0^{n+1} a_k h_k(x)$ gelten muß und $F(h_n(x)(xh_k(x))) = 0$ ist für $k < n-1$, gilt

$$a_k F(h_k^2(x)) = F(x\, h_n(x)h_k(x)) = 0 \quad \text{für} \quad k < n-1$$

$$\Rightarrow \quad x\, h_n(x) = h_{n+1}(x) + a_{n-1}h_{n-1}(x).$$

Wir setzen dabei der Einfachheit halber $a_n = 0$.

(Wegen $Dh_n = [n]h_{n-1}$ und $Dx^n = [n]x^{n-1}$ muß $a_{n+1} = 1$ sein).
Wenden wir auf diese Gleichung D an, so ergibt sich

$$qx[n]h_{n-1}(x) + h_n(x) = [n+1]h_n(x) + [n-1]a_{n-1}h_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow \quad x\, h_{n-1}(x) = h_n(x) + \frac{[n-1]}{q[n]}\, a_{n-1}h_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow \quad x\, h_n(x) = h_{n+1}(x) + [n]q^{n-1}a\, h_{n-1}(x).$$

Beachtet man $D\, h_{n+1} = [n+1]h_n(x)$, so folgt daraus

$$h_{n+1}(qx) = q^{n+1}x\, h_n(x) - q^{n-1}aD\, h_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad h_{n+1}(x) = q^n(x\epsilon^{-1} - \frac{a}{q}\epsilon^{-1}D)h_n(x).$$

Wählen wir $a = q$, so ergibt sich aus 1.2(9) und 2.(10)

$$\Sigma \frac{h_n(x)}{[n]!}\, t^n = \frac{e(xt)}{e_2(\frac{qt^2}{[2]})} .$$

3.2. Die q-Hermite-Polynome $h_n(x)$.

Wir definieren also die q-Hermite-Polynome $h_n(x)$ durch die erzeugende Funktion

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)}{[n]!}\, t^n = \frac{1}{e_2(\frac{qt^2}{[2]})}\, e(xt) = e_{-2}(-\frac{t^2}{[2]_{-1}})e(xt).$$

Aus dieser Definition liest man sofort ab, daß

$$(2) \qquad Dh_n = [n]\, h_{n-1}$$

und

$$(3) \qquad h_n(x) = \frac{1}{e_2(\frac{qD^2}{[2]})}\, x^n$$

gilt.

Aus 1.(14) folgt

$$e_2(\frac{qD^2}{[2]})\underline{x} - \underline{x}\, e_2(\frac{qD^2}{[2]}) = \epsilon\, qD\, e_2(\frac{qD^2}{[2]})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e_2(\frac{qD^2}{[2]})}\ \underline{x}\ e_2(\frac{qD^2}{[2]}) = \underline{x} - \frac{1}{e_2(\frac{qD^2}{[2]})}\ \epsilon\ qD\ e_2(\frac{qD^2}{[2]})$$

$$\Rightarrow h_{n+1}(x) = (\underline{x} - \frac{1}{e_2(\frac{qD^2}{[2]})}\ \epsilon\ qD\ e_2(\frac{qD^2}{[2]}))h_n(x)$$

$$= x\ h_n(x) - \frac{1}{e_2(\frac{qD^2}{[2]})}\ \epsilon\ q\ [n]\ x^{n-1}$$

$$= x\ h_n(x) - q^n[n]\ h_{n-1}(x)$$

$$= (x-q^nD)h_n(x).$$

$\Rightarrow$ (4) $\quad h_{n+1}(x) = x\ h_n(x) - q^n[n]\ h_{n-1}(x)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} h_o(x) &= 1 \\ h_1(x) &= x \\ h_2(x) &= x^2 - q \\ h_3(x) &= x^3 - [3]qx\ . \end{aligned}$$

Weiters folgt

(5) $\quad h_n(x) = (\underline{x}-q^{n-1}D)(\underline{x}-q^{n-2}D)\ldots(\underline{x}-D)1.$

Aus (4) ergibt sich

(6) $\quad L\ h_n \;=\; -q^{n-1}[n-1]\ L\ h_{n-2}$

$\Rightarrow$ (6') $\quad L\ h_{2n+1} = 0$

$$L\ h_{2n} = (-1)^n[2n-1]!!\ q^{n^2}$$

mit $\quad [2n-1]!! = [1][3]\ldots[2n-1].$

Nun können **wir die Koeffizienten** a_{nk} in

$$h_n(x) = \Sigma\ a_{nk}\ x^{n-k}$$

berechnen:

$$a_{nk} = \frac{1}{[n-k]!} L\, D^{n-k} h_n(x) = \left[{n \atop k}\right] L\, h_k$$

$$\Rightarrow \quad a_{n,2k+1} = 0$$

$$a_{n,2k} = \left[{n \atop 2k}\right](-1)^k q^{k^2} [2k-1]!!$$

$$\Rightarrow \quad (7) \qquad h_n(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k q^{k^2} \left[{n \atop 2k}\right] [2k-1]!!\; x^{n-2k} .$$

Als nächstes zeigen wir, daß h_n bezüglich des linearen Funktionals

$$(8) \qquad F(p) = \langle p(x), e_2(\tfrac{qx^2}{[2]})\rangle = \langle e_2(\tfrac{qD^2}{[2]})p(x), 1\rangle =$$

$$= L\, e_2(\tfrac{qD^2}{[2]})p(x)$$

orthogonal ist.

Zunächst ist klar, daß

$$F(h_n) = L\, e_2(\tfrac{qD^2}{[2]})h_n = Lx^n = \delta_{no}$$

ist.

Aus (4) ergibt sich

$F(xh_n(x)) = 0$ für $n > 1$. Mit Induktion folgt $F(x^k h_n(x)) = 0$ für $n > k$

$$\Rightarrow \quad F(h_n(x)h_k(x)) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq k.$$

Nun wollen wir $F(h_n(x)h_n(q^k x))$ berechnen.

Nach (4) gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$F(h_n(x)h_n(q^k x)) = F(h_n(x)(q^k x\, h_{n-1}(q^k x) - q^{n-1}[n-1]h_{n-2}(q^k x)))$$

$$= q^k F(x\, h_n(x)h_{n-1}(q^k x))$$

$$= q^k F((h_{n+1}(x) + q^n[n]h_{n-1}(x))h_{n-1}(q^k x))$$

$$= q^{k+n}[n]\, F(h_{n-1}(x)h_{n-1}(q^k x))$$

$$\Rightarrow \quad (9) \qquad F(h_n(x)h_n(q^k x)) = [n]!\; q^{\binom{n+1}{2}+nk} .$$

Beachtet man, daß $Dh_n = [n]h_{n-1}$ ist, so folgt aus (4)

$$(10) \quad h_{n+1}(qx) = q^{n+1} x\, h_n(x) - q^n[n]\, h_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon h_{n+1}(x) = q^n(qx-D)h_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad h_{n+1}(x) = q^n\,(x\,\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}D)h_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad (11) \qquad h_n(x) = q^{\binom{n}{2}}(\underline{x}\,\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-1}D)^n 1$$

$$\Rightarrow \quad (12) \qquad h_n(x) = (\underline{x}-qD)(\underline{x}-q^3D)\ldots(\underline{x}-q^{2n-1}D)1.$$

Aus 1.2.(9) und (11) ergibt sich

$$(13) \qquad h_n(x) = q^{\binom{n}{2}}\, e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)(-\varepsilon^{-1}D)^n \frac{1}{e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)}$$

$$= q^{\binom{n}{2}}\, e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)(-D_{-1})^n\, e_{-2}\left(-\frac{x^2}{[2]}\right).$$

Aus der Leibniz'schen Formel ergibt sich nun

$$(x\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}D)^n = (-1)^n e_2\left(\frac{qx^2}{[2]}\right)\Sigma \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{-1} D_{-1}^k\, e_{-2}\left(-\frac{x^2}{[2]_{-1}}\right).\varepsilon^{-k}D_{-1}^{n-k}$$

$$= (-1)^n\, \Sigma \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k q^{-\binom{k}{2}} h_k(x)\,(\varepsilon^{-1}D)^{n-k}\varepsilon^{-k}$$

$$\Rightarrow \quad (14) \qquad q^{\binom{n}{2}}(x\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}D)^n = \Sigma\,(-1)^k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} h_{n-k}(x)\,\varepsilon^{-n}D^k$$

$$\Rightarrow \qquad h_{m+n}(x) = q^{\binom{m+n}{2}-\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}\, \Sigma\,(-1)^k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} h_{n-k}(x)\varepsilon^{-n}D^k h_m(x)$$

$$= q^{mn}\, \Sigma\,(-1)^k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}[k]!\; h_{n-k}(x)h_{m-k}\left(\frac{x}{q^n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (15) \qquad h_{m+n}(x) = q^{mn}\, \Sigma\,(-1)^k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}[k]!\; h_{n-k}(x)h_{m-k}\left(\frac{x}{q^n}\right).$$

3.3. Die Mehler'sche Formel

Für die klassischen Hermite-Polynome gilt die Mehler'sche Formel

$$\Sigma \frac{h_n(x)h_n(y)}{n!}\, t^n = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, e^{\frac{xyt}{1-t^2}}\, e^{-\frac{t^2}{2}\frac{x^2+y^2}{1-t^2}}.$$

Wir wollen nun das folgende q-Analogon beweisen.

<u>Satz (Mehler'sche Formel für q-Hermite-Polynome)</u>: Es gilt

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)h_n(y)}{[n]!\,q^{\binom{n+1}{2}}}\, t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\left(\frac{t^2}{q}\right)^m.$$

$$\cdot e(xy\,\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}})e_2(\frac{x^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1})e_2(\frac{y^2}{[2]}\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1})1,$$

wobei η durch $\eta f(t) = f(qt)$ definiert ist.

<u>Beweis</u>: Sei $f(x,y,t) = \Sigma \frac{h_n(x)h_n(y)}{[n]!q^{\binom{n+1}{2}}} t^n$.

Dann gilt

(2) $$f(0,0,t) = \Sigma \frac{h^2_{2n}(0)}{[2n]!q^{\binom{2n+1}{2}}} t^{2n} =$$

$$= \Sigma \frac{q^{2n^2}([2n-1]!!)^2}{[2n]!\ q^{n(2n+1)}} t^{2n} = \Sigma \frac{[2n-1]!!}{[2n]!!}(\frac{t^2}{q})^n.$$

Weiters ist

(3) $$\eta\, D_x\, f(x,y,t) = (\frac{ty}{1-t^2} - \frac{t^2x}{1-t^2})f(x,y,t)\ .$$

Es ist nämlich

$$D_xf(x,y,t) = \Sigma \frac{h_{n-1}(x)h_n(y)}{[n-1]!q^{\binom{n+1}{2}}} t^n$$

$$\Rightarrow \quad \eta\, D_x\, f(x,y,t) = \Sigma \frac{h_{n-1}(x)h_n(y)}{[n-1]!q^{\binom{n}{2}}} t^n$$

$$\Rightarrow \quad \eta\, D_y\, f(x,y,t) = \Sigma \frac{h_n(x)h_{n-1}(y)}{[n-1]!q^{\binom{n}{2}}} t^n$$

$$\Rightarrow \quad (\eta\, D_x + t\eta\, D_y)f(x,y,t) = \Sigma \frac{h_{n-1}(x)(h_n(y) + [n-1]q^{n-1}h_{n-2}(y))}{[n-1]!\ q^{\binom{n}{2}}} t^n$$

$$= \Sigma \frac{h_{n-1}(x)y\ h_{n-1}(y)}{[n-1]!\ q^{\binom{n}{2}}} t^n = yt\ f(x,y,t)$$

$\Rightarrow$ (4) $$(\eta\, D_x + t\eta\, D_y)f(x,y,t) = yt\ f(x,y,t)$$

(4') $$(\eta D_y + t\eta\, D_x)f(x,y,t) = xt\ f(x,y,t)$$

$$\Rightarrow \eta\, D_x\, f(x,y,t) = (yt - t\eta\, D_y)f(x,y,t)$$

$$= (yt - xt^2 + t^2\eta D_x)f(x,y,t)$$

$\Rightarrow$ (3)

Durch (2) und (3) ist f(x,y,t) eindeutig festgelegt, da f(x,0,t) eindeutig bestimmt ist. Wegen $f(0,y,t) = f(y,0,t)$ ist daher auch f(x,y,t) eindeutig bestimmt.

Es genügt daher zu zeigen, daß die rechte Seite von (1) ebenfalls (2) und (3) erfüllt.

Nun ist

$$D_x\, e(xy\,\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}})\, e_2(\frac{x^2}{[2]}\,\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}) =$$

$$= e(qxy\,\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}})\,(x\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1})\, e_2(\frac{x^2}{[2]}\,\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}) +$$

$$+ y\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}}\, e(xy\,\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}})\, e_2(\frac{x^2}{[2]}\,\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}) =$$

$$= \eta^{-1}(\frac{yt}{1-\frac{t^2}{q}} - \frac{xt^2}{1-\frac{t^2}{q}})\, e(xy\,\eta^{-1}\frac{t}{1-\frac{t^2}{q}})\, e_2(\frac{x^2}{[2]}\,\eta^{-1}\frac{t^2}{\frac{t^2}{q}-1}).$$

weil $(\eta^{-1}f(t))^n\eta^{-1}f(t)t = \frac{1}{q^n}\,\eta^{-1}f(t)t\,(\eta^{-1}f(t))^n$ ist.

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\eta\sum_0^\infty \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}(\frac{t^2}{q})^m\,\eta^{-1}(\frac{yt}{1-\frac{t^2}{q}} - \frac{xt^2}{1-\frac{t^2}{q}}) =$$

$$= (\frac{ty}{1-t^2} - \frac{t^2x}{1-t^2})\quad \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}(\frac{t^2}{q})^m$$

gilt oder daß

$$(5)\qquad (1-t^2)\,\Sigma\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}(qt^2)^m = (1-\frac{t^2}{q})\Sigma\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}(\frac{t^2}{q})^m$$

erfüllt ist.

(5) ist durch Koeffizientenvergleich äquivalent mit

$$\frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}q^m - \frac{[2m-3]!!}{[2m-2]!!}q^{m-1} = \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!}\frac{1}{q^m} - \frac{[2m-3]!!}{[2m-2]!!}\frac{1}{q^m}$$

oder mit

$$\frac{[2m-1]}{[2m]}\left(q^m - \frac{1}{q^m}\right) = q^{m-1} - \frac{1}{q^m}$$

d.h. mit $\frac{[2m-1]}{[2m]} \frac{(q^{2m}-1)}{q^m} = \frac{q^{2m-1}-1}{q^m}$,

was offenbar richtig ist.
Damit ist die Mehler'sche Formel bewiesen.

4. Die q-Laguerre-Polynome

4.1. Vorbemerkungen.

Die klassichen Laguerre-Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, können durch die erzeugenden Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{xt}{t-1}}$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{n!} = (1-t)^{\alpha} e^{xt}$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{n!(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} = e^{-t} \sum \frac{x^n t^n}{n!(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}$$

definiert werden.
Sie sind Polynome n-ten Grades, die durch

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= (1-D_o)^{\alpha+1} x (D_o-1)^n x^{n-1} \\ &= x^{-\alpha} e^x D^n e^{-x} x^{n+\alpha} \\ &= (-1)^n (1-D)^{n+\alpha} x^n \end{aligned}$$

gegeben sind.

Sie erfüllen die Rekursion

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (\alpha+2n+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \text{ mit}$$

$L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$, $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$.

Sie sind orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$[f(x),g(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx = L\frac{1}{(1-D_0)^{\alpha+1}} f(x)g(x).$$

Wir suchen ein q-Analogon, welches womöglich alle diese Eigenschaften besitzt. Ein Weg dazu besteht in folgender Bemerkung: Vergleicht man die Formeln

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} (-x)^k$$

und

$$(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\frac{n!}{k!} x(x-1)\ldots(x-k+1),$$

so sieht man, daß in beiden Fällen dieselben Koeffizienten auftreten. Von der zweiten Formel gibt es natürliche q-Analoga. Diese führen zu zwei Klassen von q-Laguerre-Polynomen

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(\varepsilon-D)^{n+\alpha}x^n$$

und

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n+\alpha}(1,D)x^n.$$

Wir wollen uns hier auf die Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$ beschränken, für welche auch ein Zusammenhang mit dem Hermite-Polynomen besteht.

4.2. Die formalen Potenzreihen $p_\alpha(1,x)$.

Wir wollen die Polynome $p_n(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \left[{n \atop k}\right] x^k$ auf beliebige reelle α erweitern. Wir setzen dazu

$$(1) \qquad p_\alpha(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \left[{\alpha \atop k}\right] x^k.$$

Nun ist $q^{\binom{k}{2}} \left[{\alpha \atop k}\right] = \dfrac{(q^\alpha-1)(q^\alpha-q)\ldots(q^\alpha-q^{k-1})}{(q-1)^k} = \dfrac{p_k(q^\alpha,1)}{(q-1)^k}$

und daher gilt

$$(2) \qquad p_\alpha(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(q^\alpha,1)}{[k]!} \left(\frac{x}{1-q}\right)^k = \frac{e(\frac{q^\alpha x}{1-q})}{e(\frac{x}{1-q})}$$

nach 1.3.(4).

Weiters ist $\dfrac{p_k(1,q^\alpha)}{(1-q)^k} = [\alpha]\,[\alpha+1]\ldots[\alpha+k-1]$

und daher gilt

$$(3) \qquad \frac{1}{p_\alpha(1,x)} = \frac{e(\frac{x}{1-q})}{e(\frac{q^\alpha x}{1-q})} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix}\alpha+k-1\\ k\end{bmatrix} x^k.$$

Wir benötigen noch die folgenden Formeln:

$$(4) \qquad p_{\alpha+1}(1,x) = (1-q^\alpha x)p_\alpha(1,x)$$

und

$$(5) \qquad p_{\alpha+\beta}(1,x) = p_\alpha(1,x)p_\beta(1,q^\alpha x).$$

Da (4) ein Spezialfall von (5) ist ($\beta=1$), genügt es (5) zu zeigen. Das ergibt sich (2):

$$p_\alpha(1,x)p_\beta(1,q^\alpha x) = \frac{e(\frac{q^\alpha x}{1-q})}{e(\frac{x}{1-q})} \; \frac{e(\frac{q^\beta q^\alpha x}{1-q})}{e(\frac{q^\alpha x}{1-q})} = \frac{e(\frac{q^{\alpha+\beta} x}{1-q})}{e(\frac{x}{1-q})} = p_{\alpha+\beta}(1,x).$$

<u>Bemerkung</u>: Die Gleichung 3.3(5) folgt ebenfalls aus (5), wenn man $\alpha = \frac{1}{2}$ setzt und q durch q^2 ersetzt. Es ist dann nämlich

$$\frac{1}{p_{\frac{1}{2}}(1,x;q^2)} = \sum \frac{[2m-1]!!}{[2m]!!} \; x^m$$

und 3.3(5) äquivalent mit

$$(1-\sqrt{q}\,\tfrac{x}{\sqrt{q}})p_{\frac{1}{2}}(1,\tfrac{x}{\sqrt{q}}) = p_{\frac{3}{2}}(1,\tfrac{x}{\sqrt{q}}) = (1-\tfrac{x}{\sqrt{q}})p_{\frac{1}{2}}(1,q\tfrac{x}{\sqrt{q}}) .$$

4.3. Die q-Laguerre-Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$.

Wir definieren die q-Laguerre-Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$ durch die Formel

(1) $$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n+\alpha}(1,D)x^n.$$

Es gilt dann

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ k \end{bmatrix} D^k x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} x^k$$

$\Rightarrow$ (2) $$l_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} x^k.$$

Definiert man für $\alpha > -1$ den Operator T_α auf P durch

(3) $$T_\alpha x^n = \frac{x^{n+1}}{[\alpha+n+1]}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

so gilt

(4) $$T_\alpha^k 1 = \frac{x^k}{[\alpha+1]\ldots[\alpha+k]} .$$

Aus (2) ergibt sich daher

(5) $$\frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(x)}{[\alpha+1]\ldots[\alpha+n]} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} T_\alpha^k 1 = p_n(T_\alpha,1)1.$$

Aus 1.3 (4) folgt somit

(6) $$\sum \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(x) t^n}{[n]![\alpha+1]\ldots[\alpha+n]} = \frac{1}{e(t)} e(T_\alpha t)1 =$$
$$= \frac{1}{e(t)} \sum \frac{x^n t^n}{[n]![\alpha+1]\ldots[\alpha+n]} .$$

Definiert man nun S_α auf dem Vektorraum P_0 der Polynome p mit $Lp=0$ durch

(7) $$S_\alpha x^n = [n+\alpha]x^{n-1} = (x^{-\alpha}Dx^\alpha)x^n, \quad n \geq 1,$$

so gilt

(8) $\qquad S_\alpha T_\alpha x^n = x^n \qquad$ für $n \geq 0$

(9) $\qquad T_\alpha S_\alpha x^n = x^n \qquad$ für $n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad (-1)^n l_n^{(\alpha)}(x) = [\alpha+1]\ldots[\alpha+n] p_n(T_\alpha,1)1 =$$

$$= p_n(T_\alpha,1) S_\alpha^n x^n = p_n(1,S_\alpha)x^n$$

$$\Rightarrow \quad (10) \qquad (-1)^n l_n^{(\alpha)}(x) = p_n(1,S_\alpha)x^n = x^{-\alpha} p_n(1,D)x^{n+\alpha}.$$

Der Operator T_α ist auch sonst sehr nützlich. Will man etwa ein q-Analogon der sogenannten Verdopplungsformel ableiten, so kann man folgendermaßen vorgehen:

Es gilt:

$$p_n(ax,1) = \Sigma \left[{n \atop k}\right] a^k p_{n-k}(a,1) p_k(x,1).$$

Das sieht man sofort mit der Methode, die zu 1.3.(2) führte.

$$\Rightarrow \quad p_n(aT_\alpha,1) = \Sigma \left[{n \atop k}\right] a^k p_{n-k}(a,1) p_k(T_\alpha,1)$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^n \frac{l_n^{(\alpha)}(ax)}{[\alpha+1]\ldots[\alpha+n]} = \Sigma \left[{n \atop k}\right] a^k p_{n-k}(a,1) \frac{(-1)^k l_k^{(\alpha)}(x)}{[\alpha+1]\ldots[\alpha+k]}$$

$$\Rightarrow \quad (11) \qquad l_n^{(\alpha)}(ax) = \Sigma \left[{n+\alpha \atop n-k}\right] \frac{[n]!}{[k]!} (-1)^{n-k} a^k p_{n-k}(a,1) l_k^{(\alpha)}(x).$$

Nun zu den anderen erzeugenden Funktionen: Aus (1) folgt

$$\Sigma \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{[n]!} = \Sigma \frac{p_\alpha(1,D)x^n t^n}{[n]!} = p_\alpha(1,D)e(xt)$$

$$\Rightarrow \quad (12) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha-n)}(x) t^n}{[n]!} = p_\alpha(1,t)e(xt).$$

Aus (2) ergibt sich

$$\Sigma \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{t^n}{[n]!} = \Sigma \frac{t^n}{[n]!} q^{-\binom{n}{2}} \sum_k \left[{n+\alpha \atop n-k}\right] \frac{[n]!}{[k]!} q^{\binom{n-k}{2}} (-x)^k =$$

$$= \sum_k \frac{(-x)^k t^k}{[k]!} \sum_{n\geq k} q^{-\binom{n}{2}+\binom{n-k}{2}} \left[{n+\alpha \atop n-k}\right] t^{n-k}$$

$$= \sum_k \frac{(-xt)^k}{[k]!} \sum_{n=0}^{\infty} \left[{n+\alpha+k \atop n}\right] q^{\binom{n}{2}-\binom{n+k}{2}} t^n$$

$$= \Sigma \frac{(-1)^k x^k t^k}{q^{\binom{k}{2}}[k]!} \sum_0^\infty \left[{n+\alpha+k \atop n}\right] \left(\frac{t}{q^k}\right)^n .$$

Nun ist $\Sigma \left[{n+\alpha+k \atop n}\right] \left(\frac{t}{q^k}\right)^n = \frac{1}{p_{\alpha+k+1}(1,\frac{t}{q^k})} =$

$$\doteq \frac{1}{p_k(1,\frac{t}{q^k})} \cdot \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)} \quad \text{nach 4.2 (3) und (5).}$$

$$\Rightarrow (13) \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{t^n}{[n]!} = \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{q^{\binom{k}{2}}[k]!} \frac{t^k}{(\frac{t}{q}-1)\ldots(\frac{t}{q^k}-1)}$$

$$= \frac{1}{p_{\alpha+1}(1,t)} e(qx\,\eta^{-1} \frac{t}{t-1})1 .$$

mit $\eta\, t^n = q^n t^n$.

Für $n=0,1,2,\ldots$ gilt

$$(14) \qquad p_n(1,D) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} e(qx) D^n \frac{1}{e(\frac{x}{q^{n-1}})}$$

weil $e(aqx)D \frac{1}{e(ax)} = D-a$ gilt.

Aus (10) folgt daher

$$(15) \qquad \frac{l_n^{(\alpha)}(x)}{q^{\binom{n}{2}}} = x^{-\alpha} e(qx) D^n \frac{1}{e(\frac{x}{q^{n-1}})} x^{n+\alpha} .$$

Aus (1) ergibt sich

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n p_{n-1}(1,D) p_{\alpha+1}(1,q^{n-1}D) x^n$$

und somit

$$(16) \qquad l_n^{(\alpha)}(x) = p_{\alpha+1}(1,q^{n-1}D) l_n^{(-1)}(x)$$

mit $l_n^{(-1)}(x) = (-1)^n x p_n(1,D) x^{n-1}$.

Wendet man auf beide Seiten von (16) ϵ^n an, so ergibt sich

$$(16') \qquad l_n^{(\alpha)}(q^n x) = p_{\alpha+1}(1,\tfrac{D}{q}) l_n^{(-1)}(q^n x) .$$

Wir behaupten nun, daß die q-Laguerre-Polynome $l_n^{(\alpha)}(x)$ für $\alpha > -1$ orthogonal bezüglich des linearen Funktionals

(17) $$F(p) = L\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)}\, p(x)$$

sind.

Wegen

$$\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{\alpha+k \atop k}\right] D^k \text{ und } \left[{\alpha+k+1 \atop k+1}\right] = \frac{[\alpha+1]}{[k+1]} \left[{\alpha+k+1 \atop k}\right]$$

gilt $$L\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)}\, \underline{x} = [\alpha+1]\, L\frac{1}{p_{\alpha+2}(1,D)}$$

$$\Rightarrow \quad L\frac{1}{p_{\alpha+1}(1,D)}\, \underline{x}^k = [\alpha+1]\dots[\alpha+k]\; L\frac{1}{p_{\alpha+k+1}(1,D)}\,.$$

$$\Rightarrow \quad F(l_n^{(\alpha)}(x)x^k) = L\frac{[\alpha+1]\dots[\alpha+k]}{p_{\alpha+k+1}(1,D)}\, l_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= [\alpha+1]\dots[\alpha+k]\, L\frac{(-1)^n}{p_{\alpha+k+1}(1,D)}\, p_{n+\alpha}(1,D)x^n$$

$$= [\alpha+1]\dots[\alpha+k](-1)^n\, L p_{n-k-1}(1,q^{\alpha+k+1}D)x^n = 0$$

für $k < n$.

Für $k \geq n$ ergibt sich

(18) $$F(l_n^{(\alpha)}(x)x^k) = (-1)^n[\alpha+1]\dots[\alpha+k]\, L\frac{1}{p_{k+1-n}(1,q^{n+\alpha}D)}\, x^n.$$

Da der Koeffizient von x^n in $l_n^{(\alpha)}(x)$ gleich $(-1)^n$ ist, folgt

$$F(l_n^{(\alpha)}(x)l_n^{(\alpha)}(x)) = [\alpha+1]\dots[\alpha+n]\frac{1}{(1-q^{n+\alpha}D)}\, x^n =$$

$$= q^{n^2+\alpha n}[n]!\; [\alpha+1]\dots[\alpha+n].$$

$$\Rightarrow \quad (19) \quad F(l_n^{(\alpha)}(x)l_k^{(\alpha)}(x)) = q^{\alpha n+n^2}[n]!\,[\alpha+1]\dots[\alpha+n]\delta_{nk}.$$

Da die $l_n^{(\alpha)}(x)$ orthogonal sind, müssen in der Darstellung

$$x\, l_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k l_k^{(\alpha)}(x)$$

die Koeffizienten c_k mit $k<n-1$ verschwinden. Es gibt also eindeutig bestimmte Koeffizienten c_n und c_{n-1} mit

$$x\, l_n^{(\alpha)}(x) + l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = c_n l_n^{(\alpha)}(x) + c_{n-1} l_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Um c_n zu bestimmen, braucht man nur den Koeffizienten von x^n zu betrachten. Es ergibt sich dann

$$(20) \qquad l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (q^n[n+\alpha] + q^{n+\alpha}[n+1] - x) l_n^{(\alpha)}(x) - q^{2n+\alpha-1}[n][n+\alpha]\, l_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad .$$

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang mit den q-Hermite-Polynomen herstellen.

$$\begin{aligned} h_{2n}(x) &= \sum_k (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k \end{bmatrix} [2k-1]!!\; x^{2n-2k} \\ &= \sum_k (-1)^k q^{k^2} \frac{[2n]!\,[2k-1]!!}{[2k]!\,[2n-2k]!}\; x^{2n-2k} \\ &= \sum_k (-1)^k q^{k^2} \frac{[2n]!!\,[2n-1]!!\,[2k-1]!!}{[2k]!!\,[2k-1]!!\,[2n-2k]!!\,[2n-2k-1]!!}\; x^{2n-2k} \\ &= \sum_k (-1)^k q^{k^2} \begin{bmatrix} n-\frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_2 \frac{[n]_2!}{[n-k]_2!} [2]^k\; x^{2n-2k} \\ &= ([2]q)^n \sum_k (-1)^k q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-\frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_2 \frac{[n]_2}{[n-k]_2!} \left(\frac{x^2}{[2]q}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (21) \qquad h_{2n}(x) = (-1)^n ([2]q)^n\, l_n^{(-\frac{1}{2})}\!\left(\frac{x^2}{[2]q}, q^2\right) \quad .$$

Analog ergibt sich

$$(22) \qquad h_{2n+1}(x) = (-1)^n ([2]q)^n x\, l_n^{(\frac{1}{2})}\!\left(\frac{x^2}{[2]q}, q^2\right).$$

5. Bemerkungen zur Literatur.

Ich habe absichtlich jeden Literaturhinweis vermieden, weil es mir unmöglich war, die ursprünglichen Quellen der einzelnen Resultate herauszufinden. Das beruht einerseits darauf, daß mir die ältere Literatur (L.J.Rogers, G.Szegö, F.H.Jackson) teilweise unzugänglich ist und andererseits darauf, daß viele Resultate in zahlreichen Variationen existieren, deren enge Beziehung den einzelnen Autoren nicht aufgefallen ist. Im Grunde sind sicher alle hier behandelten Resultate längst bekannt, wenn ich auch manche in der Literatur bisher nicht finden konnte.

Wahrscheinlich habe auch ich manche Zusammenhänge übersehen. So wäre es durchaus denkbar, daß zwischen den Hermitepolynomen $H_n(x)$ und $h_n(x)$ außer der sehr ähnlichen Rekursionsformel noch andere Zusammenhänge existieren. Ich habe aber bisher keine finden können. So gibt es für die Mehlerformel bei den H_n sehr einfache Beweise (vgl. [2]; noch einfacher scheint mir der Hinweis auf 2.(8) zu sein). Ein so einfacher Beweis ist mir bei den h_n nicht bekannt.

Nach dem Gesagten ist wohl klar, daß die folgende Literaturauswahl sehr subjektiv ist. Sie gibt hauptsächlich Arbeiten an, die mir persönlich interessant erscheinen oder besonders nützlich waren.

Literatur

[1] A.E.Andrews, The theory of partitions, (1976)

[2] D.M.Bressoud, A simple proof of Mehler's formula for q-Hermite polynomials, Indiana J. 29(1980),577-580

[3] L.Carlitz, Some polynomials related to theta-functions, Duke J. 24 (1957), 521-527

[4] J.Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten, Mh. 88 (1979), 87-105

[5] J.Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten II: q-Laguerre-Polynome, Mh 91 (1981), 105-117

[6] J.Cigler, Die Mehler-Formel für q-Hermite-Polynome, preprint 1981

[7] A.M.Garsia-J.Remmel, A combinatorial interpretation of q-derangement and q-Laguerre numbers, Europ.J.Comb.1 (1980) 47-59

[8] J.Goldman-G.C.Rota, Finite vector spaces and Eulerian generating functions, Studies appl.Math. 49 (1970), 239-258

[9] W.Hahn, Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen, Math.Nachr. 2 (1949), 4-34

[10] V.K.Jain, q-Analogues of some bilinear transformations, Indian J. 11 (1980) 1643-1658

[11] P.Kirschenhofer, Binomialfolgen, Shefferfolgen und Faktorfolgen in der q-Analysis, Sitzungsberichte Österr.AkademieII 188 (1979), 265-315

[12] D.S.Moak, The q-analogue of the Laguerre polynomials, J.Math.Anal. Appl. 81 (1981), 20-47

[13] G.-C.Rota, D.Kahaner, A.Odlyzko, Finite operator calculus, J.Math.Anal.Appl. 42 (1973), 684-760.