Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée

DOMINIQUE FOATA
Editeur

SEMINAIRE LOTHARINGIEN DE COMBINATOIRE (Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)

1ère Session : 8-9 mars 1980, Strasbourg

3ème Session : 2-3 février 1981, Le Kleebach

Présentation et résumés des communications

1981 140/S-02

UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

Département de Mathématique

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 1

STRASBOURG

SEMINAIRE LOTHARINGIEN DE COMBINATOIRE

(Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)

1ère Session : 8-9 mars 1980, Strasbourg

3ème Session : 2-3 février 1981, Le Kleebach

Présentation et résumés des communications

par

DOMINIQUE FOATA

A.M.S. Subject Classification (1980) 00A10 0502 2002

Mots Clefs : Lotharingien, Interprétations Combinatoires, Permutations, Géométrie Combinatoire.

SEMINAIRE LOTHARINGIEN

DE COMBINATOIRE

(Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)

1ère Session : 8-9 mars 1980, Strasbourg

3ème Session : 2-3 février 1981, Le Kleebach

Présentation et résumés des communications

PREFACE

Le Séminaire Lotharingien de Combinatoire a été mis en route en mars 1980 par les Universités de Bayreuth, Erlangen et Strasbourg, sous l'instigation d'Adalbert Kerber, Klaus Leeb et des Strasbourgeois. Il s'agissait de réunir deux ou trois fois par an les spécialistes de Combinatoire des trois Universités ainsi que d'autres collègues proches, géographiquement ou culturellement. Il semble se dégager un "lotharingian spirit", comme dit notre ami Adriano Garsia [1] ("It has become increasingly apparent ... that the special functions and identities of classical mathematics are gravid with combinatorial information ... A systematic study is taking place to mine out of the classical literature this information ... to set up new identities as well as more revealing proofs of old ones".) C'est, en effet, dans cet esprit que nous avons démarré nos rencontres. Nous essayons de nous concentrer sur les domaines classiques qui relèvent de techniques combinatoires, comme les partitions, la représentation du groupe symétrique, le calcul des caractères, les fonctions spéciales, les q-analogues, les congruences des suites de nombres classiques,..., en les regardant dans un nouvel esprit géométrique, dans cet esprit qui nous avait amenés à organiser cette Table Ronde de Strasbourg sur le groupe symétrique [2].

Notre projet futur sera de publier des mémoires de mise au point sur un sujet donné. Peut-être le ferons-nous dès la fin de cette année 1981 après la cinquième session qui doit se tenir à Sainte-Croix-aux-Mines en décembre.

Dans le présent recueil nous n'avons édité que les résumés des communications faites dans les première et troisième sessions. C'est Volker Strehl (Erlangen), d'une part et Adalbert Kerber (Bayreuth), d'autre part, qui assureront la publication des actes des seconde et quatrième sessions.

Nous avons réuni dans une même liste les noms des participants des première et troisième sessions.

[1] A. M. GARSIA & J. REMMEL, A combinatorial interpretation of q-derangement and q-Laguerre numbers, Europ. J. Combinatorics, 1 (1980), 47-59.

[2] D. FOATA (Ed.), Combinatoire et Représentation du groupe symétrique [Strasbourg, 1976], Lecture Notes in Math. n°579, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

Dominique FOATA
Strasbourg

Liste des participants

1ère session (Strasbourg, mars 1980)
et 3ème session (Le Kleebach, février 1981)

M. Barnabei (Bologna)
M. Becker (Erlangen)
Th. Beth (Erlangen)
D. Begemann (Linden)
A. Brini (Bologna)
M. Clausen (Bayreuth)
J. Désarménien (Strasbourg)
W. Deuber (Bielefeld)
D. Dumont (Strasbourg)
D. Foata (Strasbourg)
J. Françon (Strasbourg)
A. Golembiowski (Bayreuth)
D. Gouyou-Beauchamps (Bordeaux)
J. Grabmeier (München)
J.-P. Jouanolou (Strasbourg)
A. Kerber (Erlangen)
R. König (Erlangen)
A. Lascoux (Paris)
K. Leeb (Erlangen)
H. Lünebourg (Kaiserslautern)
M. Mörs (Bielefeld)
B. Morin (Strasbourg)
W. Oberschelp (Aachen)
D. Perrin (Rouen)
C. Puech (Paris)
J. Riguet (Paris)
D. Stockhofe (Aachen)
V. Strehl (Erlangen)

J. Tappe (Bayreuth)

K. J. Thürlings (Bayreuth)

K. Vedder (Giessen)

G. Viennot (Bordeaux)

B. Wagner (Bayreuth)

S. G. Williamson (San Diego)

K. Winkelmann (Bamberg)

K. E. Wolff (Giessen)

Séminaire Lotharingien de Combinatoire
1ère Session
Strasbourg, 8-9 mars 1980

Résumés des communications

TH. BETH (Bayreuth) :

Cryptographie.

Die verschiedenen Konzepte der cryptographischen Codierung wurden an Beispielen vorgestellt : in Abhängigkeit von der Bandbreite des benutzten Übertragungskanals wurden die Eigenschaften

a) der Binärcodierung durch Überlagerung von PN-Folgen aus Feedback-Schiebregistern

b) der Permutationscodierung für Sprache im Telefonbereich,

diskutiert. Weiterhin wurden die algebraischen Eigenschaften dieser Codierung mit denen der neuerdingsvorgeschlagenen Public-Key-Cryptosystemen verglichen.

Literatur :

A. Lempel, Cryptography in Transition, SIAM J. Computers, 1980.

N. Sloane, Error-Correcting Codes and Cryptography, Manuscript, Bell Telephone Laboratories, 1980.

M. CLAUSEN (Bayreuth) :

Letter Place Algebras and Representation Theory.

Mainly three concepts have been used to study representations of the symmetric group S_n and/or representations of the general linear group GL(m,K):

1. the group algebra $K[S_n]$,
2. the polynomial ring $K[X_1,\ldots,X_n]$ and
3. the tensor space $\overset{n}{\otimes} K_m$.

All these spaces can be embedded into the letter place algebra $K_m{}^n := K[X_{ij}/\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n]$.
S_n and GL(m,K) are acting on $K_m{}^n$ in a natural way by algebra-automorphisms.
Two classes of elements in $K_m{}^n$ play a central role in the representation theory of S_n and GL(m,K):
(ordinary) bideterminants and symmetrized bideterminants.
After having sketched a proof of a straightening formula for symmetrized bideterminants, I tried to indicate the significance of symmetrized bideterminants in the representation theory of S_n and GL(m,K) by two quite different applications:

a) a characteristic-free construction of irreducible modules for S_n and GL(m,K), see [1];
b) a construction of a Specht series for Littlewood-Richardson products, see [2].

References

[1] CLAUSEN, M.: Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, I
Advances in Math. 33, 161-191 (1979)

[2] CLAUSEN, M.: Letter place algebras ..., II
Advances in Math., to appear

[3] CONCINI, C. de/ EISENBUD, D./ PROCESI, C.: Young diagrams and determinantal varieties,
Inventiones math. 56, 129-165 (1980)

[4] DÉSARMÉNIEN, J./ KUNG, J.P.S./ ROTA, G.-C.: Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics,
Advances in Math. 27, 63-92 (1978)

[5] DOUBILET, P./ ROTA, G.-C./ STEIN, J.: On the foundations of combinatorial theory IX: combinatorial methods in invariant theory,
Stud. Appl. Math. 53, 185-216 (1974)

[6] MEAD, D.G.: Determinantal ideals, identities and the Wronskian,
Pacific J. Math. 42, 167-175 (1972)

[7] ROTA, G.-C./ DÉSARMÉNIEN, J.: Théorie Combinatoire des Invariants Classiques,
Series de Mathématique Pures et Appliqués, IRMA, Strasbourg, 1977.

D. DUMONT (Strasbourg) :

Interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi.

Soit la suite de polynômes $S_n(x, y, z)$ en trois variables définie par la récurrence

$$S_0(x, y, z) = x$$
$$S_n(x, y, z) = yz \frac{\partial}{\partial x} S_{n-1} + zx \frac{\partial}{\partial y} S_{n-1} + xy \frac{\partial}{\partial z} S_{n-1} \quad (n \geq 1) .$$

On peut montrer d'après Schett [2] que les fonctions elliptiques de Jacobi ont pour développements en séries de Taylor

$$\mathrm{sn}(u, k) = \frac{1}{k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n S_{2n+1}(0, 1, k) \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\mathrm{cn}(u, k) = \frac{1}{k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n S_{2n}(k, 0, 1) \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$
$$\mathrm{dn}(u, k) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S_{2n} (1, k, 0) \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

Soit maintenant σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un entier p $(2 \leq p \leq n)$ est appelé "pic-de-cycle" de σ si l'on a $\sigma^{-1}(p) < p > \sigma(p)$. Les pics de cycle de σ sont répartis en deux classes selon leur parité en tant qu'entiers. On montre que le nombre $a_{n,i,j}$ de permutations σ ayant exactement i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs est un coefficient de $S_n(x, y, z)$, plus précisément celui du monôme $x^{2i} y^{2j+1} z^{n-2i-2j}$ quand n est impair (de $x^{2i+1} y^{2j} z^{n-2i-2j}$ quand n est pair) [1].

On obtient ainsi en particulier une interprétation des coefficients de Taylor des fonctions elliptiques de Jacobi, qui est différente de celle obtenue indépendamment par Viennot [3].

[1] D. DUMONT, A Combinatorial Interpretation for the Schett Recurrence on the Jacobian Elliptic Functions, <u>Math. Comp.</u> 33 (1979), 1293-1297.

[2] A. SCHETT, Recurrence formula of the Taylor series expansions of the Jacobian elliptic functions, Math. Comp. 31 (1977), 1003-1005.

[3] G. VIENNOT, Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi, J. Comb. Theory, series A (1980).

D. STOCKHOFE (Aachen) :

Certain bijections on the set of partitions of a natural number.

Let n,q be positive integers and let $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ be a partition of n. Then for each i, $1 \leq i \leq h-1$ uniquely determined integers $t_i \geq 0$, $0 \leq \varkappa_i \leq q-1$ are given by the equation

$\alpha_i - \alpha_{i+1} = t_i q + \varkappa_i$.

For $q \in \mathbb{N}$ a bijective mapping L_q can be constructed on the set of partitions P(n) such that for any two non-negative integers k,l the set of partitions α satisfying $\sum_{i=1}^{h-1} t_i = k$ and having l q-singular parts is mapped onto the set of partitions with $\sum_{i=1}^{h-1} t_i = l$ and k q-singular parts (a part α_i is q-singular, iff q divides α_i). It turns out that L_q is something in between usual conjugation (q=1) and identity ($q \geq n$). Some partition identities can be derived from the construction; as special cases one obtains results of Euler, Sylvester, and Fine. Furthermore it can be shown that the group generated by $L_1,\ldots,L_{n-1}$ is the symmetric group on P(n).

References:

Andrews, G.E., The Theory of Partitions, Addison Wesley Publishing Company, London, 1976.

Fine, N.J., "Some Basic Hypergeometric Series and Applications", unpublished monograph, 1954.

Mac Mahon, P.A., Combinatory Analysis Vol.2, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1916 (reprinted by Chelsea, New York, 1960)

Sylvester, J.J., A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion, Amer. J. Math.5, 251-330, 1882-1884.

V. STREHL (Erlangen) :

Symmetric Eulerian Distributions for Involutions.

For any permutation σ of $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ let $d(\sigma) = |\{x \in [n-1] ; \sigma(x) > \sigma(x+1)\}|$ denote the number of *descents* of σ ; for any nonempty subset A_n of S_n , the set of all permutations of $[n]$, let $A_{n,k} := \{\sigma \in A_n ; d(\sigma) = k\}$, $o \leqq k < n$. The sequence $(\text{card } A_{n,k})_{o \leqq k < n}$ is called the *Eulerian distribution* (ED) of A_n ; this distribution is *symmetric* if card $A_{n,\underline{m}+j}$ = card $A_{n,\bar{m}-j}$ for $o \leqq j \leqq \bar{m} - \underline{m}$, where $\underline{m} = \min\{k ; \text{card } A_{n,k} \neq o\}$ and $\bar{m} = \max\{k ; \text{card } A_{n,k} \neq o\}$.

Several examples of symmetric EDs are well-known, e.g. $A_n = S_n$, where the ED is given by the Eulerian numbers (see [2] , [3] , [6]), or the centro-symmetric permutations of [1]. In these cases the proof is by a simple reversion argument.

D. DUMONT has conjectured that the sets I_n of all involutions of $[n]$, and I^o_{2n} of all involutions of $[2n]$ without fixpoints have symmetric EDs. Both assertions are in fact true, since they are consequences of the following

<u>Theorem</u>: *Let λ be a ballot sequence of length 2n (written as a o-1-sequence) and let $I^{o,\lambda}_{2n}$ denote the set of all $\sigma \in I^o_{2n}$ such that the characteristic function of $\{x \in [2n] ; \sigma(x) > x\}$ is λ .*

Then $I^{o,\lambda}_{2n}$ has a symmetric ED (with $\underline{m} + \bar{m} = 2n$).

The proof is by explicit construction of appropriate bijections between $I^{o,\lambda}_{2n,\underline{m}+j}$ and $I^{o,\lambda}_{2n,\bar{m}-j}$. It makes use of the fact that via the ROBINSON-SCHENSTED-correspondence (see e.g.[6]) and FOULKES' "line-of-route" description of descents (see theorem 8.1 in [4]) one has a bijection $\sigma \to \sigma^T$ of S_m onto itself s. th. $d(\sigma) + d(\sigma^T) = m - 1 = d(\sigma^{-1}) + d((\sigma^T)^{-1})$. Actually a stronger property of this map is needed. (Remark: I. GESSEL [5] has established a sieve-type formula for the calculation of the ED of I^o_{2n} ; the symmetry property is not apparent from this.)

Ref.: [1] CARLITZ/SCOVILLE/VAUGHAN , *Duke Math. J.* <u>4o</u>*(1973), 723-741*
[2] COMTET , *ADVANCED COMBINATORICS , D. Reidel 1974*
[3] FOATA/SCHÜTZENBERGER , *Springer Lecture Notes vol.138(1970)*
[4] FOULKES , *Discrete Math.* <u>15</u>*(1976), 235-252*
[5] GESSEL , *(preprint 1980)*
[6] KNUTH , *THE ART OF COMPUTER PROGRAMMING vol.III, Addison-Wesley 1973*

G. VIENNOT (Bordeaux) :

Théorie géométrique des polynômes orthogonaux.

Nous proposons une théorie "combinatoire" ou "géométrique" des polynômes orthogonaux généraux. Cette étude fait suite aux travaux de J. Françon [2], [3] et P. Flajolet [1] sur les "histoires de fichiers" et l'interprétation combinatoire des développements de fonctions en fractions continuées.

Nous introduisons deux familles de chemins valués, l'une interprétant les moments des polynômes orthogonaux, l'autre la récurrence linéaire classique satisfaite par ces polynômes. Nous démontrons alors par des bijections combinatoires sur ces chemins quelques propriétés classiques :

a) démonstration bijective de l'orthogonalité des polynômes satisfaisant la récurrence linéaire (voir [4]).

b) équivalence avec les polynômes réciproques des dénominateurs des réduites de la fraction continuée générale de Jacobi-Stieltjes (voir [6]).

c) interprétation combinatoire de l'inversion de la matrice des coefficients des polynômes (voir [5]).

d) interprétation géométrique de "tassement" dans les fractions continuées.

e) interprétation des déterminants de Hankel des moments (voir [7]).

f) théorie de Meixner, c'est-à-dire caractérisation des polynômes de Scheffer orthogonaux (ou encore "superposition" des deux modèles combinatoires : chemins valués pour l'orthogonalité et composé partitionnel abélien de D. Foata pour la série exponentielle).

La deuxième partie de cette étude consiste à interpréter les coefficients et les moments ainsi que les bijections générales a), b), ..., f), pour les exemples classiques (Tchebytchef, Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner-sécant, polynômes orthogonaux liés aux fonctions elliptiques de Jacobi, q-analogues, etc ...), en exhibant pour chaque exemple la bijection envoyant le chemin valué (ou nombre d'histoires "à la Françon" sur les objets des interprétations usuelles (permutations, involutions, partitions, etc ...).

Enfin, nous montrons l'intérêt d'une telle théorie pour les extensions possibles ou prometteuses dans le cadre de la théorie générale des histoires.

Références :

[1] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, Discrete Maths, 32 (1980) 125-161.

[2] J. FRANCON, Histoires de fichiers, RAIRO Inf. Th., 12 (1978) 49-62.

[3] J. FRANCON, G. VIENNOT, Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, Discrete Mathematics 28 (1979) 21-35.

[4] G. VIENNOT, A combinatorial proof of orthogonality of polynomials, en préparation.

[5] G. VIENNOT, A combinatorial interprétation of the inversion of triangular matrices, en préparation.

[6] G. VIENNOT, A combinatorial interpretation for the convergents of continued fractions and the inversion of matrices, en préparation.

[7] I. GESSEL, G. VIENNOT, A combinatorial interpretation of determinants with non-crossing weighted paths, en préparation.

B. WAGNER (Bayreuth) :

A permutation representation theoretical version of a theorem of Frobenius.

In some of his papers, Frobenius was concerned with numbers of roots of elements of a group. The easiest of his theorems says that for each divisor n of the finite group order, the number of group elements g with $g^n=1$ is a multiple of n. Frobenius also gave representation theoretical generalizations of this theorem.

The same can also be done in the Burnside ring of permutation representations, thus generalizing also a theorem of Solomon and Wielandt's proof of Sylow's theorem.

Theorem: Let G be a finite group of order $|G|$. For each subgroup U of G, G operates on the set G/U of left cosets of U in G by multiplication. For any subgroup $V\leq G$, put

$$\chi^{G/U}(V) := |\{gU\in G/U \mid V\leq \mathrm{Stab}(gU)=gUg^{-1}\}|.$$

Then for each $n \mid |G|$ there are integers a_U $(U\leq G, |U| \mid n)$ such that for all $V\leq G$:

$$\sum_{\substack{U\leq G\\ |U| \mid n}} a_U\, \chi^{G/U}(V) = \begin{cases} |G|/n, & \text{if } |V| \mid n \\ 0, & \text{if } |V| \nmid n. \end{cases}$$

An explicit expression for the linear combination above can be given in terms of meets of those subgroups of G which are maximal in $\{U\leq G: |U| \mid n\}$.

References:

Wagner, Bernd: A permutation representation theoretical version of a theorem of Frobenius, to appear in: Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 6, 1980

and references given there

K. WINKELMANN (Erlangen) :

Weighing Problems and Sums of Permutations.

An n-balance is a device which can be given as input n-tuples $(g_0,\dots,g_{n-1})$ of complex "weights" $g_i \in \mathbb{C}$, and has as output the sum $\sum g_i \omega^i$, where $\omega^n = 1$. Assume there are x-1 objects of some weight G and one "counterfeit" object of weight $G+\omega^i$. Using an n-balance, how many steps does it take to find out the counterfeit ? We showed that k steps suffice for $x < \frac{(n+1)^k-1}{n}$ if n is a prime power, and for $x \leq \frac{(n+1)^k-1}{n}$ if n is not a prime power; and this is best possible. Also, we computed the average number of steps for any x,n.

The investigation of this problem led to another one: For an abelian group G, which functions $f:G \to G$ can be expressed as a sum $f=s+t$ of two permutations $s,t:G \to G$? For finite G, this was solved by M. Hall jr.: he proved that there are such s,t iff $\sum f=0$. Let now G be a countable infinite abelian group. For a given f, let $h=h_f:G \to Z_+$, $h(x)=\#\{y \mid fy=x\}$ and $\operatorname{supp} h = \{x \mid h_f x \neq 0\}$. Results:

1. $\#\operatorname{supp} h = \infty \Rightarrow$ YES, f is a sum of two permutations.
2. $(G=Z,\ \#\operatorname{supp} h<\infty,\ h0=h1=\infty,\ hx<\infty$ for $x\neq 0,1) \Rightarrow$ NO.
3. $(\#\operatorname{supp} h<\infty,\ h0=hz=\operatorname{ord} z=\infty,\ \langle z\rangle \neq G) \Rightarrow$ YES.
4. $(\#\operatorname{supp} h<\infty,\ h0=\infty,\ \forall z(hz=\infty = \operatorname{ord} z<\infty),\ H=\langle x \mid hx=\infty\rangle)$
   $\Rightarrow$ (YES iff $\sum f \equiv 0 \mod H$).

Bibliography

1. A.M. Yaglom & I.M. Yaglom, Probabilité et Information (transl. from Russian), Paris, Dunod, 1959.
2. D.G. Mead, The average Number of Weighings to Locate a Counterfeit coin, IEEE Trans. Inform. Theory IT25, no.5, p. 616-617, Sept. 1979.
3. K. Winkelmann, Das verallgemeinerte Wägeproblem für n-te Einheitswurzeln, Diplomarbeit Erlangen.
4. M. Hall jr., A Combinatorial Problem on abelian groups, Proc. AMS 584-587 (1952).
5. K. Winkelmann, An Improved Strategy for a Counterfeit Coin Problem, IEEE Trans. Inform. Theory, to appear.
6. K. Winkelmann, Sums of Permutations in Groups, Erlangen 1980, unpublished.

Séminaire Lotharingien de Combinatoire
3ème Session
Le Kleebach, 2-3 février 1981

Résumés des communications

M. BARNABEI (Bologna) :

Recursive matrices and Lagrange inversion.

We introduce a monoid of doubly infinite matrices (recursive matrices), whose entries obey a recursion of the kind :

$$m_{i+1,j} = \sum_k a_k \, m_{i,j-k}$$

for some sequence (a_k), where the a_k's range in a commutative integral domain A. This monoid contains a substructure which gives a faithful representation of the compositional monoid of Laurent series with coefficients in A.

Furthermore, we recognize a remarkable duality between row-recurrence and column-recurrence in recursive matrices. This result gives, as a special case, an elementary characteristic-free proof of the Lagrange-Bürmann formula for Laurent series.

Finally, our theory shows that all results of the Umbral Calculus of Roman and Rota are immediate consequences of these two main results on recursive matrices.

References :

[1] M. BARNABEI, A. BRINI and G. NICOLETTI, Polynomial sequences of integral type, J. Math. Anal. Appl., dec. 80.

[2] M. BARNABEI, A. BRINI and G. NICOLETTI, Recursive Matrices and Umbral Calculus, to appear.

[3] M. BARNABEI, A. BRINI and G. NICOLETTI, A General Umbral Calculus, to appear.

[4] G.-C. ROTA, D. KAHANER, A. ODLYZKO, Finite Operator Calculus, J. Math. Anal., (1973).

[5] S. ROMAN & G.-C. ROTA, The Umbral Calculus, Adv. in Math., 27 (1978).

TH. BETH (Erlangen) :

Mathieu Gruppen, Witt Designs and Golay Codes.

Mit einer neuen Methode, die aus dem Golay-Code der Länge 24 die Witt-Designs S(5, 6 ; 12) und S(5, 8 ; 24) konstruiert, wird die Eindeutigkeit des Designs und des Codes gezeigt, wobei gleichzeitig die Automorphismengruppen berechnet werden. Die enge Verflechtung der Beweisschritte für die Kombinatorik der Systeme auf 12 bzw. 24 Punkten erlaubt es, diese Darstellung ohne Rückgriff auf die bekannten Arbeiten von Witt, Lüneburg, Conway and Hughes durchzuführen.

Literatur

Th. Beth & D. Jungnickel, Mathieu Gruppen, Witt-Designs und Golay-Codes, erscheint in Proceedings Lenz Kolloquium, 1978.

D. FOATA (Strasbourg) :

Nouvelles statistiques mahoniennes sur le groupe symétrique d'après Rawlings.

Soient $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ une permutation de $1\,2\ldots n$ et un entier $r \geq 1$. On définit $MAJ_r\,\sigma$ comme étant la somme du nombre des couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$, $\sigma(i) > \sigma(j) \geq \sigma(i) - r + 1$ et du nombre des indices i tels que $1 \leq i \leq n-1$ et $\sigma(i) \geq \sigma(i+1) + r$. Pour $r = 1$ on retrouve l'indice majeur MAJ et pour chaque entier $r \geq n$ le nombre d'inversions INV. Les statistiques MAJ_r ont été introduites par Rawlings [1] pour fournir un q-analogue naturel aux nombres r-Eulériens [2] et donner aussi un q-analogue à la règle de Foulkes [3] sur les crochets gauches. Ces résultats obtenus par Rawlings prolongent ceux de Gansner [4] et de Carlitz [5].

[1] D. RAWLINGS, The r-major index, J. Comb. Theory Ser. A, à paraître.

[2] D. FOATA ET M.P. SCHÜTZENBERGER, Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. n°138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[3] H. O. FOULKES, A nonrecursive rule for Eulerian numbers, J. Comb. Theory Ser. A, 22 (1977), 246-248.

[4] E. GANSNER, A characterization of permutations via shew-hooks, J. Comb. Theory Ser. A, 23 (1977), 176-179.

[5] L. CARLITZ, A note on q-Eulerian numbers, J. Comb. Theory Ser. A, 25 (1978), 90-94.

A. KERBER (Bayreuth) :

Aus der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen.

Aus Abzählproblemen (Boolesche Funktionen, Pos-Funktionen, allgemeines Abzählproblem zur Exponentialgruppe $[G]^H \leq S_{m^n}$, $G \leq S_m$, $H \leq S_n$) ergibt sich folgende Fragestellung für die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen :

$\alpha \vdash m$, $\beta \vdash n$ ergeben die irreduzible Darstellung $(\alpha ; \beta)$ von $[S_m]^{S_n}$ ($\simeq S_m \wr S_n$). Man setze

$$[\alpha] \triangledown [\beta] := (\alpha ; \beta) \uparrow S_{m^n} .$$

Was ist die Zerlegung dieser Exponenzierung $[\alpha] \triangledown [\beta]$ bzw. des entsprechenden Produkts

$$\{\alpha\} \triangledown \{\beta\}$$

von S-Funktionen ?

Es wurden Beispiele angegeben und ein Satz erwähnt, der zeigt, dass sich gewisse Parallelen zu Zerlegungen in Plethysmen ergeben.

Literatur

A. Fröhlich, Die Exponenzierung symmetrischer Gruppen, Diplomarbeit, Aachen, 1978.

E. Gebhardt, Anzahlbestimmung und Konstruktion von Schaltfunktionen, Diplomarbeit, Aachen, 1976-77.

A. Kerber, Der zykelindex der Exponentialgruppe, Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen, 98 (1973), 5-20.

F. Sänger, Plethysmen von irreduziblen Darstellungen symmetrischer Gruppen, Dissertation, Aachen, 1980.

H. LÜNEBURG (Kaiserslautern) :

Der Algorithmus Drehtür.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Abbildung D_k von $\mathbb{N}_0$ in die Menge $E(\mathbb{N}_0)$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ rekursiv durch : $D_{0,m} = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $D_{k,m} = \{a\} \cup D_{k-1,m'}$, wobei a durch $\binom{a}{k} \le m < \binom{a+1}{k}$ bestimmt ist und $m' = \binom{a+1}{k} - 1 - m$ ist. Dann ist D_k für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Bijektion von $\mathbb{N}_0$ auf die Menge aller k-Teilmengen von $\mathbb{N}_0$. Überdies enthält die symmetrische Differenz von $D_{k,m}$ und $D_{k,m+1}$ genau zwei Elemente. Weitere Eigenschaften von D_k wurden diskutiert.

M. MÖRS (Bielefeld) :

Ein neues Ergebnis über das Problem von K. Zarankiewicz.

Zarankiewicz [3] stellte folgendes Problem : Bestimme die kleinste natürliche Zahl $z(m, n, j, k)$, so dass jede 0-1 Matrix mit m Zeilen und n Spalten, die $z(m, n, j, k)$ Einsen enthält, eine Submatrix mit j Zeilen und k Spalten besitzt, die nur aus Einsen besteht.

Hylten-Cavallius [1] bewies : $(\lfloor k/2 \rfloor)^{1/2} \leq \liminf_n z(n, n, 2k). n^{-3/2} \leq \limsup_n z(n, n, 2, k). n^{-3/2} \leq (k-1)^{1/2}$. Wir zeigen : $\lim_n z(n, n, 2, k). n^{-3/2} = (k-1)^{1/2}$. Für den Spezialfall $k = 2$ bzw. $k = 3$ wurde dies Ergebnis bereits von Kövari, Sös und Turan [2] bzw. Hylten-Cavallius [1] gezeigt.

[1] C. Hylten-Cavallius, On a Combinatorial problem, Colloq. Math., 6 (1958), 59-65.

[2] P. Kövari, V. T. Sös, P. Turan, On a problem of K. Zakankiewicz, Colloq. Math., 3 (1954), 50-57.

[3] K. Zarankiewicz, Problem P 101, Colloq. Math., 2 (1951), 301.

D. PERRIN (Rouen) :

Un survol de la théorie des codes.

Un code X sur un ensemble A est, par définition, la base d'un sous-monoïde libre de A^* (le monoïde libre sur A).

Un exemple particulièrement simple de code est celui d'un code préfixe, dans lequel aucun mot n'est facteur gauche d'un autre mot.

Dans cet exposé, on discute de plusieurs conséquences de la conjecture suivant laquelle tout code peut être transformé en un code préfixe par une permutation des lettres dans chacun de ses éléments.

Par exemple, le code $X = \{aa, ba, bb, baa, bba\}$ peut être transformé en $Y = \{aa, ba, bb, aba, abb\}$ qui est un code préfixe.

On montre que la conjecture est vérifiée pour les codes X, que l'on dit très purs, et qui sont ceux qui satisfont la condition

$$\forall u, v \in A^*, \quad uv, vu \in X^* \Rightarrow u, v \in X^* .$$

La preuve se fait par une énumération qui utilise le logarithme de la fonction caractéristique de l'ensemble X^*.

On rappelle ensuite que pour les codes finis qui sont maximaux le polynôme $\alpha(X)$ qui est l'image commutative de X est tel que $1-\alpha(X)$ est divisible par $1-\alpha(A)$. La conjecture équivaut alors à prouver que le quotient n'a que des coefficients positifs. Suivant un théorème de Schützenberger, ce quotient n'est irréductible dans $\mathbb{Z}[A]$ que si X est préfixe ou suffixe. Pour l'exemple ci-dessus

$$1-X = (1+b)(1-a-b)(1+a) .$$

La factorisation est en fait ici non commutative et on obtient ainsi une nouvelle interprétation de la conjecture.

On donne enfin la forme de la conjecture pour les codes X, très simples, vérifiant $X \subset a^* b a^*$. Pour un tel code, la conjecture implique l'inégalité $\mathrm{Card}(X) \leq \max_{x \in X} |x|$. Plusieurs cas particuliers de cette inégalité sont analysés.

Quelques références :

Théorie des Codes (D. P. éd.) Actes de l'Ecole de Printemps de Jougne (1979).

M. P. Schützenberger, Sur certains sous-monoïdes libres, Bull. Soc. Math. de France (1965).

D. P. & M. P. Schützenberger, A conjecture on sets of differences of integer pairs, J. Comb. Th. B (1981).

K. -J. THÜRLINGS (Bayreuth) :

Anzahlbestimmung von Bahnen einer Permutationsdarstellung.

Zuerst wurde eine Verallgemeinerung des Lemmas von Burnside vorgestellt : Sei $\alpha : G \to S_M$ eine Permutationsdarstellung, sei M/α die Menge der Bahnen von α , sei $\rho \in S_M$ mit

(*) $\quad \rho[B] \in M/\alpha$ für alle $B \in M/\alpha$.

Dann folgt :

$$|\{B \in M/\alpha \mid \rho[B] = B\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(\rho \circ \alpha(g))| .$$

Für $\rho = 1_{S_M}$ erhält man das Lemma von Burnside.

Dann wurde eine hinreichende Bedingung für (*) vorgestellt :

$$\rho \in N_{S_M}(\alpha[G]) \Rightarrow \rho \text{ erfüllt } (*) .$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man den folgenden Satz : Seien $\alpha : G \to S_M$, $\omega : H \to S_M$ Permutationsdarstellungen mit $\omega[H] \leq N_{S_M}(\alpha[G])$. Dann kann folgendes Diagramm mit einer Permutationsdarstellung (α, ω) eines semidirekten Produktes $(G, H)_{\alpha, \omega}$ kommutativ ergänzt werden

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\
(G, H)_{\alpha, \omega} \arrow[r, dashed, "{(\alpha, \omega)}"] & S_M \\
G \arrow[u, hook] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Man erhält dann eine vereinfachte Berechnung der Anzahl $|\{B \in M/\alpha \mid \omega(h)[B] = B\}|$ für alle $h \in H$.

G. VIENNOT (Bordeaux) :

Le nombre des permutations de Baxter.

Les permutations de Baxter sont les permutations $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ telles que l'on ne peut trouver quatre indices i, j, k, ℓ satisfaisant les deux conditions suivantes :

(i) soit $1 \leq i < k < \ell < j \leq n$, soit $1 \leq j < \ell < k < i \leq n$.

(ii) $\sigma(\ell) < \sigma(i) < \sigma(j) = \sigma(i)+1 < \sigma(k)$.

Ces permutations apparaissent dans certains problèmes d'analyse relatifs aux points fixes de la composée de deux fonctions continues [1]. Chung, Graham, Hoggatt et Kleiman ont démontré en [2] par un (long) calcul analytique que le nombre B(n) de telles permutations est :

$$B(n) = \frac{1}{\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}$$

Mallows a poursuivi ce calcul [5], pour montrer que le terme individuel B(n, k) de la sommation est le nombre de permutations de Baxter sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant k-1 montées (c'est-à-dire indices i avec $\sigma(i) < \sigma(i+1)$).

Nous donnons [6] une démonstration "bijective" de cette formule en quatre étapes.

a) Traduction de la définition dans la bijection entre les permutations σ et les paires (γ_c, f) où γ_c est un certain chemin coloré du plan et f une fonction dominée par ce chemin. (voir Françon-Viennot [3]).

b) "Redressement" de la paire (γ_c, f) pour obtenir un certain triplet de chemins ne se coupant pas.

c) Utilisation de la théorie géométrique des déterminants (Gessel, Viennot, [4]) pour obtenir un déterminant 3×3.

d) Calcul de ce déterminant qui n'est autre que B(n, k) .

En fait l'étape d) est un cas particulier de la célèbre "formule des équerres" pour les tableaux de Young (avec répétitions de lettres). Nous donnons une (tentative de) preuve bijective. Dans un certain sens la "formule des équerres" est obtenue sans calcul avec uniquement des bijections.

Références

[1] G. BAXTER, On fixed points of the composite of commuting functions, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1954), 851-855.

[2] F. R. K. CHUNG, R. L. GRAHAM, V. E. HOGGATT, M. KLEIMAN, The number of Baxter permutations, J. of Comb. Th. (A) 24, (1978) 382-394.

[3] J. FRANCON, G. VIENNOT, Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, Discrete Maths 28 (1979) 21-35.

[4] I. GESSEL, G. VIENNOT, A combinatorial interpretation of determinants with non-crossing weighted paths, en préparation.

[5] C. L. MALLOWS, Baxter permutations rise again, J. of Comb. Th. (A) 27, (1979) 394-396.

[6] G. VIENNOT, A bijective proof for the number of Baxter permutations, en préparation.

K. VEDDER (Giessen) :

Baer subplanes of finite projective planes.

A subplane of order m of a finite projective plane of order m^2 is called a Baer subplane. A Baer subplane has the property that every element not contained in A is incident with exactly one element of the subplane. Two Baer subplanes intersect in a closed configuration (that is a set which contains with any two points the line through them and with any two lines their point of intersection) which consists of an equal number of points and lines. P. Dembowski proved that a finite projective plane is uniquely determined by the structure which is obtained by deleting all points and all lines of a Baer subplane. This result can be extended to a set of d mutually disjoint (point wise and line wise) subplanes of order m of a plane of order n as long as $d^2-d < n-m$. This implies that we may delete $m-1$ Baer subplanes of a plane of order m^2. We may even delete m Baer subplanes if the plane of order m^2 does not contain the dual of an affine plane of order $m-1$.

References

R. C. BOSE, J. W. FREEMANN, and D. G. GLYNN, On the intersection of two Baer subplanes in a finite projective plane, Utilital Math. 17 (1980), 65-77.

P. DEMBOWSKI, Finite Geometries (p 317), Springer-Verlag, New York (1968).

D. R. HUGHES and F. C. PIPER, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin (1973).

H. SWART and K. VEDDER, Subplane replacement in projective plane, Aequ. Math. (to appear).

K. VEDDER, A note on the intersection of two Baer subplanes (to appear).

K. E. WOLFF (Giessen) :

Some results on point stable designs.

Generalizing the notion of 1-designs we define point stable designs by $NJ = JN$, where $N = A A^T$, A the incidence matrix of the design, J the all-one-matrix. Using four ranks of a design D we classify the point stable designs of a given number of non zero eigenvalues of N and obtain as special cases several well-known characterizations of designs with small ranks. Especially we generalize the theorems of HOFFMAN [2] on connected regular graphs, of BOSE, BRIDGES, SHRIKHANDE [1] on partial geometric designs and also several inequalities for (r, λ)-designs, 2-designs, transversal designs, partial geometric designs and semi partial geometric designs (cf. WOLFF [3]).

References

[1] R. C. BOSE, W. G. BRIDGES, M. S. SHRIKHANDE, A characterization of partial geometric designs, Discrete Mathematics 16, 1-7, 1976.

[2] A. J. HOFFMAN, On the polynomial of a graph, Amer. Math. Monthly, 70, 30-36, 1963.

[3] K. E. WOLFF, Punkt-stabile und semi-partial-geometrische Inzidenzstrukturen, Mitt. Math. Sem. Giessen, 135, 1-96, 1978.

[4] K. E. WOLFF, The rank classification of point stable designs, (to appear in the Europ. J. Math.).

[5] K. E. WOLFF, Uniqueness of the rank polynomials of point stable designs, (to appear in the Math. Zeitschrift).