ÜBER DIE MITTLERE HÖHE VON MONOTON GELABELTEN WURZELBÄUMEN

(Peter Kirschenhofer, Institut f. Algebra u. Diskrete Mathematik
der Technischen Universität Wien
Gußhausstr. 27-29, A-1040 Wien, Österreich)

In der Arbeit [1] haben Ph.Flajolet und A.Odlyzko gezeigt, daß die mittlere Höhe aller binären Bäume (im Sinne von Knuth) mit n inneren Knoten asymptotisch gleich $2\sqrt{\pi n}$ $(n \to \infty)$ ist.

Ein binärer Baum heißt monoton gelabelt aus $\{1<2\}$, wenn jede von der Wurzel zu einem Blatt verlaufende Folge von Labels (schwach) monoton ist. Für die mittlere Höhe aller derartigen Bäume mit n inneren Knoten ergibt sich der asymptotische Wert $\sqrt{\frac{8\pi n}{3}}$. ([3])

Der Beweis beruht auf der Untersuchung einer geeigneten analytischen Fortsetzung der zugehörigen erzeugenden Funktionen in einem Sektor um deren (logarithmische) Singularität auf dem Konvergenzkreis.

Eine Verallgemeinerung dieser Vorgangsweise erlaubt die Behandlung des Problems für Labels aus $\{1<2<\ldots<k\}$ und ergibt den asymptotischen Wert $C_k \cdot \sqrt{n}$ $(n \to \infty)$, wobei C_k eine Konstante mit $C_k \sim C/\sqrt{k}$ $(k \to \infty)$ ist.

Die Frage nach der mittleren Höhe des j-ten Blattes (vom linken Rand aus gezählt) führt im Gegensatz zum oberen Problem zu erzeugenden Funktionen mit algebraischen Singularitäten. Die asymptotische Auswertung der Koeffizienten kann hier mit der Methode von Darboux/Polya erfolgen und ergibt für $n \to \infty$ einen Wert $C_k(j) \sim c_k \cdot j^{1/2}$ $(j \to \infty)$. Die Konstanten c_k sind rekursiv bestimmt und verhalten sich wieder wie $C/\sqrt{k}$ $(k \to \infty)$. ([2])

Literatur:

[1] Ph.Flajolet, A.Odlyzko. The average height of binary trees and other simple trees, INRIA Rapports de Recherche 56(1981); sowie: J.Comput.System Sci., to appear.

[2] P.Kirschenhofer. On the average shape of monotonically labelled tree structures, preprint, TU Wien, 1981.

[3] P.Kirschenhofer, H.Prodinger. On the average height of monotonically labelled binary trees, preprint, TU Wien, 1981.