Adalbert Kerber (Bayreuth)

Karl-Josef Thürlings (Bayreuth)

Symmetrieklassen von Funktionen und deren Abzählungstheorie II

Standardsituation: $\underline{m}:=\{1,\dots,m\}$, $\underline{n}:=\{1,\dots,n\}$, $\underline{m}^{\underline{n}}:=\{f \mid f:\underline{n}\to\underline{m}\}$

$P \leq S_{\underline{n}}$ operiert auf $\underline{m}^{\underline{n}}$: $\pi f := f \circ \pi^{-1}$

Bahnen heißen *Symmetrieklassen*

Bsp.: Graphen, Multigraphen, ...

Partitionen mit beschränkter Anzahl und Größe von Teilen, ...

Boolesche Funktionen, ...

$a_i(\pi)$:= Anzahl der i-Zyklen von π $\qquad c(\pi) := \sum_i a_i(\pi)$

(i) Anzahl der Symmetrieklassen $\underset{CF}{=} \frac{1}{|P|} \sum_{\pi\in P} m^{c(\pi)}$

Gewicht von f : $w(f) := (|f^{-1}[\{1\}]|,\dots,|f^{-1}[\{m\}]|)$

(ii) Anzahl der Symmetrieklassen vom Gewicht $(w)=(w_1,\dots,w_m)$

$$\underset{\text{Pólya}}{=} \text{ Koeff. von } x_1^{w_1}\dots x_m^{w_m} \text{ in } \frac{1}{|P|}\sum_{\pi\in P}\prod_{i=1}^{n}(x_1^i+\dots x_m^i)^{a_i(\rho)}$$

Bsp.: Graphen vom Gewicht (4,2):

Verfeinerung: Abzählung nach Gewicht und

Symmetrie := Automorphismengruppe

1. Die Markentafel

G := endliche Gruppe

$U, V \leqq G$

UgV ist Bahn von $U \times V$ auf G:

$$(u,v)g := ugv^{-1}$$

Burnside (2nd ed., p. 236)

Dress/Küchler (unveröffentlicht)

Plesken, Crelle 334

K./Thürlings, Proc. Rauischholzhausen

Betrachte *Untergruppenverband* $U(G)$, G auf $U(G)$: $g \mapsto ({}_{gUg^{-1}}^{U})$

Konjugiertenklassen $\tilde{U}_i$, $U_i \in \tilde{U}_i$, so numeriert, daß

$$[U' \in \tilde{U}_i, U'' \in \tilde{U}_j, U' \leqq U''] \Longrightarrow i \leqq j$$

a_{ijk} := Anzahl der Bahnen von $U_i \times U_j$ mit Stabilisator $\in \tilde{U}_k$, $A_i := (a_{ijk})$

Marken : $$\omega_{ij} := \frac{1}{|U_i|} |\{g \in G \mid U_j \leq gU_ig^{-1}\}|$$

Markentafel: $$\Omega := (\omega_{ij})$$

1.1 (i)

$$\Omega = \begin{pmatrix} |G| & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 \\ |G:U_i| & & & |N_G(U_i):U_i| & & \\ \vdots & & * & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\omega_{ij}\,\omega_{kj} = \sum\limits_{\nu} a_{ik\nu}\,\omega_{\nu j}$, d.h. für $\omega_j := \begin{pmatrix} \omega_{1j} \\ \vdots \\ \omega_{dj} \end{pmatrix}$ gilt

$$A_i\,\omega_j = \omega_{ij}\,\omega_j$$

1.2 Satz: $\delta : G \to S_M$, G_m := Stabilisator von $m \in M$

$y_j^M := |\{m \in M \mid U_j \leq G_m\}|$, x_j^M := Anzahl der Bahnen mit Stab. in $\tilde{U}_j$

$$y^M := \begin{pmatrix} y_1^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_d^M \end{pmatrix}, \quad x^M := \begin{pmatrix} x_1^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_d^M \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad x^M = t_\Omega^{-1} \, y^M$$

1.3 $$\alpha_{ij} = \frac{|U_j|}{|N_G(U_i)|} \sum_{\substack{U \leq U_i \\ U \in \tilde{U}_j}} \mu_G(U, U_i) \ , \quad \omega_{ij} = \frac{|N_G(U_j)|}{|U_i|} \sum_{\substack{U \leq U_i \\ U \in \tilde{U}_j}} 1 \ .$$

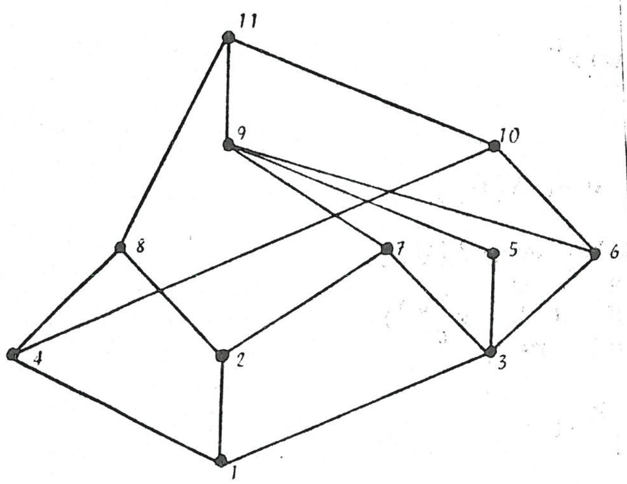
Bsp.: $G := S_{\underline{4}}$

$U_1 = \{(1)\}$, $U_2 = \{(1),(12)\}$, $U_3 = \{(1),(12)(34)\}$,

$U_4 = \{(1),(123),(132)\}$, $U_5 = \{(1),(1234),(13)(24),(1432)\}$,

$U_6 = V_{\underline{4}}$, $U_7 = \{(1),(12),(34),(12)(34)\}$, $U_8 = S_{\underline{3}}$,

$U_9 = D_{\underline{4}}$, $U_{10} = A_{\underline{4}}$, $U_{11} = S_4$.



$$\begin{bmatrix} 24 & & & & & & & & & & \\ 12 & 2 & & & & & & & & & \\ 12 & 0 & 4 & & & & & & & & \\ 8 & 0 & 0 & 2 & & & & & 0 & & \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 2 & & & & & & \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & & & & & \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & & \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M :=$ numerierte Graphen mit 4 Punkten und vom Gewicht (4,2)

$= \{f \in 2^{\underline{4}^{[2]}} \mid |f^{-1}[\{1\}]| = 2\}$ (15 numerierte Graphen)

$$Y^M = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Symmetrieklassen von Funktionen

$f \in \underline{m}^{\underline{n}}$ $\quad \delta : G \longrightarrow S_{\underline{n}}$ $\quad gf := f \circ \delta(g)^{-1}$

(Bsp.: Graphen: $m := 2$, $n := \binom{p}{2}$, $\delta : S_p \longrightarrow S_{\binom{p}{2}}$)

$w(f) := (|f^{-1}[\{1\}]|, \ldots, |f^{-1}[\{m\}]|)$ $\quad F(w) := \{f \in \underline{m}^{\underline{n}} \mid w(f) = w(w_1, \ldots, w_m)\}$

gesucht: $n^i(w)$:= Anzahl der Bahnen von G auf F(w) mit Stabilisator in $\tilde{U}_i$

$m^i(w) := |\{f \in F(w) \mid U_i \leq G_f\}| \Longrightarrow n^i(w) = \sum_\nu \alpha_{\nu i}\, m^\nu(w)$

2.1 (i) $\quad \sum_w n^i(w) x^w = \sum_\nu \alpha_{\nu i} \sum_w m^\nu(w) x^w$

(ii) $\quad s_i$:= Anzahl der Bahnen von $\delta[U_i]$

t_{ij} := Länge der j-ten Bahn von $\delta[U_i]$

$$\Longrightarrow \sum_w m^\nu(w) x^w = \prod_{j=1}^{s_\nu} \left(\sum_{r=1}^{m} x_r^{t_{\nu j}} \right)$$

(iii) $\quad \prod_j \left(\sum_r x_r^{t_{\nu j}} \right) = \prod_l \left(\sum_{r=1}^{m} x_r^{c_{\nu l}} \right)^{k_{\nu l}}$

falls $\quad c_{il} := \begin{cases} |U_i| / |U_l| & U_l \leq U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und k_{il} := Anzahl der Bahnen von $\delta[U_i]$ mit Stab. in $\tilde{U}_l$

$\Longrightarrow$ 2.2 Satz (Plesken): *Anzahl der Symmetrieklassen vom Gewicht w und Symmetrie $\tilde{U}_i$ = Koeff. von x^w in*

$$\sum_{\nu} \alpha_{\nu i} \prod_{l=1}^{d} \left(\sum_{r=1}^{m} x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}} .$$

Beispiel: Abzählung aller Graphen mit 4 Punkten nach Gewicht und Symmetrie (= Stabilisatortyp).

Aus der oben bereits benutzten Markentafel Ω von S_4 erhalten wir als inverse Matrix die Matrix

$$\begin{bmatrix}
1/24 & & & & & & & & & & \\
-1/4 & 1/2 & & & & & & & & & \\
-1/8 & 0 & 1/4 & & & & & & & & \\
-1/6 & 0 & 0 & 1/2 & & & & & & & \\
0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 & & & & & & \\
1/12 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 1/6 & & & & & \\
1/4 & -1/2 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & & \\
1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & & \\
1/6 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \\
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1 & -1 & -1/2 & 1
\end{bmatrix}$$

Wir wählen jetzt als Permutationsdarstellung

$$\delta : \underline{S_4} \longrightarrow \underline{S_4}[2] : \longmapsto \begin{pmatrix} \{i,j\} \\ \\ \{\pi(i),\pi(j)\} \end{pmatrix}$$

und berechnen die Exponenten $k_{\nu l}$. Dazu betrachten wir das Repräsentantensystem der Klassen konjugierter Untergruppen von $\underline{S_4}$.

Wir erhalten:

$k_{11} = 6$

$k_{21} = 2,\ k_{22} = 2$

$k_{31} = 2,\ k_{33} = 2$

$k_{41} = 2$

$k_{51} = 1,\ k_{53} = 1$

$k_{63} = 3$

$k_{71} = 1,\ k_{77} = 2$

$k_{82} = 2$

$k_{92} = 1,\ k_{97} = 1$

$k_{10,3} = 1$

$k_{11,7} = 1$

$c_{11} = 1$

$c_{21} = 2,\ c_{22} = 1$

$c_{31} = 2,\ c_{33} = 1$

$c_{41} = 3$

$c_{51} = 4,\ c_{53} = 2$

$c_{63} = 2$

$c_{71} = 4,\ c_{77} = 1$

$c_{82} = 3$

$c_{92} = 4,\ c_{97} = 2$

$c_{10,3} = 6$

$c_{11,7} = 6$

Die übrigen $k_{\nu l}$ sind gleich 0 , so daß diese für die Abzählung keine Bedeutung haben.

Wir werten nun die Polynome für m=2 aus:

$$\prod_{l=1}^{d} (x_1^{c_{\nu l}} + x_2^{c_{\nu l}})^{k_{\nu l}} =$$

$\nu := 1 \quad (x_1 + x_2)^6$

$\nu := 2 \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 (x_1 + x_2)^2$

$\nu := 3 \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 (x_1 + x_2)^2$

$\nu := 4 \quad (x_1^3 + x_2^3)^2$

$\nu := 5 \quad (x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2)$

$\nu := 6 \quad (x_1^2 + x_2^2)^3$

$\nu := 7 \quad (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2)^2$

$\nu := 8 \quad (x_1^3 + x_2^3)^2$

$\nu := 9 \quad (x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2)$

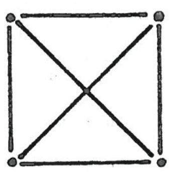
$\nu := 10 \quad (x_1^6 + x_2^6)$

$\nu := 11 \quad (x_1^6 + x_2^6)$

$$\sum_{\nu} \alpha_{i\nu} \prod_{l=1}^{d} (x_1^{c_{\nu l}} + x_2^{c_{\nu l}})^{k_{\nu l}} =$$

<u>i := 11</u> : $x_1^6 + x_2^6$

zwei Graphen haben die Automorphismengruppe $\underline{S_4}$, nämlich:

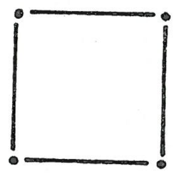
 und  .

<u>i := 10</u> : $\frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^6) - \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^6) = 0$

Kein Graph hat die Automorphismengruppe $\underline{A_4}$.

<u>i := 9</u> : $(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^6 + x_2^6) = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$

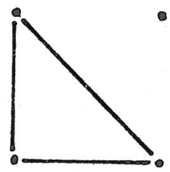
Zwei Graphen haben die Automorphismengruppe $\underline{D_4}$, nämlich:



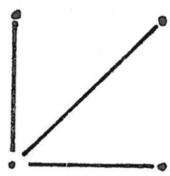
und

<u>i := 8</u> : $(x_1^3 + x_2^3)^2 - (x_1^6 + x_2^6) = 2x_1^3x_2^3$

Zwei Graphen haben die Automorphismengruppe $\underline{S}_3 \leq \underline{S}_4$,
nämlich

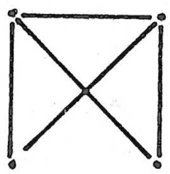


und



<u>i := 7</u> : $\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) =$
$x_1^5x_2 + x_1x_2^5$

Zwei Graphen haben die Automorphismengruppe
$U_7 = \{(1),(12),(34),(12)(34)\}$, nämlich



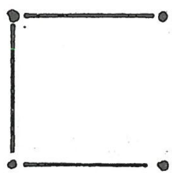
und

<u>i := 5</u> : $\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) = 0$

Kein Graph hat die Automorphismengruppe $<(1234)>$.

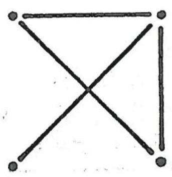
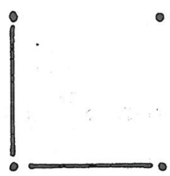
<u>i := 3</u> : $\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) -$
$\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^3 - \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2)^2 +$
$\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3x_2^3$

Ein Graph hat die Automorphismengruppe $\{(1),(12)(34)\}$,
nämlich



$\underline{i := 2}$: $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2)^2 -$
$(x_1^3 + x_2^3)^2 + (x_1^6 + x_2^6) = x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4$

Zwei Graphen haben die Automorphismengruppe $\{(1),(12)\}$,
nämlich:

 und  .

Insgesamt gibt es 11 Graphen mit 4 Punkten, so daß wir alle nach Gewicht und Automorphismengruppe abgezählt haben.

In unserem Beispiel ergab sich bereits die Frage, ob gewisse Gruppen überhaupt als Automorphismengruppen von Graphen auftreten können.

<u>Bemerkungen zu Ω bzw. zu $(\alpha_{ij}) := \Omega^{-1}$</u> :

(i) a) $\alpha_{ii} = \dfrac{1}{\omega_{ii}} = \dfrac{|U_i|}{|N_G(U_i)|}$

b) $\alpha_{ij} = \dfrac{1}{\omega_{ii}} \left(- \sum\limits_{j \leq s < i} \omega_{is}\, \alpha_{sj}\right)$, falls $i \neq j$

(ii) Sei $U \underset{\neq}{<} G$ maximale Untergruppe von G, die Anzahl der Bahnen von $\delta{+}U$ sei gleich der Anzahl der Bahnen von $G(\delta[U]$ und $\delta[G]$ haben dann *dieselben* Bahnen).

<u>Beh.</u>: Keine Bahn von G hat Stabilisator in $\tilde{U}$

<u>Bew.</u>: $\tilde{U} = \tilde{U}_{d-1}$, $\tilde{G} = \tilde{U}_d$

Anzahl der Bahnen vom Gewicht w mit Stabilisator in $\tilde{U}$

$\underset{2.2}{=}$

Koeff. von x^w in $\sum\limits_{\nu} \alpha_{\nu,d-1} \prod\limits_{l=1}^{d} \left(\sum\limits_{r=1}^{m} x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}}$

$$= \sum_{\nu=d-1}^{d} \alpha_{\nu,d-1} \prod_{l=1}^{d} \left(\sum_{r} x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}}$$

$$= 0$$

$\alpha_{d-1,d-1} = -\alpha_{d,d-1}$ nach (i):

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \dfrac{|U|}{|N_G(U)|} & \\ * \quad & - \dfrac{|U|}{|N_G(U)|} & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bsp.</u>: A_p , $p \geq 2$ ist <u>nicht</u> Automorphismengruppe eines Graphen mit p Punkten

(iii) Herleitung von Pólyas Theorem aus 2.2:

<u>Lemma</u>: $$\sum_i \alpha_{\nu i} = \begin{cases} \phi(|U_\nu|)\,/\,|N_G(U_\nu)| & \text{, falls } U_\nu \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i,\nu} \alpha_{\nu i} \prod_l \left(\sum_r x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}} = ZI(\delta[G] \mid x_1+\ldots+x_m)$$

(iv) Gruppentheorie

reguläre Darstellung $\rho: G \longrightarrow S_G : g \longmapsto \binom{h}{gh}$

berechne $\sum_\nu \alpha_{\nu i} \prod_{l=1}^{d} \left(\sum_{r=1}^{m} x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}}$

$$k_{\nu l} = \text{Anz. } \underbrace{\text{Bahnen von } \rho[U_\nu]}_{\text{Rechtsnebenkl. v. } U_\nu} \text{ mit } \underbrace{\text{Stabil. in}}_{=\{1\}} \tilde{U}_l$$

$$= \begin{cases} |G:U_\nu| & \text{, falls } l=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad c_{\nu 1} = |U_\nu|$$

$$\Longrightarrow \sum_\nu \alpha_{\nu i} \prod_l \left(\sum_r x_r^{c_{\nu l}}\right)^{k_{\nu l}} = \sum_\nu \alpha_{\nu i} \left(\sum_{r=1}^{m} x_r^{|U_\nu|}\right)^{|G:U_\nu|}$$

der Koeffizient von $x_1^{r_1}\ldots x_m^{r_m}$ in diesem Polynom ist die Anzahl der Bahnen von G auf $\underline{m}^G$, deren Elemente das Gewicht $(r_1,\ldots,r_m)$ haben und zu U_i konjugierte Stabilisatoren

Fall $m := 2 \Longrightarrow \underline{2}^G$ = Potenzmenge $\mathbb{P}(G)$

Stabilisator von $A \in \mathbb{P}(G)$:

G_A = maximale Untergruppe, so daß A noch Vereinigung von Rechtsnebenklassen dieser Gruppe ist

$\Longrightarrow$ Satz: *Der Koeffizient von* $x_1^r x_2^{|G|-r}$ *in*

$$|G:U_i| \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_{\nu i} \left(x_1^{|U_\nu|} + x_2^{|U_\nu|}\right)^{|G:U_\nu|}$$

ist die Anzahl derjenigen Teilmengen A *von* G *mit Ordnung* r *, für die die maximale Untergruppe* U *, so daß* A *noch Vereinigung von Rechtsnebenklassen nach* U *ist, in* $\tilde{U}_i$ *liegt.*

Beisp.: $G := \underline{S_4}$ und $U_i := \{(1),(12),(34),(12)(34)\}$.

Wir erhalten das Polynom

$$6\left(\tfrac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4)^6 - \tfrac{1}{2}(x_1^8 + x_2^8)^3\right) =$$

$$18x_1^{20}x_2^4 + 36x_1^{16}x_2^8 + 60x_1^{12}x_2^{12} + 36x_1^8x_2^{16} + 18x_1^4x_2^{20} .$$

Das bedeutet u.a., daß es 18 Teilmengen A von $\underline{S_4}$ der Ordnung 20 gibt, so daß A Vereinigung von Rechtsnebenklassen von G nach einer zu U_i konjugierten Untergruppe U ist und U diesbezüglich maximal ist.