Lagrange - Inversion

Josef Hofbauer

1) Die Lagrange'sche Inversionsformel

Die Lagrange'sche Inversionsformel läßt sich beispielsweise in der folgenden Art formulieren:

Sei $g(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$ eine (formale) Potenzreihe in x mit $\varphi(o) \neq 0$ und $f(x)$ eine f.P.R., die man nach den Potenzen von $g(x)$ entwickelt:

$$(1.1) \qquad f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, g(x)^k = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{x^k}{\varphi(x)^k}.$$

Dann sind die Koeffizienten c_k durch folgende Formeln gegeben:

1. Version der Lagrange'schen Formel:

$$(\mathrm{I}) \qquad c_n = \frac{1}{n} f'(x) g(x)^{-n}\Big|_{x^{-1}} = \frac{1}{n} f'(x)\varphi(x)^n\Big|_{x^{n-1}}$$

2. Version der Lagrange'schen Formel:

$$(\mathrm{II}) \qquad c_n = f(x)g'(x)g(x)^{-n-1}\Big|_{x^{-1}} = f(x)g'(x)\varphi(x)^{n+1}\Big|_{x^n}$$

Dabei bedeutet $h(x)\big|_{x^n}$ den Koeffizienten von x^n in der formalen Potenz- oder Laurentreihe $h(x)$. Für $h(x)\big|_{x^{-1}}$ werden wir manchmal auch $\operatorname{Res} h(x)$ und später $M(h(x)dx)$ schreiben.

Wählt man in (1.1) $f(x) = x$, so erhält man die Koeffizienten der zu $g(x)$ (bezüglich Komposition) inversen Potenzreihe.

Einer der einfachsten Beweise der Lagrange'schen Inversionsformel ist der folgende:

Wir zeigen zunächst

<u>Lemma 1</u>: Ist $g(x)$ wie oben eine f.P.R. der Ordnung 1, dann gilt für beliebige ganze Zahlen n

(1.2)
$$\frac{g'(x)}{g^{n+1}(x)}\bigg|_{x^{-1}} = \delta_{no}$$

<u>Beweis</u>: Ist nämlich $n \neq 0$, dann ist $g'(x)g(x)^{-n-1} = -\frac{1}{n}(g(x)^{-n})'$ und hat daher als Ableitung einer formalen Laurentreihe das Residuum 0. Für $n = 0$ ist
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$
und da der zweite Summand wegen $\varphi(o) \neq 0$ eine f.P.R. ist, ist das Residuum = 1.

Um jetzt die 1. Version zu beweisen, leiten wir die Entwicklung (1.1) ab:
$$f'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_k . k . g(x)^{k-1} g'(x),$$
dividieren durch $g(x)^n$ und nehmen das Residuum:
$$\text{Res } f'(x)g(x)^{-n} = \text{Res } \Sigma\, c_k . k . g'(x)g(x)^{-n+k-1} = nc_n$$
wegen Lemma 1.

Für die 2. Version multiplizieren wir (1.1) bloß mit $g'(x)g(x)^{-n-1}$, bestimmen das Residuum und wenden wieder Lemma 1 an:
$$\text{Res } f(x)g'(x)g(x)^{-n-1} = \text{Res } \Sigma\, c_k\, g'(x)g(x)^{-n+k-1} = c_n$$
Damit sind (I) und (II) gezeigt.

<u>Beispiele</u>:

1) Die zu $g(x) = xe^{-ax}$ inverse Reihe ist

(1.3)
$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} z^n,$$
weil man aus (I) für $f(x) = x$ und $\varphi(x) = e^{ax}$
$$c_n = \frac{1}{n} e^{ax}\Big|_{x^{n-1}} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$
erhält.

2) Es gelten die Entwicklungen

$$e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} (ze^{-az})^k \tag{1.4}$$

$$\frac{e^{xz}}{1-az} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+ak)^k}{k!} (ze^{-az})^k \tag{1.5}$$

Multipliziert man (1.4) mit e^{yz} und vergleicht die Koeffizienten von z^n, erhält man ABEL's Identität:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x\, (x+ak)^{k-1} (y-ak)^{n-k} \tag{1.6}$$

3) $$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(a,b)(z(1+z)^b)^k$$

mit

$$G_n(a,b) = \frac{1}{n}\, a(1+z)^{a-1}(1+z)^{-nb}\Big|_{z^{n-1}} = \frac{a}{n}\binom{a-1-nb}{n-1} = \frac{a}{a-bn}\binom{a-bn}{n}$$

Aus $(1+z)^{a+c} = (1+z)^a(1+z)^c$ folgt

$$G_n(a+c,b) = \sum_{k=0}^{n} G_k(a,b)\ G_{n-k}(c,b) \tag{1.7}$$

2) Anwendungen in der Kombinatorik

Eine der schönsten Anwendungen der Lagrange'schen Formel auf ein kombinatorisches Problem ist die Herleitung von Cayley's Formel für die Anzahl der Wurzelbäume. Ein Wurzelbaum ist ein Baum, dessen Knoten durchnumeriert sind, wobei ein Knoten - die Wurzel - ausgezeichnet ist.

Sei b_n die Anzahl der Wurzelbäume über der Knotenmenge $\{1,2,\ldots,n\}$ und

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Bezeichnen wir außerdem mit w_n die Anzahl der Wurzelwälder (= Graphen, deren Komponenten Wurzelbäume sind) über $\{1,2,\dots,n\}$. Aus der Exponentialformel folgt dann

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} t^n = e^{s(t)}.$$

Nun gilt aber $(n+1)w_n = s_{n+1}$: Denn aus jedem Wurzelbaum mit n+1 Knoten entsteht durch Weglassen der Wurzel ein Wurzelwald mit n Knoten. Korrigiert man jetzt noch die Numerierung, indem man dem (n+1)-ten Knoten die Nummer der weggelassenen Wurzel gibt, so wird aus der 1:1-Abbildung eine (n+1):1-Abbildung.
Daher ist $s(t) = te^{s(t)}$ oder $t = se^{-s}$.
Aus (1.3) folgt also

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n$$

und somit $b_n = n^{n-1}$.

Ein anderer Problemkreis, bei dem die Lagrange'sche Inversionsformel nützlich, wenn auch nicht notwendig ist, sind die Catalanzahlen. Bei den meisten kombinatorischen Fragestellungen, bei denen die Catalanzahlen C_n auftauchen, z.B. Anzahl der Triangulierungen eines (n+2)-Ecks, Anzahl der binären Bäume mit n Stellen, Anzahl der verschiedenen Klammerungen eines Produktes von n+1 Faktoren, Anzahl der Wege im $\mathbb{R}^2$, die (0,0) mit (2n,0) verbinden und oberhalb der x-Achse verlaufen, usw. erhält man durch eine einfache Überlegung die Rekursionsformel

(2.1) $$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1$$

Um die C_n explizit zu berechnen, betrachtet man die erzeugende Funktion

(2.2) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Aus (2.1) folgt dann

(2.3) $$\frac{f(x)-1}{x} = f(x)^2$$

Daraus kann man analog zum vorigen Beispiel die Koeffizienten C_n berechnen. Dazu setzen wir z.B. $f(x) = 1 + y(x)$, sodaß (2.3) zu

(2.4) $$y = x(1+y)^2 \quad \text{oder} \quad x = y(1+y)^{-2}$$

wird. In (2.2) eingesetzt ergibt das

(2.5) $$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{y^n}{(1+y)^{2n}},$$

woraus mittels (I)

$$C_n = \frac{1}{n}(1+y)^{2n}\Big|_{y^{n-1}} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \text{ folgt.}$$

Hätten wir $z = xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}x^n$ gesetzt, so erhielten wir aus (2.3)

$$z-x = z^2 \quad \text{oder} \quad x = z(1-z),$$

also die zu (2.5) analoge Entwicklung

(2.6) $$z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}\, z^n(1-z)^n,$$

woraus genauso $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ folgt.

3) Die mehrdimensionale Verallgemeinerung von Jacobi-Good

Wir verwenden die übliche Multiindexschreibweise. Eine f.P.R. in den s Variablen $x = (x_1,\dots,x_s)$ ist eine Reihe

$$f(x) = f(x_1,\dots,x_s) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = \sum_{k_i\geq 0} a_{k_1,\dots,k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$$

Eine formale Laurentreihe sei eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{k\geq n} a_k x^k = \sum_{k_i\geq n_i} a_{k_1\dots k_s} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s}$$

für einen Multiindex $n \in \mathbb{Z}^s$.

Wir betrachten jetzt ein System $g = (g_i)_{1\leq i\leq s}$ von f.P.R. in der s-dimensionalen Variablen x, das der Einfachheit halber von der Form

$$(3.1) \qquad g_i(x) = \frac{x_i}{\omega_i(x)}$$

ist, wobei $\omega_i(x)$ eine f.P.R. mit $\omega_i(0) \neq 0$ ist. (Es würde genügen, daß die Jacobische von g im Nullpunkt eine Diagonalmatrix ist. Man müßte nur die f.L.R. etwas allgemeiner definieren, damit die folgenden Überlegungen sinnvoll bleiben.) Man kann zu (1.1) analoge Entwicklungen betrachten:

$$f(x) = f(o) + \sum_{k>0} c_k\, g(x)^k = f(o) + \sum c_{k_1\dots k_s}\, g_1(x)^{k_1} \dots g_s(x)^{k_s}$$

Dann gilt das folgende mehrdimensionale Analogon der zweiten Version der Lagrangeformel (von der 1. Version sind nur äußerst komplizierte Verallgemeinerungen bekannt):

$$(3.2) \quad c_n = f(x)\,.\,\det\frac{\partial g}{\partial x}\,.\,g(x)^{-n-\underline{1}}\Big|_{x^{-\underline{1}}} = f(x)\,.\,\det\frac{\partial g}{\partial x}\,.\,\omega(x)^{n+\underline{1}}\Big|_{x^n}$$

Dabei ist $\underline{1} = (1,1,\dots,1)$.
Im Vergleich mit (II) wird also nur $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante des Systems g ersetzt.

Der folgende Beweis stammt von J. Cigler.
Offensichtlich war der entscheidende Schritt im eindimensionalen Fall das Lemma 1. Wir müssen jetzt also zeigen:

<u>Lemma 2</u>: Sei g wie in (3.1). Dann ist

$$\det \frac{\partial g}{\partial x} \cdot g(x)^{-n-\underline{1}}\Big|_{x^{-\underline{1}}} = \delta_{n,o}$$

Die Relation (1.2) ist äquivalent mit

(3.3) $f(g(x))g'(x)\big|_{x^{-1}} = f(x)\big|_{x^{-1}}$ für beliebige f.L.R. $f(x)$.

Das erinnert an die Substitutionsformel für Integrale. Der Zusammenhang damit wird klar, wenn man den Koeffizienten von x^{-1}, also das Residuum, durch das bekannte Kurvenintegral darstellt. Das legt auch nahe, daß im Mehrdimensionalen $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante ersetzt wird. Um diesen Zusammenhang besser hervorzuheben, erweist sich eine neue Notation als zweckmäßig:
Statt $f(x)\big|_{x^{-1}}$ schreiben wir $M(f(x)dx)$. Das lineare Funktional M entspricht also dem Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$. Die Integralschreibweise wollen wir aber im Hinblick auf unsere formalen Potenzreihen vermeiden.

(3.4) $M(f(x)dx) = M(f(x_1,\dots,x_s)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_s) := f(x)\big|_{x^{-\underline{1}}}$

Genaugenommen wählen wir M also als lineares Funktional auf den alternierenden Differentialformen von Dimension und Grad s (die wir hier allerdings als Modul über den f.L.R. statt den C^{∞}-Funktionen auffassen).

Für eine f.L.R. $g(x)$ sei

$$dg := \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j$$

Daraus folgt

$$(3.5)\quad dg_1 \wedge dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_s = (\sum_j \frac{\partial g_1}{\partial x_j} dx_j) \wedge \ldots \wedge (\sum_j \frac{\partial g_s}{\partial x_j} dx_j) = $$
$$= \det (\frac{\partial g_i}{\partial x_j}) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_s$$

Wir zeigen zunächst für beliebige f.L.R. $g_1, \ldots, g_s$

$$(3.6)\qquad M(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_s) = 0.$$

Da alles linear ist, brauchen wir nur den Fall

$$g_i(x) = x^{k_i} = x_1^{k_{i1}} x_2^{k_{i2}} \ldots x_s^{k_{is}}$$

betrachten. Dann ist $\partial g_i(x)/\partial x_j = k_{ij}\, x^{k_i}/x_j$ und

$$\det \frac{\partial g}{\partial x} = x^{k_1+\ldots+k_s} \det (\frac{k_{ij}}{x_j}) = x^{k_1+\ldots+k_s-1} \det(k_{ij}).$$

Ist $k_1+\ldots+k_s = 0$, dann verschwindet auch $\det (k_{ij})$, weil die Zeilensumme = 0 ist. Damit ist (3.6) gezeigt.

Weiters gilt für beliebige $g_1, \ldots g_s$

$$(3.7)\qquad M(\frac{dx_1}{x_k} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_k}{x_k} \wedge dg_{k+1} \wedge \ldots \wedge dg_s) = 0 \text{ für } k < s$$

Dieser Ausdruck ist nämlich laut Def. gleich
$M(\frac{1}{x_1 \ldots x_k} \cdot D(x) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_s)$ mit $D(x) = \det (\partial g_i/\partial x_j)_{k<i,\, j\leq s}$
und diese Determinante hat wegen (3.6) keinen $\frac{1}{x_{k+1} \ldots x_s}$ - Term.

Sind jetzt $g_1, \ldots, g_k$ von der speziellen Form (3.1), die weiteren $g_{k+1}, \ldots, g_s$ jedoch noch beliebige f.L.R., so gilt auch

$$(3.8)\qquad M(\frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_k}{g_k} \wedge dg_{k+1} \wedge \ldots \wedge dg_s) = 0 \quad \text{für} \quad k < s$$

Das folgt wegen

$$\frac{dg_i}{g_i} = \frac{dx_i}{x_i} - d(\log \varphi_i) \quad \text{für} \quad i \leq k \tag{3.9}$$

durch Induktion nach k aus (3.7).

Für $k = s$ gilt jedoch, falls jetzt alle g_i (3.1) erfüllen,

$$M\left(\frac{dg_1}{g_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dg_s}{g_s}\right) = 1. \tag{3.10}$$

Das zeigt man ebenfalls mit (3.9). Damit ist der Fall $n = 0$ im Lemma 2 erledigt.

Sei jetzt $n \neq 0$. Für jedes i mit $n_i \neq 0$ ist dann

$$g_i^{-n_i - 1} \, dg_i = - \frac{1}{n_i} \, dg_i^{-n_i}$$

Die Behauptung $M(g^{-n-1} \, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_s) = 0$ reduziert sich daher auf den Typ (3.8). Damit ist das Lemma 2 vollständig gezeigt, und analog zum eindimensionalen Fall folgt die Formel von Lagrange-Good (3.2).

Als typische Anwendung wollen wir daraus das Master-Theorem von Mac Mahon [29] herleiten:

<u>Master-Theorem</u>: Sei $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ eine beliebige Matrix und

$$D(x) = \det\,(\delta_{ij} - a_{ij} x_j).$$

Dann ist der Koeffizient von x^n in $\frac{1}{D(x)}$ gleich dem Koeffizienten von $x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s}$ in $(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s)^{n_1} \ldots (a_{s1}x_1 + \ldots + a_{ss}x_s)^{n_s}$.

<u>Beweis</u>: Wir wählen $\varphi_i(x) = 1 + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j$ und $f(x) = \frac{1}{D(g(x))}$

Dann ist $\partial \varphi_i / \partial x_j = a_{ij}$ und $\partial g_i / \partial x_j = (\delta_{ij} - a_{ij} g_i) \varphi_i^{-1}$. Außerdem gilt

$$\det\,(\delta_{ij} - a_{ij} x_i) = x_1 \ldots x_s \det\left(\frac{\delta_{ij}}{x_i} - a_{ij}\right) = x_1 \ldots x_s \det\left(\frac{\delta_{ij}}{x_j} - a_{ij}\right) =$$
$$= \det\,(\delta_{ij} - a_{ij} x_j)$$

Anwendung von (3.2) ergibt daher, daß der Koeffizient c_n von $g(x)^n$ in $\frac{1}{D(g(x))}$

$$c_n = \prod_i (1 + \sum_j a_{ij}x_j)^{n_i}\Big|_{x^n} = \prod_i (\sum_j a_{ij}x_j)^{n_i}\Big|_{x^n}$$

ist.

Formel (3.2) wird meistens nach Good [19] benannt. Sie war aber bereits Jacobi [23] bekannt. Weitere Beweise findet man in [5,20,24,34].

4) Inverse Relationen

Das einfachste Paar inverser Relationen ist wohlbekannt:

(4.1) $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

An die 60 weitere derartige Relationen findet man, in verschiedene Gruppen klassifiziert, bei Riordan [31], der ein Drittel seines Buches diesem Themenkreis widmet. Er gibt aber jedesmal ad hoc-Beweise und entwickelt keine gemeinsam zugrundeliegende Theorie. Offensichtlich besagt ein solches Paar inverser Relationen

(4.2) $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} a_k,$$

daß die beiden unendlichen Dreiecksmatrizen (α_{nk}) und (β_{nk}) zueinander invers sind:

(4.3) $$\sum_k \alpha_{nk}\beta_{km} = \delta_{nm} = \sum \beta_{nk}\alpha_{km}$$

Egoritschew [10] hat nun folgenden Ansatz zur Erzeugung inverser Relationen untersucht:

Seien $g(x), h(x)$ f.P.R. der Ordnung 1 und $f(x)$ eine f.P.R. der Ordnung 0, also mit $f(o)\neq 0$. Dann erhält man ein Paar inverser Relationen auf folgende Weise:

$$(4.4) \quad f(x)g(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{nk}\, h(x)^n \Leftrightarrow f(x)^{-1}\, h(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_{nk}\, g(x)^n$$

Die Koeffizienten α_{nk}, β_{nk} dieser Entwicklungen lassen sich natürlich mittels der Lagrangeformel (II) sofort angeben:

$$(4.5) \qquad \alpha_{nk} = M\Big(\frac{f(x)g(x)^k h'(x)}{h(x)^{n+1}}\, dx\Big)$$

$$\beta_{nk} = M\Big(\frac{h(x)^k\, g'(x)}{f(x)g(x)^{n+1}}\, dx\Big)$$

Egoritschew hat dann festgestellt, daß die meisten bekannten inversen Relationen, insbesondere <u>alle</u> in Riordan [31] enthaltenen, unter dieses einfache Schema fallen.

<u>Beispiele</u>:

1) $\alpha_{nk} = \binom{n+p}{k+p}$ (siehe [31], Tafel 2.1.4)

$$\alpha_{nk} = \binom{n+p}{k+p} = M\Big(\frac{(1+x)^{n+p}}{x^{n-k+1}}\, dx\Big)$$

Entsprechend (4.5) wählen wir $h(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = x$, und wegen $h'(x) = (1+x)^{-2}$ schließlich $f(x) = (1+x)^{p+1}$

$$\Rightarrow \beta_{nk} = M\Big(\frac{(1+x)^{-k-p-1}}{x^{n+1-k}}\, dx\Big) = \binom{-k-p-1}{n-k} = (-1)^{n-k}\binom{n+p}{n-k}$$

2) $\alpha_{nk} = \binom{p+qk-k}{n-k}$ ([31], Tafel 2.2.1)

$$\alpha_{nk} = M\Big(\frac{(1+x)^{p+qk-k}}{x^{n-k+1}}\, dx\Big)$$

$\Rightarrow$ Wählen $g(x) = x(1+x)^{q-1}$, $h(x) = x$, $f(x) = (1+x)^p$

$$\Rightarrow \beta_{nk} = M\Big(\frac{(1+x)^{q-1} + x(q-1)(1+x)^{q-2}}{(1+x)^p (1+x)^{(q-1)(n+1)} x^{n-k+1}}\, dx\Big) =$$

$$= M\Big(\frac{(1+x)^{-n(q-1)-p-1}(1+qx)}{x^{n-k+1}}\, dx\Big) =$$

$$= \binom{-1-p-n(q-1)}{n-k} + q\binom{-1-p-n(q-1)}{n-k-1} =$$

$$= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k} + (-1)^{n-k-1}\, q\binom{p+nq-k-1}{n-k-1} =$$

$$= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k}\frac{p+kq-k}{p+nq-k}$$

3) $a_n = \Sigma \binom{n}{k} b_{n-ck}$ ([31], Tafel 2.4.1)

$$\alpha_{n,n-ck} = \binom{n}{k} = M\Big(\frac{(1+x^c)^n}{x^{ck+1}}\, dx\Big)$$

$$\Rightarrow g(x) = x,\ h(x) = \frac{x}{1+x^c},\ h'(x) = \frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^2}$$

$$f(x) = \frac{1+x^c}{1+x^c-cx^c}$$

$$\Rightarrow \beta_{n,n-ck} = M\Big(\frac{g'}{f.g}\Big(\frac{h}{g}\Big)^n \frac{dx}{h^{ck}}\Big) = M\Big(\frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^{n+1-ck}}\,\frac{dx}{x^{1+ck}}\Big) =$$

$$= \binom{ck-n}{k} - c\binom{ck-n-1}{k-1} = (-1)^k\binom{n-ck+k-1}{k} - c(-1)^{k-1}\binom{n-ck+k-1}{k-1} =$$

$$= (-1)^k \frac{n}{k}\binom{n-ck+k-1}{k-1}$$

Ein Spezialfall, bzw. bloß eine andere Schreibweise für inverse Relationen, ist die "umbrale Inversion" von Polynomen. Nehmen wir z.B. die Gegenbauerpolynome $C_n^\lambda(x)$, die durch die erzeugende Funktion

(4.6) $$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda}$$

definiert sind.

Daraus lassen sich die C_n^λ bekanntlich leicht berechnen:

$$(4.7) \qquad C_n^\lambda(x) = \sum_{n=0}^{[n/2]} (-1)^k \, \lambda^{(n-k)} \frac{(2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}$$

Wir wollen nun umgekehrt x^n nach den $C_k^\lambda(x)$ entwickelr

Dazu schreiben wir (4.6) in der Form

$$(1+t^2)^\lambda \quad \Sigma\, C_k^\lambda(x) t^k = \left(1 - \frac{2tx}{1+t^2}\right)^{-\lambda} = \Sigma \frac{(\lambda)^{(n)}}{n!} (2x)^n \frac{t^n}{(1+t^2)^n}$$

Diese Gleichung kann man als Entwicklung der Funktion auf der linken Seite nach Potenzen von $\frac{t}{1+t^2}$ interpretieren. Für die Koeffizienten muß daher nach (II) gelten:

$$\frac{(\lambda)^{(n)}}{n!} (2x)^n = (1+t^2)^\lambda . \Sigma\, C_k^\lambda(x) t^k . (1+t^2)^{n+1} \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}\Big|_{t^n} =$$

$$= \Sigma\, C_k^\lambda(x) t^k . (1+t^2)^{\lambda+n-1} (1-t^2)\Big|_{t^n} =$$

$$= \Sigma\, C_{n-2k}^{\lambda}(x) \left[\binom{n+\lambda-1}{k} - \binom{n+\lambda-1}{k-1} \right] =$$

$$= \sum_k C_{n-2k}^{\lambda}(x) \binom{n+\lambda-1}{k} \frac{n+\lambda-2k}{n+\lambda-k}$$

$$(4.8) \qquad \Rightarrow x^n = 2^{-n} n! \sum_k \frac{n+\lambda-2k}{k!\,(\lambda)^{(n+1-k)}} C_{n-2k}^\lambda(x)$$

Ein einfacheres Beispiel sind die Laguerrepolynome

$$(4.9) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} (-x)^k$$

mit der erzeugenden Funktion

$$(4.10) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n = (1-t)^{-1-\alpha} e^{\frac{tx}{t-1}} .$$

Man könnte hier ganz analog vorgehen. Diese Rechnung haben wir i.w. aber schon durchgeführt: Ein Blick auf Beispiel 1 zeigt sofort

(4.11) $$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} L_k^{(\alpha)}(x)$$

Auf dieselbe Weise lassen sich die meisten Inversionen der bekannten speziellen Polynome herleiten.

5) Folgen von Binomialtyp

Betrachten wir für eine f.P.R. $g(z) = z/\varphi(z)$ mit $\varphi(z) \neq 0$ die Entwicklung

(5.1) $$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} g(z)^n$$

Dann ist offensichtlich $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n in x und $p_n(o) = \delta_{no}$. Aus $e^{(x+y)z} = e^{xz}.e^{yz}$ folgt

(5.2) $$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

d.h. (p_n) ist eine Folge von Binomialtyp (siehe [33]).

Bezeichnen wir mit D den Differentiationsoperator nach x und wenden diesen auf (5.1) an, so folgt

$$ze^{xz} = \sum \frac{Dp_n(x)}{n!} g(z)^n$$

und durch Iteration erhält man

$$g(z)e^{xz} = \sum \frac{g(D)p_n(x)}{n!} g(z)^n.$$

Nach Division durch $g(z)$ erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (5.1)

(5.3) $$g(D)p_n(x) = np_{n-1}(x)$$

Außerdem sieht man leicht, daß diese Relation gemeinsam mit den Anfangswerten $p_n(0) = \delta_{no}$ die Polynome $p_n(x)$ charakterisiert.

<u>Beispiel</u>: Für $g(z) = ze^{-az}$ haben wir in (1.4) als Koeffizienten die Abelpolynome $A_n^{(a)}(x) = x(x+an)^{n-1}$ erhalten.
Diese erfüllen daher (5.2) und (5.3) besagt

$$De^{-aD}\, A_n^{(a)}(x) = D\, A_n^{(a)}(x-a) = n\, A_{n-1}^{(a)}(x)$$

Aus der Entwicklung (5.1) erhält man durch Anwendung der Lagrangeformeln:

$$\text{(I)} \Rightarrow \quad \frac{p_n(x)}{n!} = \frac{1}{n}\, xe^{xt}\, \varphi(t)^n\Big|_{t^{n-1}} = \frac{x.\varphi(D)^n\, x^{n-1}}{n!},$$

da $a(D)\frac{x^n}{n!} = a(t)e^{xt}\Big|_{t^n}$ für beliebige f.P.R. $a(t)$.

$$(5.4) \qquad p_n(x) = x.\varphi(D)^n\, x^{n-1}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \quad p_n(x) = n!\; e^{xt} g'(t)\varphi(t)^{n+1}\Big|_{t^n}, \text{ also}$$

$$(5.5) \qquad p_n(x) = g'(D)\varphi(D)^{n+1}\, x^n$$

Diese beiden wichtigen Formeln (5.4) und (5.5), die "closed forms" aus ([33] p. 695), sind also unmittelbare Folgerungen aus der Lagrange'schen Inversionsformel.
Umgekehrt läßt sich aus ihnen (I) und (II) herleiten (siehe [5,13, 32]):
Dazu faßt man die Entwicklung (1.1) als linearen Operator auf dem Raum der Polynome auf:

$$f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g(D)^k$$

Wendet man diesen Operator auf die Polynome $p_n(x)$ an, so gilt wegen (5.3)

$$Lf(D)p_n = \Sigma\, c_k\, Lg(D)^k p_n = c_n \cdot n!,$$

wenn $Lp(x) = p(0)$ die Auswertung im Nullpunkt bezeichnet.
Setzt man nun für $p_n(x)$ (5.4) und (5.5) ein, erhält man

$$n!c_n = Lf(D)\; x.\varphi(D)^n\, x^{n-1} = Lf'(D)\varphi(D)^n x^{n-1} = (n-1)!f'(z)\varphi(z)^n\Big|_{z^{n-1}}$$

bzw.

$$n!c_n = Lf(D)g'(D)\varphi(D)^{n+1}x^n = n!f(z)g(z)\varphi(z)^{n+1}\Big|_{z^n}.$$

Dabei wurden nur die trivialen Formeln

$$f(D)x - xf(D) = f'(D) \qquad \text{und} \qquad Lf(D)x^n = n!f(z)\Big|_{z^n}$$

verwendet.

Die Folgen vom Binomialtyp lassen sich natürlich aufs Mehrdimensionale verallgemeinern und das entsprechende Analogon von (5.5) liefert dann die Lagrange- Good-Formel (3.2). Siehe dazu [5,20,24] und [2] für den Fall nichtkommutierender Variable.

Weitere Beispiele für Folgen von Binomialtyp sind die oberen und unteren Faktoriellen $(x)^{(n)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ und $(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, die Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}$ aus (4.9) für $\alpha = -1$ und die Gouldpolynome $G_n(x,b)$ aus (1.7).

Eine geringfügige Verallgemeinerung sind die Shefferpolynome. Sie entstehen als Koeffizienten in einer Entwicklung

$$f(z)e^{xz} = \Sigma\, \frac{s_n(x)}{n!}\, g(z)^n \tag{5.6}$$

und haben ganz ähnliche Eigenschaften wie die $p_n(x)$.

Die wichtigsten Beispiele sind die Hermitepolynome und Laguerre-polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ (für jedes α).

Mit der Lagrange'schen Inversionsformel läßt sich (5.6) verallgemeinern zu

$$(5.7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x+ny)}{n!} (g(z)e^{-yz})^n = f(z)e^{xz} \left(1-y\frac{g(z)}{g'(z)}\right)^{-1}$$

Zum Beweis braucht man bloß in (II) einsetzen und erhält als Koeffizienten

$$\frac{e^{(x+yn)z}\, f(z)\, g'(z)}{g(z)^{n+1}}\bigg|_{z^n}.$$

(II) auf (5.6) angewendet zeigt dann, daß dieser Ausdruck gleich $s_n(x+ny)/n!$ ist.

Seien jetzt $s_n(x)$ durch (5.6) gegeben und eine Folge $p_n(x)$ vom Binomialtyp durch $\Sigma\, p_n(x)/n!\, h(z)^n = e^{xz}$. Wenn wir nun die $p_n(x)$ nach den $s_k(x)$ entwickeln und umgekehrt, erhalten wir ein Paar inverser Relationen:

$$(5.8)\qquad \frac{p_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} \frac{s_k(x)}{k!} \quad \text{und} \quad \frac{s_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} \frac{p_k(x)}{k!}$$

Rota [33] hat mit diesem Ansatz einen eleganteren und einheitlicheren Zugang zu Riordan's inversen Relationen von Gould- und Abel-typ gefunden. Wegen

$$e^{xz} = \Sigma \frac{p_n(x)}{n!} h(z)^n = \sum_k \frac{s_k(x)}{k!} \sum_n \alpha_{nk}\, h(z)^n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich mit (5.6)

$$f(z)^{-1} g(z)^k = \sum_n \alpha_{nk}\, h(z)^n$$

und analog

$$f(z)\ \ h(z)^k = \Sigma\, \beta_{nk}\, g(z)^n.$$

Die inversen Relationen (5.8), die als Zusammenhangskoeffizienten zwischen zwei Shefferpolynomen auftreten, sind also dieselben, die man mit Egoritschews Methode erhält. Insbesondere lassen sich daher alle inversen Relationen von Riordan aus den umbralen Kalkül herleiten (obwohl das in [33], Problem 1 für die Legendre- und Chebyshev-Typen bestritten wird.).

6) Garsia's q-Analogon

L. Carlitz [3] gab 1973 folgendes schöne q-Analogon der Lagrangeformeln im Spezialfall $\varphi(z) = 1-z$ an:

$$(6.1) \qquad f(z) = \Sigma\, c_n \frac{z^n}{(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-1}z)}$$

$$(6.2) \text{ mit} \qquad c_n = \frac{1}{[n]} f'(z)(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-1}z)\Big|_{z^{n-1}} = f(z)(1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-2}z)\Big|_{z^n}$$

($f'(z)$ bezeichnet dabei die q-Ableitung; siehe [8] für die Notation).

Dieses überaus schöne Beispiel war der Anlaß für eine intensive Suche nach einem q-Analogon der Lagrange'schen Inversionsformel. Heute kennt man zwei verschiedenartige Theorien, die außer Carlitz's Beispiel wenig Gemeinsames haben. Der naheliegende und zunächst (von Andrews [1], Gessel [16], Garsia und Joni [12,14]) untersuchte Ansatz in der Form

$$(6.3) \qquad f(z) = \Sigma\, c_k g(z)g(qz)\ldots g(q^{k-1}z)$$

ist in formaler Hinsicht äußerst befriedigend, die meisten interessanten Dinge in dieser Theorie haben im klassischen Fall $q = 1$ aber kein Gegenstück.
Die andere Richtung (siehe [7,18,20,22,25]) leistet wahrscheinlich eher das, was man sich anfangs erhofft hat:
neue q-Analoga für die Dinge zu liefern, die man mit der klassischen Lagrangeformel behandeln kann, etwa q-Analoga der inversen Relationen, Zusammenhänge mit den bekannten q-Analoga der speziellen Polynome, etc.

Wenden wir uns zunächst dem Ansatz (6.3) zu. Diese Form der "q-Potenzen" von $g(z)$ hat folgende erstaunliche Eigenschaft:

Satz: Es gibt zu jeder f.P.R. $g(z)$ (der Ordnung 1) eine f.P.R. $G(z)$, so daß gilt:

$$(6.4)\quad \Sigma\, a_k z^k = \Sigma\, b_k g(z)g(qz)\ \ldots\ g(q^{n-1}z)$$
$$\Leftrightarrow \Sigma\, a_k G(z)G(z/q)\ \ldots\ G(z/q^{k-1}) = \Sigma\, b_k z^k$$

$G(z)$ nennen wir die q-Inverse von $g(z)$; g ist dann die $\frac{1}{q}$-Inverse von G.

Beweis: Sei $z = \sum\limits_{n\geq 1} G_n g(z)g(qz)\ \ldots\ g(q^{n-1}z) \Rightarrow G(z) := \sum\limits_{n\geq 1} G_n z^n$

$$\Rightarrow \qquad z^2 = \Sigma\ G_k g(z)g(qz)\ \ldots\ g(q^{k-1}z)q^{-k}.q^k z$$
$$= \Sigma q^{-k} G_k g(z)\ \ldots\ g(q^{k-1}z).\Sigma\ G_l g(q^k z)\ldots g(q^{k+l-1}z)$$
$$= \sum_n (\sum_k q^{-k}\ G_k\ G_{n-k})\ g(z)\ \ldots\ g(q^{n-1}z)$$

und
$$\sum_k (\Sigma\ q^{-k}\ G_k\ G_{n-k})z^n = \Sigma\ q^{-k} G_k z^k\ .\ \Sigma\ G_l z^l = G(z).G(z/q)$$

usw.

Um für die Entwicklung (6.3) eine Lagrangeformel zu finden, brauchen wir eine entsprechende Verallgemeinerung von Lemma 1.

Lemma 3: Es gibt (genau) eine f.P.R. $g^o(z)$, so daß

$$(6.5)\qquad M\left(\frac{g^o(z)dz}{g(z)g(z/q)\ldots g(z/q^n)}\right) = \delta_{no}$$

Dieses $g^o(z)$ muß also ein q-Analogon der Ableitung $g'(z)$ sein, es ist aber nicht die übliche q-Ableitung. Wir werden zwar einige Formeln für dieses $g^o(z)$ herleiten, konkret ausrechnen läßt es sich aber anscheinend nur in Carlitz's Beispiel.

<u>Beweis</u>: Schreiben wir $g(z) = z/\varphi(z)$, so wird (6.5) zu

$$(6.6) \quad g^o(z)\varphi(z)\varphi(z/q)\ldots\varphi(z/q^n)\Big|_{z^n} = \delta_{no}$$

Setzt man jetzt $g^o(z) = \gamma_o + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots$ unbestimmt an, dann kann man daraus sukzessive die γ_n berechnen.

Kehren wir jetzt zur Entwicklung (6.3) zurück. Wir dividieren durch $g(z)\ldots g(q^n z)$ und ersetzen z durch z/q^n:

$$\Rightarrow \frac{f(z/q^n)}{g(z)g(z/q)..g(z/q^n)} = \frac{c_o}{g(z)..g(z/q^n)} + \frac{c_1}{g(z)..g(z/q^{n-1})} + \ldots$$

$$\ldots \frac{c_n}{g(z)} + c_{n+1} + c_{n+2}g(qz) + \ldots$$

Durch Multiplikation mit $g^o(z)$ folgt aus Lemma 3

$$(6.7) \quad c_n = M\Big(\frac{f(z/q^n)g^o(z)dz}{g(z)g(z/q)..g(z/q^n)}\Big) = q^n M\Big(\frac{f(z)g^o(q^n z)dz}{g(z)g(qz)\ldots g(q^n z)}\Big)$$

oder

$$(6.8) \quad c_n = q^{-\binom{n}{2}} f(z)g^o(q^n z)\varphi(z)\ldots\varphi(q^n z)\Big|_{z^n}$$

Das ist Garsia's q-Analogon der 2.Version der Lagrange'schen Inversionsformel. Andrews [1] hat ein q-Analogon der 1.Version angegeben, das allerdings viel komplizierter ist, er stellt c_n nämlich als $(n+1)\times(n+1)$-Determinante dar.

Wir wollen noch zwei Formeln für $g^o(z)$ herleiten:

Für $q = 1$ gilt für die Koeffizienten γ_n von $g^o(z) = \Sigma\gamma_n z^n$

$$\gamma_n = g'(z)\Big|_{z^n} = M\Big(\frac{g'(z)dz}{z^{n+1}}\Big) = M\Big(\frac{dz}{G(z)^{n+1}}\Big)$$

nach der Substitutionsformel (3.3), wenn $G(z)$ die zu $g(z)$ inverse Potenzreihe ist. Dafür lautet das q-Analogon:

$$(6.9) \qquad \gamma_n = M\Big(\frac{dz}{G(z)G(z/q)..G(z/q^n)}\Big)$$

Beweis: Ein Blick auf (6.4) zeigt, daß wir den Koeffizienten b_n jetzt auf zwei Arten berechnen können. Das ergibt für beliebige b_n die Gleichung

$$(6.10) \quad q^n M\left(\frac{g^o(q^n z)\Sigma a_k z^k}{g(z)\ldots g(q^n z)}dz\right) = M\left(\frac{\Sigma a_k G(z)\ldots G(z/q^{k-1})}{z^{n+1}}dz\right),$$

ein q-Analogon der Substitutionsformel (3.3).

Setzen wir jetzt $\Sigma a_k z^k = g(z)..g(q^n z)z^{-n-1}$, so folgt wegen (6.4)

$$g(z) \ldots g(q^n z) = \Sigma a_k z^{k+n+1}$$

$$\Rightarrow \quad z^{n+1} = \Sigma a_k G(z)\ldots G(z/q^{k+n})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z^{n+1} q^{(n+1)^2}}{G(qz)\ldots G(q^{n+1}z)} = \Sigma a_k G(z)G(z/q)\ldots G(z/q^{k-1})$$

In (6.10) eingesetzt erhalten wir

$$q^n M\left(\frac{g^o(q^n z)}{z^{n+1}}dz\right) = q^{(n+1)^2} M\left(\frac{dz}{G(qz)\ldots G(q^{n+1}z)}\right),$$

also $\gamma_n = M\left(\frac{dz}{G(z)G(z/q)..G(z/q^n)}\right)$

Für die zweite Formel brauchen wir noch etwas Notation, nämlich Garsia's "roofing" und "starring":

Für f.P.R. $f(z) = \Sigma a_k z^k$ sei

$$\hat{f}(z) = \Sigma a_k q^{-\binom{k}{2}} z^k$$

und, falls $a_o = 1$, $f^*(z) = f(z)f(qz)f(q^2 z)\ldots$

Dieses unendliche Produkt konvergiert für $|q| < 1$ oder formal, wenn man $f^*(z)$ als f.P.R. mit rationalen Funktionen in q als Koeffizienten auffaßt.

Dieses $f^*(z)$ ist auch die einzige f.P.R. mit $f^*(o) = 1$ und

$$f^*(qz) = f(z)f^*(z).$$

Es gilt dann für $g(z) = z/\varphi(z)$ und $\varphi(o) = 1$

(6.11) $$g^o(z) = \varphi^*(qz) \cdot \left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z/q)}\right)^\wedge$$

<u>Beweis</u>: Setzen wir $g^o(z) = \varphi^*(qz).\psi(z)$ an. Dann wird (6.6) zu

$$\varphi^*(z/q^n)\psi(z)\Big|_{z^n} = \delta_{no}.$$

Durch Einsetzen von $\varphi^*(z) = \Sigma\varphi_n z^n$ und $\psi(z) = \Sigma\psi_n z^n$ sieht man erstaunt ein, daß diese Gleichung äquivalent ist mit

$$\hat{\varphi}^*(z/q) \cdot \psi(z)\Big|_{z^n} = \delta_{no},$$

woraus schließlich $\hat{\varphi}^*(z/q) . \psi(z) = 1$ folgt.

In [12] findet man noch eine Fülle solcher eigenartiger Identitäten mit * und $\hat{}$, die wahrscheinlich das Reizvollste an dieser Theorie sind, für $q = 1$ aber ihren Sinn verlieren.

Leider kann man all diese Formeln für $g^o(z)$ anscheinend nur in einem Fall konkret verwerten, nämlich für $\varphi(z) = 1 - z$, also Carlitz's Beispiel:

Es ist dann

$$\varphi^*(z) = \prod_{i=o}^{\infty}(1-q^i z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-z)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(1-q^2)..(1-q^n)},$$

daher

$$\hat{\varphi}^*(z) = \Sigma \frac{(-z)^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}, \quad \frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)} = \Sigma \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}$$

$$\left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)}\right)^\wedge = \Sigma \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)} = \prod_{i=o}^{\infty}(1-q^i z)^{-1} = \frac{1}{\varphi^*(z)}$$

$$\Rightarrow g^o(z) = \varphi^*(qz) . \varphi^*(z/q)^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1-z/q)},$$

sodaß (6.8) in diesem Fall wirklich (6.2) liefert.

Man kann auch ein q-Analogon der Folgen von Binomialtyp studieren: Ausgehend von

$$e^{xz} = \Sigma \frac{p_n(x)}{n!} g(z)g(qz) \ldots g(q^{n-1}z)$$

lassen sich genauso wie in Kap. 5 die folgenden Formeln herleiten:

$$p_n(x+y) = \Sigma \binom{n}{k} p_n(x) \; p_{n-k}(y/q^k)$$

$\epsilon\, g(D)p_n = n\, p_{n-1}$, wobei D der gewöhnliche Differentiationsoperator und $\epsilon f(x) = f(qx)$ ist,

$$p_n(x) = q^{-\binom{n}{2}} g^o(q^nD) \; \varphi(D) \ldots \varphi(q^nD)x^{n-1}$$

7) Ein allgemeiner Ansatz, weitere q-Analoga.

Wir wollen uns jetzt mit allgemeineren Entwicklungen

(7.1) $$f(z) = \sum_k c_k g_k(z)$$

beschäftigen, wo $g_k(z)$ eine f.L.R der Ordnung k ist, und versuchen, hier die Koeffizienten c_k zu berechnen.
Dazu müßte man f.L.R $G_n(z)$ der Ordnung -n finden, sodaß etwa

(7.2) $L\, g_k(z)\, G_n(z) = \delta_{nk}$ für alle ganzen Zahlen n,k gilt.

Dabei sei L das lineare Funktional $L\, f(z) = f(z)|_{z^o} = M(\frac{f(z)}{z}\, dz)$.
Dann würde für den Koeffizienten c_n aus (7.1) nämlich gelten:

(7.3) $$c_n = L\, f(z)\, G_n(z)$$

Für $g_k(z) = g(z)^k$ beispielsweise ist wegen Lemma 1

(7.4) $$G_n(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)^{n+1}}$$

Es stellt sich daher das Problem, ob man die $G_n(z)$ auch für allgemeinere $g_k(z)$ explizit angeben kann. Mit der folgenden Methode gelingt das in einigen wichtigen Fällen.

Nehmen wir an, daß unsere Folge $g_n(z)$ die Eigenvektoren eines Operators sind, bzw. seien allgemeiner U,V zwei lineare Operatoren auf dem Raum der f.L.R. und es gelte für **irgendwelche** reellen Zahlen c_n:

(7.5) $\quad Ug_n = c_n \, Vg_n.$

$< a(z),b(z)> = L\, a(z)b(z)$ ist ein inneres Produkt auf den f.L.R.

Ist V bijektiv, dann gibt es eindeutig bestimmte f.L.R. $\tilde{g}_k(z)$ der Ordnung -k, die zu den $Vg_n(z)$ biorthogonal sind:

(7.6) $\quad < \tilde{g}_k, Vg_n > = \delta_{nk}$

$\Rightarrow < \tilde{g}_k, Ug_n > = c_n < \tilde{g}_k, Vg_n > = c_n \, \delta_{nk} = c_k \, \delta_{nk}.$

$\Rightarrow < U^* \tilde{g}_k, g_n > = c_k < V^* \tilde{g}_k, g_n >$

also:

(7.7) $\quad U^* \tilde{g}_k = c_k \, V^* \tilde{g}_k$ und

(7.8) $\quad G_k = V^* \tilde{g}_k$ erfüllt $< G_k, g_n > = \delta_{nk}.$

Die Methode besteht also darin, zunächst Hilfsfunktionen $\tilde{g}_k(z)$ zu berechnen, die ein ähnliches Eigenwertproblem wie die $g_n(z)$ (nur für die adjungierten Operatoren) erfüllen, und daraus kann man dann die gesuchten G_n finden.

<u>Beispiele für Operatoren</u>:

1) $\epsilon_q f(x) = f(qx) \Rightarrow \epsilon_q^* f(x) = f\left(\frac{x}{q}\right)$

2) Multiplikationsoperator $U f(x) = a(x)f(x)$: $U = U^*$

3) $U f(x) = x f'(x) \Rightarrow U^* f = -xf'(x)$

Jetzt können wir an Hand der klassischen Lagrangeformel zeigen, daß diese Methode überhaupt funktioniert:

Die Potenzen $g_n(z) = g(z)^n$ erfüllen bekanntlich

$$g_n'(z) = n g_n(z) \cdot \frac{g'(z)}{g(z)} .$$

Das ist eine Gleichung der Form (7.5), wenn wir z.B. $U = xD$, $V = xg'(x)/g(x)$ und $c_n = n$ wählen.
Die $\tilde{g}_k(x)$ erfüllen daher nach (7.7)

$$\tilde{g}_k'(x) = -k\,\tilde{g}_k(x)\,\frac{g'}{g} \quad \text{d.h.}$$

$$\tilde{g}_k(x) = g(x)^{-k} \quad \text{und}$$

$$G_k(x) = V^*\,\tilde{g}_k = x\,\frac{g'(x)}{g(x)^{k+1}}, \text{ also genau (7.4).}$$

Egoritschew's Ansatz für inverse Relationen läßt sich natürlich leicht auf diese allgemeine Situation übertragen: Betrachten wir neben (g_n) noch eine zweite Folge (h_n) mit

$$L\,h_n\,H_k = \delta_{nk}, \text{ dann ist}$$

$$\text{(7.9)}\quad \alpha_{nk} = L\,f(x)\,g_k(x)\,H_n(x) \qquad \beta_{nk} = L\,f(x)^{-1}\,h_k(x)\,G_n(x)$$

ein Paar inverser Relationen, wie man aus den beiden Entwicklungen

$$f(x)\,g_k(x) = \Sigma\,\alpha_{nk}\,h_n(x) \text{ und}$$

$$f(x)^{-1}\,h_k(x) = \Sigma\,\beta_{nk}\,g_n(x)$$

unmittelbar entnimmt.

Krattenthaler's q-Analogon

Seien φ_n, ψ_n zwei Folgen f.P.R. mit

$$\text{(7.10)}\quad \begin{aligned} \varphi_n' &= [n]\,\varphi_n(x)\varphi(x) \\ \psi_n' &= q^{-n}\,[n]\,\psi_n(qx)\cdot\psi(x) \end{aligned} \qquad \text{(' ist jetzt die q-Ableitung)}$$

und sei

$$\text{(7.11)}\quad g_n(x) = \frac{x^n}{\varphi_n(x)\psi_n(x)}$$

Für die Entwicklung (7.1) nach solchen "q-Potenzen" $g_n(x)$ konnte Krattenthaler [25,26] folgende q-Lagrangeformel zeigen:

$$(7.12)\quad c_n = \frac{1}{[n]} f'(x)\, \varphi_n(x)\psi_n(qx)\Big|_{x^{n-1}}$$

$$(7.13)\quad = f(x)\varphi_n(\tfrac{x}{q})\psi_n(qx)(1-\tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q}) - x\psi(x))\Big|_{x^n}$$

Zum Beweis schreiben wir (7.10) um in

$$\varphi_n(qx) = \varphi_n(x)\ (1+(q^n-1)x\varphi)$$

$$\psi_n(x) = \psi_n(qx)\ (1+(q^{-n}-1)\ x\,\psi\ ).$$

$$\Rightarrow \frac{g_n(qx)}{g_n(x)} = \frac{q^n + (1-q^n)\,x\psi}{1+(q^n-1)\,x\,\varphi} \Rightarrow$$

$$(7.14)\quad g_n(qx)(1-x\varphi) - x\psi g_n(x) = q^n\,[g_n(x)(1-x\psi) - x\varphi g_n(qx)]$$

Diese Glg. ist genau eine Eigenwertgleichung der Form (7.5).

Es folgt daher

$$\tilde g_n(\tfrac{x}{q})(1-\tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q})) - x\psi\tilde g_n(x) = q^n[\tilde g_n(x)(1-x\psi) - \tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q})\ \tilde g_n(\tfrac{x}{q})]$$

Aus dieser q-Differenzgleichung für $\tilde g_n(x)$ ergibt sich

$$\frac{\tilde g_n(\frac{x}{q})}{\tilde g_n(x)} = \frac{q^n + (1-q^n)x\psi(x)}{1+(q^n-1)\frac{x}{q}\varphi(\frac{x}{q})} = q^n\ \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(qx)}\ \frac{\varphi_n(x/q)}{\varphi_n(x)}$$

$$(7.15)\quad \Rightarrow \tilde g_n(x) = \frac{\varphi_n(x)\psi_n(qx)}{x^n}$$

Die zu $g_n(x)$ orthogonalen $G_n(x)$ errechnen sich nach (7.8)

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (1-x\psi)\ \tilde g_n(x) - \tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q})\ \tilde g_n(\tfrac{x}{q}) \\ &= x^{-n}\varphi_n(\tfrac{x}{q})\,\psi_n(qx)\{(1-x\psi)(1+(q^n-1)\tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q})) - \tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q})(q^n+(1-q^n)x\psi)\} \\ &= x^{-n}\varphi_n(\tfrac{x}{q})\,\psi_n(qx)(1-\tfrac{x}{q}\varphi(\tfrac{x}{q}) - x\psi(x)) \end{aligned}$$

Das liefert wegen $c_n = L f(x)\ G_n(x)$ das q-Analogon der 2. Version (7.13).

Die 1. Version erhält man aus der Beobachtung

$$g_n'(x) = \Big(\frac{x^n}{\psi_n(x)}\Big)' \frac{1}{\varphi_n(x)} + \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \Big(\frac{1}{\varphi_n(x)}\Big)' =$$

$$= \frac{[n]x^{n-1}}{\psi_n(x)} (1-x\,\psi) \frac{1}{\varphi_n(x)} - \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \frac{[n]\varphi}{\varphi_n(qx)}$$

$$= \frac{[n]}{x} \{g_n(x)(1-x\,\psi) - x\,\varphi\, g_n(qx)\} = \frac{[n]}{x} V g_n$$

Wegen (7.6) folgt daher

$$L\, g_n'(x) \frac{\tilde{g}_k(x)}{x} = [n]\, \delta_{nk}$$

und somit

$$c_n = \frac{1}{[n]} f'(x)\, \varphi_n(x)\, \psi_n(qx)\Big|_{x^{n-1}}.$$

Der ursprüngliche Beweis von Krattenthaler ist etwas eleganter: Er erhält die Orthogonalitätsrelationen direkt durch Ableiten des Quotienten g_k/g_n. Für einen weiteren Beweis mit Hilfe von Polynomen (analog zu Kap. 5) siehe [21].

Die Schwierigkeit bei diesem q-Analogon ist es, konkrete Beispiele für Folgen φ_n bzw. ψ_n mit (7.10) zu finden. Das derzeit allgemeinste bekannte Beispiel ist

$\varphi_n(x) = e_r((a[n]+b)x^r)/\, e_r(bx^r)$, wobei $e_r(x)$ die q^r-Exponentialfunktion ist (siehe [8], § 1.2). $\psi_n(x)$ erhält man daraus, indem man entweder n durch -n oder q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt. Für die Anwendungen reicht das aber vollkommen aus.

Die wichtigsten Spezialfälle von Krattenthaler's q-Lagrangeformel sind:

1) $\varphi_n(z) = (1-az)(1-qaz) \dots (1-q^{n-1}az) \qquad \psi_n \equiv 1$

Das ist wieder Carlitz's Beispiel (6.1). Wegen $\varphi_n'(z) = -[n]\varphi_n(z)\frac{a}{1-az}$ folgt aus (7.12) und (7.13) sofort (6.2).

Betrachtet man eine zu (5.1) analoge Entwicklung, erhält man als Koeffizienten die q-Laguerrepolynome (siehe [6,14]). Außerdem liefert es folgendes q-Analogon der inversen Relation (Kap 4,Bsp.1):

$$\alpha_{nk} = \begin{bmatrix} n+p \\ n+k \end{bmatrix} \qquad \beta_{nk} = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+p \\ n-k \end{bmatrix}$$

2) $\varphi_n(z) = e(a[n]z) \qquad \psi_n \equiv 1$ (Jackson [22], Cigler [7])

Damit läßt sich analog zu (Kap.1, Bsp.2) Jackson's q-Analogon der Abelidentität herleiten, es liefert die "richtigen" q-Analoga der Abelpolynome [7] und der inversen Relationen von Abeltyp, z.B.

$$\alpha_{nk} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p]^{n-k} \qquad \beta_{nk} = q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p][k+p]^{n-k-1}$$

3) $\varphi_n(z) = (1-az)(1-qaz) \ldots (1-q^{n-1}az)$

$\psi_n(z) = (1-z/q)(1-z/q^2) \ldots (1-z/q^n)$

Dieses Beispiel hängt eng mit den q-Jacobi- und q-Gegenbauerpolynomen zusammen. Gessel und Stanton [18] wenden es auf Transformationen hypergeometrischer Reihen an. Krattenthaler [25,26] konnte damit überzeugende q-Analoga der inversen Relationen von Legendre- und Chebyshevtyp herleiten, etwa (vgl. Kap. 4, Bsp.3).

$$a_n = \Sigma \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} b_{n-2k} \Leftrightarrow b_n = \Sigma (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+p-k \\ k \end{bmatrix} \frac{[n+p]}{[n+p-k]} a_{n-2k}$$

Schließlich führt es - ausgehend von (2.5) - zu einem q-Analogon der Catalanzahlen (siehe Kap.8).

Das q-Analogon von Gessel-Stanton

In [18] geben Gessel und Stanton ein q-Analogon der Lagrangeformel für den Spezialfall $g(x) = x(1+x)^{-b-1}$ an, das außer in Spezialfällen anscheinend nicht in Krattenthalers Ansatz (7.11) enthalten ist. Im wesentlichen bringen sie ein q-Analogon der inversen Relation von Gouldtyp (Kap.4.Bsp.2). Sie betrachten (in etwas anderer Notation): $g_k(x) = \Sigma\, \alpha_{nk} x^n$ mit

$$\alpha_{nk} = q^{-b(n-k)k} \frac{[a+bk-k]^{(n-k)}}{[n-k]_b\,!} \tag{7.16}$$

Dabei sei $[a]^{(n)} = [a][a+1]\ldots[a+n-1]$,

$$[a]_b = \frac{q^{ab}-1}{q^b-1} = \frac{[a\,b]}{[b]} .$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$g_k(x)\ (1-q^{-kb}[b]x\ ) = q^{-kb}g_k(q^b x) - xq^a\ [b]\ g_k\ (qx)$$

gilt, was wieder als Eigenwertgleichung

(7.17) $\quad g_k(q^b x) + [b]\ x\ g_k(x) = q^{bk}(g_k(x) + x\,q^a\ [b]\ g_k(qx))$

geschrieben werden kann.

$$\Rightarrow\ \tilde{g}_n(q^{-b}x) + [b]\ \ x\,\tilde{g}_n(x) = q^{bn}(\tilde{g}_n(x) + \tfrac{x}{q}q^a[b]\tilde{g}_n(\tfrac{x}{q}))$$

Setzt man $\tilde{g}_n(x) = \sum\limits_{k\leq n} \gamma_{nk}x^{-k}$, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$q^{bk}\gamma_{nk} + [b]\gamma_{n,k+1} = q^{bn}(\ \gamma_{nk} + q^{a-1}[b]q^{k+1}\ \gamma_{n,k+1})$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{nk}}{\gamma_{n,k+1}} = [b]\ \frac{q^{a+bn+k}-1}{q^{bk}-q^{bn}} = -q^{-kb}\ \frac{[a+bn+k]}{[n-k]_b}$$

$$\Rightarrow \gamma_{nk} = \gamma_{nn}\ q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}}\frac{[a+bn+k]^{(n-k)}}{[n-k]_b!}\ (-1)^{n-k}$$

Schließlich ist

$$G_n(x) = \tilde{g}_n(x) + xq^{a-1}[b]\tilde{g}_n(x/q)$$

Setzt man $G_n(x) = \sum\limits_{k\leq n} \beta_{nk}x^{-k}$, so ist (β_{nk}) wegen

$$\delta_{nk} = Lg_k(x)G_n(x) = L\ \Sigma\ \alpha_{jk}x^j\beta_{ni}x^{-i} = \ \Sigma\ \beta_{ni}\alpha_{ik}$$

genau die zu (α_{nk}) inverse Matrix.

Man erhält

$$\beta_{nk} = \gamma_{nk} + q^{a+k}[b]\gamma_{n,k+1}$$

$$= q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}}(-1)^{n-k}\,\frac{\lceil a+bn+k+1\rceil^{(n-k-1)}}{[n-k]_b!}\,\left(\lceil a+bn+k\rceil - [n-k]_b[b]q^{a+k+bk}\right)=$$

$$(7.18)= \frac{[a+bn+k+1]^{(n-k-1)}\,[a+bk+k]}{[n-k]_b!}\; q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}}(-1)^{n-k}$$

Wir haben somit zwei zueinander inverse Relationen (7.16) und (7.18). Man kann das Ergebnis aber auch als Lagrangeformel für die $g_k(x) =$ $= \Sigma \alpha_{nk}x^n$ auffassen: Für den Koeffizienten c_n in der Entwicklung (7.1) einer Funktion $f(x) = \Sigma f_k x^k$ gilt

$$c_n = Lf(x)G_n(x) = \sum_k \beta_{nk} f_k$$

8) q-Catalanzahlen

Ausgehend von den Entwicklungen (2.5) und (2.6) für die Catalanzahlen, wollen wir jetzt zwei verschiedene q-Analoga der Catalanzahlen studieren, die den beiden q-Lagrangeformeln von Garsia und Krattenthaler entsprechen.

Carlitz's q-Catalanzahlen

Wir definieren analog zu (2.6) q-Catalanzahlen $C_n = C_n(q)$ durch (siehe [11]):

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z)(1-qz)\dots(1-q^{n-1}z) \tag{8.1}$$

Aus (6.4) bzw. dessen Beweis folgt dann

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=n} C_{k-1} C_{l-1} q^{k(l-1)}\Big) z^n (1-z)\dots(1-q^{n-1}z)$$

Andererseits folgt aus (8.1)

$$z = C_o z(1-z) + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z)\dots(1-q^{n-1}z),$$

$C_o = 1$ und eine andere Entwicklung von z^2, sodaß man durch Koeffizientenvergleich

$$C_{n-1} = \sum_{k+l=n-2} C_k C_l \, q^{(k+1)l}$$

oder

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \, q^{(k+1)(n-k)} \tag{8.2}$$

erhält. Mit $C_n = q^{\binom{n}{2}} \tilde{C}_n$ wird das zu

$$\tilde{C}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q^{-k} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k}, \tag{8.2'}$$

Diese q-Catalanzahlen erfüllen i.w. also das einfachste q-Analogon der klassischen Rekursion (2.1) der Catalanzahlen.

Für die ersten Werte erhält man:

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 1+q, \quad C_3 = 1+q+2q^2+q^3, \quad C_4 = 1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6, \ldots$$

Das Analogon von (2.5) führt, wie man sich leicht überlegt, zu denselben q-Catalanzahlen:

(8.3) $$z = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n-1}{2}} C_n \frac{z^n}{(1+z)(1+qz)\ldots(1+q^{2n-1}z)}$$

Eine explizite Formel für die C_n ist allerdings nicht bekannt. Dafür gibt es noch eine schöne kombinatorische Interpretation: Sei $\mathcal{C}_n$ die Menge aller Wörter mit n Nullen und n Einsern, wo jeder Anfangsabschnitt mindestens so viele 0 wie 1 enthält. Diesen Wörtern entsprechen Wege von (0,0) nach (2n,0), die nicht unter die x-Achse gehen, wenn man jeder 0 ein ansteigendes, jeder 1 ein absteigendes Wegstück zuordnet. Bekanntlich ist $|\mathcal{C}_n| = C_n$.

Für das q-Analogon gilt jetzt:

(8.4) $$C_n = \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{inv} w}$$

Zum Beweis zerlegt man ein Wort $w \in \mathcal{C}_{n+1}$ in der üblichen Weise in

$$w = 0\, w_1\, 1\, w_2 \quad \text{mit} \quad w_1 \in \mathcal{C}_k, \quad w_2 \in \mathcal{C}_{n-k}$$

Für die Anzahl der Inversionen von w gilt dann

$$\operatorname{inv} w = \operatorname{inv} w_1 + \operatorname{inv} w_2 + (k+1)(n-k) .$$

Daher erfüllt $\sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{inv} w}$ dieselbe Rekursion (8.2) wie die C_n.

<u>Die q-Catalanzahlen $c_n(\lambda)$</u>

Der 3. Spezialfall von Krattenthalers q-Analogon der Lagrange-formel legt es nahe, die Entwicklung (2.5) auch auf folgende Weise zu verallgemeinern:

$$(8.5)\qquad z = \sum \frac{c_n(\lambda)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{z^n}{(1+z/q^n)\dots(1+z/q)(1+q^\lambda z)\dots(1+q^{\lambda+n-1}z)}$$

Aus 7.12) folgt dann

$$(8.6)\quad q^{-\binom{n}{2}} c_n(\lambda) = \frac{1}{[n]} (1+z/q^{n-1})\dots(1+z)(1+q^\lambda z)\dots(1+q^{\lambda+n-1}z)\Big|_{z^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} (q^{-n+1}z)^k \sum_l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} q^{\binom{l}{2}} (q^\lambda z)^l \Big|_{z^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}-k(n-1)+\lambda(n-1-k)+\binom{n-1-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-1-k \end{bmatrix}$$

und schließlich

$$(8.7)\quad c_n(\lambda) = \frac{1}{[n]} \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} q^{k^2+\lambda k}$$

Die Summanden sind q-Analoga der Runyonzahlen

$r_{nk} = \frac{1}{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ aus [31, p.17], sie zählen die Wege von

(0,0) bis (2n,0) über der x-Achse mit k "Tälern".

Für gewisse λ läßt sich (8.6) einfacher berechnen: Für $\lambda=1$ etwa gilt

$$c_n(1) = q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]} (1+z/q^{n-1})\dots(1+q^n z)\Big|_{z^{n-1}}$$

$$= q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} q^{(-n+1)(n-1)+\binom{n-1}{2}}$$

$$(8.8)\qquad = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix},$$

also das naheliegendste q-Analogon der Catalanzahlen überhaupt.

Für $\lambda = 0$ erhält man auf ähnliche Weise

$$(8.9)\quad c_n(0) = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{1+q}{1+q^n}$$

Für die ersten Werte gilt

$$c_0(\lambda) = c_1(\lambda) = 1,\ c_2(\lambda) = 1+q^{1+\lambda},\ c_3(\lambda) = 1+[3]\, q^{1+\lambda} + q^{4+2\lambda}, \dots$$

Nun zur kombinatorischen Interpretation. Es gilt:

$$c_n(\lambda) = \sum_{w\in C_n} q^{\operatorname{maj} w + (\lambda-1)\operatorname{des} w} \tag{8.10}$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{maj} w$ den major (oder greater-)index von w und $\operatorname{des} w$ die Anzahl der Abstiege (= ... 10 ...) in w.
Für den Fall $\lambda = 1$ hat J.Fürlinger den folgenden eleganten Beweis gefunden:

Betrachten wir alle Wege von (0,0) nach (2n,0), kodiert durch 0-1- Wörter w, so gilt bekanntlich (siehe etwa [29]):

$$\sum q^{\operatorname{maj} w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} .$$

Wir ordnen jetzt jedem Weg w, der unter die x-Achse geht, bijektiv einen Weg w' von (0,0) nach (2n,2) zu: Dazu bestimmen wir den Punkt P auf dem Weg, der am "tiefsten" liegt, und falls es mehrere solche gleichtiefe gibt, dann den ersten davon. P' sei der Punkt vor P. Indem wir das unmittelbar vor P gelegene absteigende Wegstück P'P in ein aufsteigendes hinaufklappen und den Rest des Weges (um zwei Einheiten nach oben verschoben) daran anhängen, erhalten wir den Weg w'. Aus w' kann man w wieder zurückgewinnen: Der kritische Punkt P', an dem das darauffolgende Wegstück wieder hinuntergeklappt werden muß, ist der am weitesten rechts liegende unter den "tiefsten" Punkten von w'. Offensichtlich ist $\operatorname{maj} w' = \operatorname{maj} w - 1$.
Daher gilt

$$\sum_{w\in C_n} q^{\operatorname{maj} w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - \sum_{w\notin C_n} q^{\operatorname{maj} w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q \sum q^{\operatorname{maj} w'} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q\begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

Für den allgemeinen Fall (λ beliebig) und weitere Eigenschaften der q-Catalanzahlen verweise ich auf [11].

9) Abschließende Bemerkungen

Wie aus dem Umfang des Skriptums ersichtlich, erweist sich das Thema "Lagrange-Inversion" als unerwartet ergiebig. Die Stoffauswahl ist natürlich sehr subjektiv, die kombinatorische Seite wurde zu Gunsten der analytischen vernachlässigt, die q-Analoga sind sicher nicht zu kurz gekommen. Auf einige wesentliche Aspekte, etwa kombinatorische Beweise, wurde überhaupt nicht eingegangen. Ich verweise hier auf die Literatur, z.B. [4,27,30,34].

Als Quelle habe ich neben der zitierten Literatur in erster Linie eine Vorlesung über "Kombinatorische Identitäten" benutzt, die Prof. Cigler im WS 1981/82 gehalten hat. Ich hoffe, die Darstellung dadurch insofern bereichert zu haben, daß sie für jeden den einen oder der anderen neuen Aspekt enthält.

Literatur

[1] G.E. ANDREWS, Identities in combinatorics II: A q-analog of the Lagrange inversion theorem. Proc. AMS 53, 240-245 (1975).

[2] G. BARON und P. KIRSCHENHOFER, Operatorenkalkül über freien Monoiden III: Lagrangeinversion und Sheffersysteme. Mh.Math. 92, 83-103 (1981).

[3] L. CARLITZ, Some q-expansion formulas. Glasnik Mat. 8, 205-214 (1973).

[4] L. CHOTTIN, Énumération d'arbres et formules d'inversion de séries formelles. J.Comb.Th. 31B, 23-45 (1981)

[5] J. CIGLER, Sequences of polynomials of binomial type and the Lagrange-Good formula, Univ. Wien (1977).

[6] J. CIGLER, Operatormethoden für q-Identitäten II: q-Laguerre-Polynome. Mh.Math. 91, 105-117 (1981).

[7] J. CIGLER, Operatormethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversionen und die Lagrange'sche Formel. Arch.Math. 35, 533-543 (1980).

[8] J. CIGLER, Elementare q-Identitäten. Vortrag beim 5. Treffen des Seminaire Lothringien de Combinatoire in Ste. Croix (1981).

[9] L. COMTET, Advanced Combinatorics, D. Reidel, Dortrecht - Boston (1974).

[10] G.P. EGORITSCHEW, Integraldarstellung und Berechnung kombinatorischer Summen (russ,) - Novosibirsk (1977).

[11] J. FÜRLINGER and J. HOFBAUER, q-Catalan numbers, in Vorbereitung.

[12] A.M. GARSIA, A q-analogue of the Lagrange inversion formula, Houston J.Math. 7, 205-237 (1981).

[13] A.M. GARSIA and S.A. JONI, A new expression for umbral operators and power series inversion. Proc. AMS 64, 179-185 (1977).

[14] A.M. GARSIA and S.A. JONI, Composition sequences, Communications in Alg. 8, 1195-1266 (1980).

[15] I. GESSEL, A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration. J.Comb.Th. 28A, 321-337 (1980).

[16] I. GESSEL, , A noncommutative generalization and a q-analog of the Lagrange inversion formula. Transact. AMS 257, 455-482, 1980

[17] I. GESSEL and D. STANTON, Strange evaluations of hypergeometric series. SIAM J.Math.Anal. 13, 295-308 (1982).

[18] I. GESSEL and D. STANTON, Applications of q-Lagrange inversion to basic hypergeometric series, Trans.AMS, to appear.

[19] I.J. GOOD, Generalization to several variables of Lagrange's expansion, with application to stochastic processes, Proc. Cambridge Philos. Soc. 56, 367-380 (1960).

[20] J. HOFBAUER, A short proof of the Lagrange-Good formula, Discrete Math. 25, 135-139 (1979).

[21] J. HOFBAUER, A q-analog of the Lagrange expansion, Preprint, Wien 1981.

[22] F.H. JACKSON, A q-generalization of Abel's series. Rendiconti Palermo 29, 340-346 (1910).

[23] C. JACOBI, De resolutione aequationum per series infinitas. J. reine angew. Math. 6, 257-286 (1830).

[24] S.A. JONI, Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators.
Linear and Multilinear Algebras 6, 111-122 (1978).

[25] Ch. KRATTENTHALER, A new q-Lagrange formula and some applications, preprint (Univ. Wien, 1982).

[26] Ch. KRATTENTHALER, Dissertation, Univ. Wien 1982.

[27] G. LABELLE, Une nouvelle demonstration combinatoire des formules inversion de Lagrange.
Advances in Math. 42, 217-247 (1981).

[28] J.L. LAGRANGE, Nouvelles méthodes pour résoudre les équations littérales par le moyens de séries (1770) Oevres, Vol. 3, Gauthier-Villars, Paris 1869, pp. 1-73.

[29] P.A. MAC MAHON, Collected papers, Vol.I: Combinatorics.

[30] G.N. RANEY, Functional composition patterns and power series reversion.
Trans. AMS 94, 441-451 (1960).

[31] J. RIORDAN, Combinatorial Identities, Wiley, New York 1968.

[32] St. ROMAN and G.-C. ROTA, The umbral calculus.
Advances in Math. 27, 95-188 (1978).

[33] G.C. ROTA, D. KAHANER and A. ODLYZKO, Finite operator calculus.
J.Math.Anal.Appl. 42, 685-760 (1973).

[34] W.T. TUTTE, On elementary calculus and the Good formula.
J.Comb.Th. 18B, 97-137 (1975).