

UNIVERSITE DE BORDEAUX I
U.E.R. DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNITE ASSOCIEE AU C.N.R.S. 226
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX

CARTES, HYPERCARTES ET
LEURS GROUPES D'AUTOMORPHISMES

par

Robert CORI

n°8420

SEMINAIRE LOTHARINGIEN - BURG FEURSTEIN (AVRIL 1984)

Les homéomorphismes d'une surface qui laissent fixe un graphe connexe jouissent de nombreuses propriétés. Ces propriétés dépendent souvent de la caractéristique d'Euler-Poincaré, ou de manière équivalente, du genre g de la surface. Ainsi, pour $g=0$ il est bien connu que seuls les groupes polyédriques, à savoir les groupes cycliques C_n , diédraux D_n (où n est quelconque) les groupes alternés A_4 et A_5 et le groupe symétrique S_4 peuvent être rencontrés. Pour $g \geq 2$ c'est un résultat d'Hurwitz sur les surfaces de Riemann qui permet d'en borner l'ordre par $84(g-1)$.

On considère souvent un graphe plongé dans une surface comme un couple (σ, α) formé d'une permutation σ et d'une involution sans point fixe α qui engendrent un groupe opérant transitivement sur un ensemble fini de brins. Ce couple est souvent appelé carte combinatoire. Ce point de vue qui est implicite chez certains auteurs a été systématiquement utilisé par A. JACQUES [4], [5].

Le but du présent exposé est de présenter avec cette terminologie les résultats connus qui deviennent donc des propriétés des groupes de permutations. En effet, les sommets, arêtes, faces de la représentation topologique d'un graphe sont les cycles des permutations σ , α et $\alpha\sigma$ respectivement, le genre est alors une fonction simple de ce nombre de cycles. Les homéomorphismes de la surface qui préservent le graphe correspondent aux permutations φ qui commutent avec σ et α . Et la classification de ces groupes se ramène donc au problème combinatoire de la détermination du commutateur d'un couple formé par une permutation quelconque σ et une involution sans point fixe α engendrant un groupe transitif.

Il se trouve que les résultats obtenus restent valables si l'on n'impose pas à α d'être une involution (en prenant une bonne définition pour le genre d'un couple de permutations \uparrow) ; au contraire, les preuves en sont simplifiées, c'est ce qui motive l'introduction de la notion d'hypercarte comme couple de permutations qui engendrent un groupe transitif.

Nous rappelons dans un premier paragraphe les grandes lignes du passage de la notion topologique à la notion de carte combinatoire. La partie 2 donne les définitions relatives aux hypercartes ; on y démontre en particulier, en détail, le fait que le genre est un entier non négatif. La partie 3 est consacrée aux automorphismes d'une hypercarte ; on donne les grandes lignes d'une preuve du résultat "tout groupe G est isomorphe à un groupe d'automorphismes d'une hypercarte". Le genre intervient dans la partie 4, la notion d'hypercarte quotient est utilisée pour énoncer une propriété analogue pour les groupes de permutations à la formule de Riemann-Hurwitz sur les surfaces. Les classifications des groupes opérant sur les surfaces de genre $g=0$ et $g \geq 2$ sont obtenus comme conséquence. La dernière partie enfin aborde l'étude des groupes d'automorphismes des hypercartes régulières à une seule face, ces groupes qui sont des groupes cycliques ont un ordre qui ne dépend que de la taille des cycles des permutations σ et α et non de celle de l'ensemble sur lequel elles opèrent.

o0o

I - CARTES COMBINATOIRES

Rappelons qu'un graphe Γ est donné par un ensemble X de sommets et un ensemble E d'arêtes, chaque arête ayant pour extrémités deux sommets non nécessairement distincts. Un chemin $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, x_k, e_k, x_{k+1}$ est une suite de sommets et d'arêtes telle que pour $i=1, \dots, k$ x_i et x_{i+1} sont extrémités de e_i . Le chemin est dit relier x_1 à x_{k+1} . Un graphe est connexe si tout couple de sommets est relié par un chemin.

Une représentation \mathcal{C} d'un graphe connexe Γ (ou carte) sur une surface orientable Σ est constituée par une partition de Σ en trois sous-ensembles disjoints S, A et F tels que :

(1) S est un ensemble fini de points en correspondance avec les sommets de Γ ,

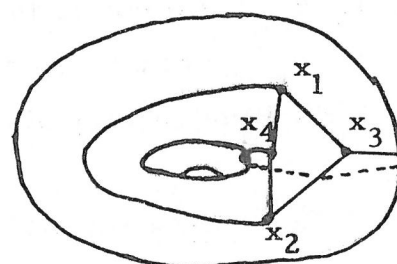
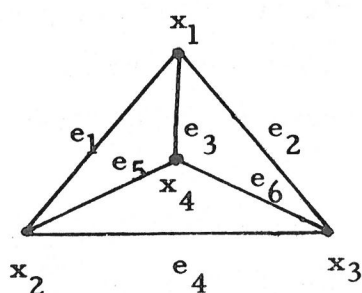
(2) A est union finie disjointe d'arcs simples ouverts de Jordan en correspondance avec les arêtes de Γ dont les extrémités sont des éléments de S . Ceci de telle façon qu'extrémités d'une arête et de l'arc correspondant soient des points et des sommets en correspondance.

(3) F est union finie de domaines simplement connexes deux à deux disjoints dont les frontières sont dans $A \cup S$.

Les éléments de F sont les faces de la carte \mathcal{C} , les éléments de S sont aussi appelés sommets et ceux de A arêtes.

Des considérations topologiques permettent de remplacer une carte par une structure combinatoire. Il s'agit d'indiquer pour chacun des sommets l'ordre dans lequel on rencontre les arêtes en tournant autour du sommet dans le sens donné par l'orientation de la surface. Cet ensemble de familles ordonnées d'arêtes permet de déterminer la carte à un homéomorphisme près de la surface.

Considérons, par exemple, le graphe complet à 4 sommets ayant pour ensemble de sommets x_1, x_2, x_3, x_4 et pour arêtes $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ d'extrémités $e_1 = \{x_1, x_2\}$, $e_2 = \{x_1, x_3\}$, $e_3 = \{x_1, x_4\}$, $e_4 = \{x_2, x_3\}$, $e_5 = \{x_2, x_4\}$, $e_6 = \{x_3, x_4\}$. Ce graphe admet les deux représentations suivantes, l'une sur la sphère, l'autre sur le tore.



On obtient ainsi :

		représentation sur la sphère	représentation sur le tore
ordre des arêtes	autour de x_1	e_1, e_3, e_2	e_1, e_3, e_2
	autour de x_2	e_1, e_4, e_5	e_1, e_4, e_5
	autour de x_3	e_2, e_6, e_4	e_2, e_4, e_6
	autour de x_4	e_3, e_5, e_6	e_3, e_6, e_5

On voit ainsi apparaître la notion de couple arête, sommet-extrémité, notion à qui l'on fera jouer un rôle de base dans la suite. Un brin est un couple formé par une arête et l'un de ses sommets extrémités,

ainsi à chaque arête sont associés deux brins et les permutations circulaires des brins autour de chaque sommet déterminent la carte.

On obtient alors :

Une carte combinatoire est donnée par un ensemble B de brins, une involution sans point fixe α sur B dont les cycles sont les arêtes de la carte et une permutation σ dont les cycles sont les sommets de la carte. La connexité du graphe qu'elle représente se traduit par la transitivité du groupe $\langle \sigma, \alpha \rangle$, engendré par les permutations σ et α .

Exemple : Les deux cartes représentant le graphe complet à 4 sommets sont constitués de 2 permutations opérant sur un ensemble de 12 brins $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$\alpha = (1, 7) (2, 8) (3, 9) (4, 10) (5, 11) (6, 12)$ est la même pour les deux représentations et l'on a :

pour la sphère : $\sigma_1 = (1, 3, 2) (7, 4, 5) (8, 6, 10) (9, 11, 12)$

pour le tore : $\sigma_2 = (1, 3, 2) (7, 4, 5) (8, 10, 6) (9, 12, 11)$.

Une face sur la surface est parcourue en empruntant une arête puis en tournant autour d'un sommet puis en empruntant de nouveau une arête, et ainsi de suite. Ainsi, les faces de la représentation topologique correspondent aux cycles de la permutation produit. Sur les deux exemples traités plus haut, on obtient :

- sur la sphère 4 faces soit 4 cycles pour $\alpha\sigma_1 = (1, 9, 5) (2, 7, 10) (3, 8, 12) (4, 11, 6)$
- sur le tore 2 faces soit 2 cycles pour $\alpha\sigma_2 = (1, 9, 6, 2, 7, 10, 12, 5) (3, 8, 4, 11)$.

Les nombres f de faces, s de sommets et a d'arêtes d'une carte sont liés au genre g de la surface sur laquelle elle est plongée par la relation :

$$a + 2 - 2g = s + f .$$

En oubliant la représentation topologique on obtient qu'une carte est un couple (σ, α) de permutations opérant sur un ensemble B de brins et telle que :

- (i) α, σ engendrent un groupe $\langle \alpha, \sigma \rangle$ transitif
- (ii) α est une involution sans point fixe.

Les cycles de σ, α et $\alpha\sigma$ constituent les sommets arêtes et faces de la carte.

En notant $z(\theta)$ le nombre de cycles de la permutation θ le genre g d'une carte est donné par :

$$2g = 2 + z(\alpha) - z(\sigma) - z(\alpha\sigma) .$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant que ce genre est toujours un entier positif ou nul.

o0o

II - HYPERCARTES

La condition imposée à α d'être une involution sans point fixe complique de fait les constructions qui seront effectuées dans la suite, sans apporter de résultat supplémentaire. On s'en affranchit en définissant :

Une hypercarte est un couple (σ, α) de permutations opérant sur un ensemble fini B de brins tel que le groupe $\langle \sigma, \alpha \rangle$ engendré agit transitivement sur B . Les cycles de σ , α et $\alpha\sigma$ sont respectivement les sommets arêtes et faces de l'hypercarte.

Il est possible d'associer une carte à une hypercarte [1], [7], et ainsi d'obtenir une représentation topologique d'une hypercarte : les cycles de σ sont représentés par des domaines disjoints simplement connexes d'une surface, de même pour ceux de α qui intersectent les premiers en des points isolés représentant les brins.

Un exemple d'hypercarte :

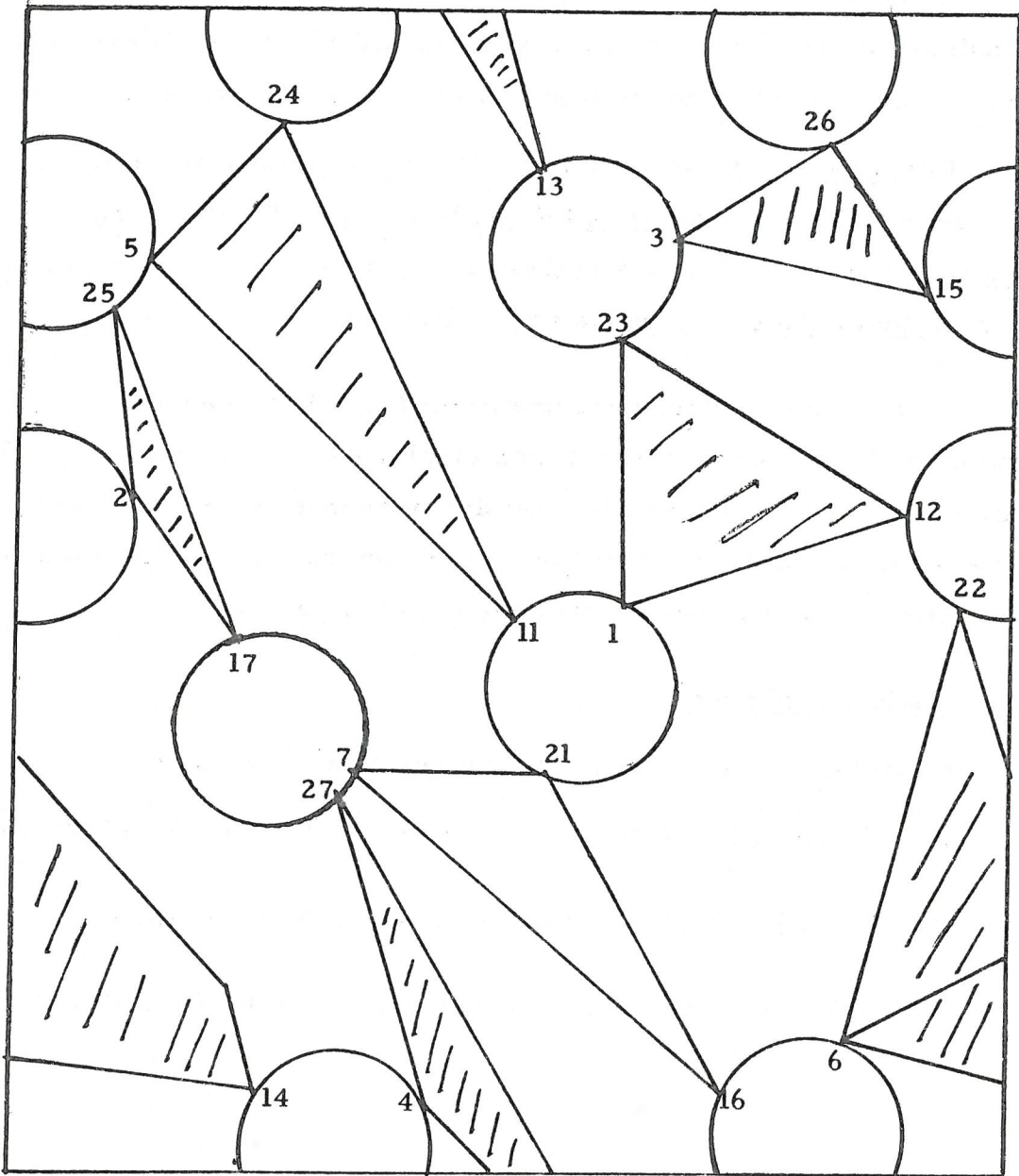
Considérons l'ensemble B composé des 21 brins :

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$$

$$\sigma = (1, 11, 21) (2, 12, 22) (3, 13, 23) (4, 14, 24) (5, 15, 25) (6, 16, 26) (7, 17, 27)$$

$$\alpha = (1, 12, 23) (11, 24, 5) (21, 7, 16) (2, 17, 25) (22, 6, 14) (3, 15, 26) (13, 27, 4).$$

On peut la représenter sur le tore de la façon suivante :



Soit n le nombre d'éléments de B , le genre de l'hypercarte (σ, α) est le nombre g donné par la relation :

$$z(\sigma) + z(\alpha) + z(\alpha\sigma) = n+2 - 2g$$

où $z(\sigma)$, $z(\alpha)$, $z(\alpha\sigma)$ désignent le nombre de cycles des permutations σ , α et $\alpha\sigma$.

Remarquons que dans le cas où α est une involution sans point fixe, on a $n = 2z(\alpha)$ et on retrouve la relation donnée dans le paragraphe précédent.

Nous nous proposons de démontrer que g est un entier positif ou nul et, pour cela, nous utilisons un certain nombre de lemmes :

LEMME II.1. - Soient σ une permutation opérant sur B , τ une transposition qui échange deux éléments b et b' de B . Si b et b' sont dans un même cycle de σ on a : $z(\sigma\tau) = z(\tau\sigma) = z(\sigma)+1$, sinon (b et b' sont dans des cycles distincts) : $z(\sigma\tau) = z(\tau\sigma) = z(\sigma) - 1$.

La preuve de ce lemme est obtenue par un calcul simple de $\sigma\tau$ en examinant les deux cas intervenant dans l'énoncé du lemme.

LEMME II.2. - Soit (σ, α) une hypercarte, si σ n'est pas circulaire, il existe alors deux brins b, b' qui sont dans un même cycle de α et dans des cycles disjoints de σ . De plus, les groupes engendrés par $(\sigma\tau, \alpha\sigma)$ et par $(\sigma\tau, \tau\alpha)$ sont transitifs sur B (τ est la transposition qui échange b et b').

Ceci est une simple conséquence du fait que σ, α est transitif sur B .

LEMME II.3. - Si (σ, α) est une hypercarte ayant n brins alors

$$z(\sigma) + z(\alpha) \leq n+1 .$$

Preuve : Effectuons une récurrence sur le nombre de cycles de σ .
 Si σ n'a qu'un seul cycle, le résultat est immédiat car une permutation α ne peut avoir plus de n cycles . Sinon soit τ dont l'existence est assurée par le lemme II.2, le lemme II.1 donne $z(\sigma\tau) = z(\sigma) - 1$; on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et obtenir $z(\sigma\tau) + z(\alpha\tau) \leq n+1$.
 Mais le lemme II.1 donne aussi $z(\alpha\tau) = z(\alpha) + 1$, d'où le résultat. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le :

THEOREME. - Le genre d'une hypercarte est un entier positif ou nul.

Preuve : Montrons tout d'abord que c'est un entier . La parité d'une permutation σ est la même que celle du nombre $n - z(\sigma)$, ainsi $n - z(\sigma) + n - z(\alpha) + n - z(\alpha\sigma)$ est toujours un nombre pair , il en est donc de même pour $n - z(\sigma) - z(\alpha) - z(\alpha\sigma)$. Pour obtenir $z(\sigma) + z(\alpha) + z(\alpha\sigma) \leq n+2$, on effectue encore une récurrence sur le nombre de cycles de σ . Si σ n'a qu'un cycle et puisque le groupe engendré par α, σ est le même que celui engendré par $\alpha, \alpha\sigma$ on a, d'après le lemme précédent :

$$z(\alpha) + z(\alpha\sigma) \leq n+1$$

d'où le résultat.

Si σ a plus d'un cycle, le lemme 2 indique l'existence de τ telle que $\sigma\tau, \tau\alpha$, engendrent un groupe transitif et tel que $z(\sigma) = z(\sigma\tau) + 1$.
 L'hypothèse de récurrence donne alors : $z(\sigma\tau) + z(\tau\alpha) + z(\tau\alpha\sigma\tau) \leq n+2$.
 Mais $\tau\alpha\sigma\tau$ est conjuguée de $\alpha\sigma$ et a donc même nombre de cycles ; de plus, $z(\tau\alpha) = z(\alpha) + 1$ d'où le résultat.

III - AUTOMORPHISMES

Deux cartes sur une même surface sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de la surface qui transforme les sommets arêtes et faces de l'une en les sommets arêtes et faces de l'autre en conservant les relations d'incidence. Ceci se traduit assez simplement sur les structures combinatoires.

DEFINITION. - Deux hypercartes σ_1, α_1 et σ_2, α_2 opérant sur des ensembles B_1 et B_2 de brins sont isomorphes s'il existe une bijection φ de B_1 sur B_2 telle que :

$$\varphi\sigma_1 = \sigma_2\varphi ; \quad \varphi\alpha_1 = \alpha_2\varphi .$$

Un automorphisme φ d'une hypercarte est un isomorphisme de (B, σ, α) sur elle-même ; ainsi : $\sigma\varphi = \varphi\sigma$ et $\alpha\varphi = \varphi\alpha$.

Exemple : Sur l'hypercarte donnée au paragraphe précédent, on a les automorphismes :

$$\varphi_1 = (1, 11, 21) (2, 13, 24) (6, 17, 25) (4, 12, 23) (3, 14, 22) (5, 16, 27) (7, 15, 26)$$

$$\varphi_2 = (1, 2, 4, 6, 3, 7, 5) (11, 12, 14, 16, 13, 17, 15) (21, 22, 24, 26, 23, 27, 25).$$

On obtient assez facilement le premier résultat suivant :

LEMME III.1. - Tout automorphisme φ d'une hypercarte est une permutation régulière (i.e. ses cycles sont de même longueur).

Preuve : Par transitivité il suffit de vérifier que b , αb et σb sont dans des cycles de φ de même longueur ; or, ceci résulte de :
 $b = \varphi^k b \Leftrightarrow \sigma b = \sigma \varphi^k b \Leftrightarrow \sigma b = \varphi^k \sigma b$. Et de même pour α . \square

L'ensemble des automorphismes d'une hypercarte constitue de manière évidente un groupe, c'est l'étude de ces groupes que nous nous proposons d'entreprendre. Montrons tout d'abord que tout groupe fini G est isomorphe à un groupe d'automorphisme d'une hypercarte. Pour cela, donnons nous un ordre total sur les éléments de G , $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ et comptons les indices modulo k .

LEMME III.2. - Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des automorphismes d'une hypercarte.

La preuve utilise le graphe de Cayley du groupe G et une carte qui le représente. Les brins sont les éléments du produit cartésien $G \times G$, la carte σ, α est donnée par :

$$\sigma(g, g_i) = (g, g_{i+1}) \text{ et } \alpha(g, g_i) = (gg_i, g_i^{-1}).$$

Il est alors clair que pour tout élément h de G on peut définir l'automorphisme φ_h par :

$$\varphi_h(g, g_i) = (hg, g_i) \text{ et vérifier que :}$$

$$\varphi_h \sigma(g, g_i) = (hg, g_{i+1}) = \sigma \varphi_h(g, g_i) ; \varphi_h \alpha(g, g_i) = (hgg_i, g_i^{-1}) = \alpha \varphi_h(g, g_i) ;$$

de plus, $\varphi_h \varphi_{h'} = \varphi_{hh'}$. Ainsi les φ_h constituent un sous-groupe de $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ isomorphe à G . \square

Etant donnée une hypercarte (B, σ, α) un étiquetage est une application de B dans un ensemble fini E , un automorphisme φ d'une hypercarte étiquetée conserve les couleurs, ainsi φ vérifie :

$$\varphi \sigma = \sigma \varphi, \varphi \alpha = \alpha \varphi, \varphi \varepsilon = \varepsilon \varphi.$$

LEMME III. 3. - Tout groupe est isomorphe au groupe d'automorphismes d'une hypercarte étiquetée.

Il suffit d'utiliser l'hypercarte utilisée dans le lemme précédent et de définir pour étiquette $\varepsilon(g, h) = h$; soit alors φ un automorphisme de $(\sigma, \alpha, \varepsilon)$, on a $\varphi(g, h) = (g', h')$ et puisque $\varepsilon(g, h) = \varepsilon(\varphi(g, h))$ on a $h = h'$. On peut vérifier aussi du fait de la définition de α et σ que : $\varphi(g_1, h) = (g'_1, h)$ et $\varphi(g_2, h) = (g'_2, h)$ implique $g_1^{-1} g_2 = g_1'^{-1} g_2'$ est un élément k du groupe indépendant de g_1 , alors $\varphi = \varphi_k$.

Pour obtenir le résultat cherché il nous reste à remplacer l'étiquetage par une autre caractéristique du graphe ; pour cela, on crée des arêtes de longueurs différentes suivant l'étiquette, et on obtient :

THEOREME. - Pour tout groupe G il existe une hypercarte $\langle \sigma, \alpha \rangle$ telle que $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ est isomorphe à G .

On considère pour cela l'ensemble des brins B , sous-ensemble de $G \times G \times N$ formé des éléments (g, g_i, j) avec $1 \leq j \leq i$ et l'hypercarte

donnée par :

$$\sigma(g, g_i, 1) = (g, g_{i+1}, 1), \quad \sigma(g, g_i, j) = (g, g_i, j) \text{ si } j \neq 1$$

$$\alpha(g, g_i, j) = (g, g_i, j+1) \text{ si } j \neq i, \quad \alpha(g, g_i, i) = (g, g_i^{-1}, 1).$$

Remarques :

1. - La démonstration peut s'étendre au cas des cartes ;
2. - Elle est fortement inspirée de celle donnée par Frucht [11] pour les graphes.

o0o

IV - AUTOMORPHISMES ET GENRE

La notion d'hypercarte quotient joue un rôle fondamental dans tout ce qui va suivre.

Etant donnée une hypercarte B, σ, α et un sous-groupe G du groupe d'automorphisme $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ on note \sim_G la relation sur B donnée par les orbites de G , on a plus précisément :

$$b \sim_G b' \text{ s'il existe } \varphi \in G \text{ tel que } \varphi b = b' .$$

Le fait que G ne contienne que des éléments qui commutent avec σ et α entraîne :

$$b \sim_G b' \Rightarrow \sigma b \sim_G \sigma b' \text{ et } \alpha b \sim_G \alpha b' .$$

Ainsi σ et α opèrent sur B/\sim_G et on note $\hat{\sigma}$ et $\hat{\alpha}$ l'action de σ et α sur cet ensemble, $(\hat{\sigma}, \hat{\alpha})$ est l'hypercarte quotient de (σ, α) par G .

Exemple : Pour l'hypercarte donnée dans le paragraphe II, soit G le groupe engendré par l'automorphisme φ_1 on obtient :

$$B/\sim_G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\} \text{ (où } \bar{i} \text{ désigne la classe de } i \text{)}$$

$$\text{et } \hat{\sigma} = (\bar{1})(\bar{2}, \bar{4}, \bar{3})(\bar{5}, \bar{7}, \bar{6}), \quad \hat{\alpha} = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{6})(\bar{3}, \bar{4}, \bar{7})(\bar{5}) .$$

On peut symétriquement considérer l'action de φ sur les orbites de σ, α et $\alpha\sigma$ qui est définie du fait de la commutativité entre φ et

ces permutations. Ainsi φ opère sur les sommets S , arêtes A et faces F d'une hypercarte, notons $\chi(\varphi)$ le nombre de points fixes de φ lorsqu'il opère sur SU AUF.

Exemple : On a pour le cas donné plus haut 7 sommets, 7 arêtes et 7 faces et φ_1 agit sur ces ensembles comme les permutations :

$$(s_1) (s_2, s_3, s_4) (s_5, s_6, s_7) ; (a_1, a_6, a_2) (a_3, a_7, a_4) (a_5) ; \\ (f_1, f_2, f_7) (f_3, f_6, f_5) (f_4) . \text{ Ainsi } \chi(\varphi_1) = 3 .$$

On vérifie aussi que : $\chi(\varphi_2) = 0$.

Le théorème suivant permet de lier les genre g de (σ, α) ; γ de $(\hat{\sigma}, \hat{\alpha})$ à l'aide de l'ordre de G (noté $|G|$).

THEOREME. - Soient σ, α une hypercarte, G un sous-groupe de $\text{Aut}(\sigma, \alpha)$, g le genre de (σ, α) et γ celui de $(\hat{\sigma}, \hat{\alpha})$; on a :

$$2g-2 = |G| (2\gamma-2) + \sum_{\substack{\varphi \in G \\ \varphi \neq 1_G}} \chi(\varphi) .$$

Ce résultat peut être considéré comme une version de la formule de Riemann-Hurwitz pour les groupes de permutations. On en trouvera deux preuves différentes dans [17] et [18] la première qui généralise la construction de [15] en utilisant de manière très élégante le lemme de Burnside, la seconde fait appel à l'homologie.

Donnons-en quelques conséquences :

Conséquence 1 : Si (σ, α) est une hypercarte planeire et si φ est un automorphisme non trivial alors $\chi(\varphi) = 2$.

En effet, considérons $G = \langle \varphi \rangle$ le théorème donne :

$$\sum_{k=1}^{0(\varphi)-1} \chi(\varphi^k) = (2-2\gamma) 0(\varphi) - 2 .$$

Cette relation implique $\gamma = 0$, et si φ fixe un élément x dans SUAF il en est de même pour φ^k ainsi $\chi(\varphi^k) \geq \chi(\varphi)$ et $2 0(\varphi) - 2 \geq (0(\varphi) - 1) \chi(\varphi)$ soit $\chi(\varphi) \leq 2$. Ceci est indépendant de φ , ainsi on a aussi $\chi(\varphi^k) \leq 2$ et l'égalité donnée plus haut n'est possible que si $\chi(\varphi^k) = 2$ pour tout k .

On obtient grâce à la conséquence 1 le théorème de structure sur les groupes d'automorphismes des hypercartes planeires comme il est annoncé dans l'introduction, celui-ci s'obtient de la même façon que dans [19].

Conséquence 2 : Si (σ, α) est une hypercarte de genre supérieur ou égal à 2, alors $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ est d'ordre au plus $84(g-1)$.

Si γ est supérieur ou égal à 2, on obtient directement du théorème :

$$|\text{Aut}(\sigma, \alpha)| = \frac{2g-2}{2\gamma-2} - \frac{1}{2\gamma-2} \sum \chi(\varphi) \leq g-2$$

et donc un résultat plus précis.

Un examen plus détaillé de $\sum \chi(\varphi)$ permet aussi d'aboutir au résultat dans le cas où $\gamma=1$ ou bien $\gamma=0$. En fait, pour $\gamma=1$, on obtient : $|\text{Aut}(\sigma, \alpha)| \leq 4g-4$ et pour $\gamma=0$ le nombre 84 intervient du fait suivant :

Si a, b, c sont trois entiers positifs tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 - \frac{1}{42}$$

et cette valeur est atteinte pour $a=2, b=3, c=7$.

o0o

AUTOMORPHISMES DE CARTES REGULIERES

AYANT UNE SEULE FACE

Dans le cas où le groupe engendré par σ, α contient une permutation circulaire \mathfrak{S} le groupe $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ est un sous-groupe du groupe des permutations qui commutent avec \mathfrak{S} lequel est un groupe cyclique. Brenner et Lyndon [22] ont demandé de donner les tailles possibles pour ce groupe dans le cas où σ et α sont des permutations régulières (ont des cycles de même longueur) et où $\alpha\sigma$ est circulaire.

Pour répondre à cette question on est amené, en étudiant en détail les permutations qui commutent, à introduire la notion suivante :

Etant donnée une hypercarte (σ, α) d'ensemble de brins B , nous appelons m-coloration toute application de B dans l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ des entiers modulo m . Si σ, α possède un automorphisme φ , nous disons que la coloration est orthogonale à φ si $\lambda(\varphi(b)) - \lambda(b)$ est indépendant de b . Remarquons alors que l'ordre de φ doit être un multiple de m . Du fait que toutes les orbites de φ ont même longueur, il est assez facile de construire une m-coloration orthogonale à un automorphisme d'ordre m . Dans la suite nous supposerons que φ est d'ordre m et que λ est une m-coloration orthogonale à φ . Alors si b et b' sont dans une même orbite de φ on peut vérifier que :

$$\lambda \sigma(b) - \lambda(b) = \lambda \sigma \varphi(b) - \lambda \varphi(b) = \lambda \sigma(b') - \lambda(b')$$

puisque σ commute avec φ .

On peut donc définir $\lambda \sigma(\bar{b}) - \lambda(\bar{b})$ où \bar{b} est un élément de B/\sim_{φ} et où \sim_{φ} désigne la relation définie par le groupe $\langle \varphi \rangle$ engendrée par φ .

En notant : $\|\sigma\|_{\lambda} = \sum_{\bar{b} \in B/\sim_{\varphi}} [\lambda \sigma(\bar{b}) - \lambda(\bar{b})]$ on obtient :

PROPRIETE IV.1. - Soient σ, α une hypercarte, φ un automorphisme d'ordre m de (σ, α) et λ une m -coloration orthogonale à φ ;
alors :

$$\|\alpha \sigma\|_{\lambda} = \|\sigma\|_{\lambda} + \|\alpha\|_{\lambda} \quad (\text{dans } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

PROPRIETE IV.2. - Soit σ une permutation qui commute avec une permutation régulière φ d'ordre m et telle que toute orbite de φ et de σ s'intersectent en au plus un point ; alors $\|\sigma\|_{\lambda} = 0$ pour toute coloration orthogonale à φ .

PROPRIETE IV.3. - Soient θ une permutation qui opère sur B , φ une permutation régulière sur B telle que le groupe engendré par $\langle \theta, \varphi \rangle$ soit transitif sur B . Il existe alors une coloration orthogonale à φ et telle que :

$$\|\sigma\|_{\lambda} = z(\sigma) \quad (\text{dans } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

De ces propositions on déduit le théorème :

THEOREME. - Soient (σ, α) une hypercarte, φ un automorphisme d'ordre premier, alors $\chi(\varphi)$ le nombre de cellules laissées fixes par φ est différent de 1.

Ainsi si φ est un automorphisme d'ordre premier d'une hypercarte, n'ayant qu'une seule face il fixe nécessairement cette face et donc, d'après le théorème, il fixe aussi soit un sommet, soit une arête, son ordre est donc un diviseur de la longueur de ce sommet ou de cette arête. Des considérations plus fines permettent, de fait, d'obtenir le résultat plus fin suivant :

THEOREME. - Soient σ et α une hypercarte telle que σ n'a que des cycles de longueur l ou a et α des cycles de longueur b ou 1 , alors $\text{Aut} \langle \sigma, \alpha \rangle$ est un sous-groupe du groupe cyclique C_m où m est le plus petit commun multiple de a et b .

o0o

REFERENCES

Cartes, hypercartes et genre :

- [1] R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications. Astérisque n° 27 (1975).
- [2] R. CORI, A. MACHI', Su alcune proprietà del genere di una coppia di permutazioni. Boll. dell'Unione Matematica Italiana, 5, 84-89.
- [3] J. EDMONDS, A combinatorial representation for polyhedral surfaces. Notices American Math. Society (1960), p.646.
- [4] A. JACQUES, Sur le genre d'une paire de substitutions. C.R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968), 625-627.
- [5] A. JACQUES, Constellations et graphes topologiques. In Combinatorial Theory and its applications. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam (1970), p.657-672.
- [6] W.T. TUTTE, What is a map ? Michigan Conference on Graph Theory (1971).
- [7] T. WALSH, Hypermaps versus bipartite maps. J. Comb. Theory B 18 (1975), 155-163.
- [8] A.T. WHITE, Graphs groups and surfaces. Math. Studies (8), North-Holland (1973).

Automorphismes de graphes et de cartes :

- [9] N. BIGGS, Finite group of automorphisms. London Math. Soc., Lecture Notes series Cambridge University Press, 6 (1971).
- [10] A. CAYLEY, The theory of groups : graphical representations. Amer. J. Math. 1 (1878), 174-176.

- [11] R. FRUCHT, Herstellung von Graphen mit Vorgegebener abstrakten Gruppe *Composito Math.* 6 (1938), 239-250.
- [12] R. CORI, A. MACHI', Construction of maps with prescribed automorphism group. *Theoretical computer science* 21 (1982), 91-98.

Automorphismes de cartes suivant le genre :

- [13] L. BABAI, W. IMRICH, On groups of polyhedral graphs. *Discrete Math.* 5 (1973), 101-103.
- [14] L. BABAI, W. IMRICH, Sense preserving groups of polyhedral graphs. *Monatsh. Math.* 79 (1975), 1-2.
- [15] R. CORI, A. MACHI', J.G. PENAUD, B. VAUQUELIN, On the automorphism group of a planar hypermap. *European J. on Combinatorics* 2 (1981), 331-334.
- [16] M. FONTET, Connectivité des graphes et automorphismes des cartes : propriétés et algorithmes. Thèse Université Paris VI (1979).
- [17] A. MACHI', The Riemann-Hurwitz formula for the centraliser of a pair of permutations. *Arkiv der Matematik* 42 (1984), 280-288.
- [18] A. MACHI', Homology of hypermaps. *Journal of the London Math. Soc.* (à paraître).
- [19] H. ZASSENHAUS, The theory of group. Chelsea Publishing Company, New-York (1949).

Automorphismes d'hypercartes régulières :

- [20] G. BIANCHI, R. CORI, Colorings of hypermaps and a conjecture of Brenner and Lyndon. *Pacific J. Maths* 110 (1984), 41-48.
- [21] G. BIANCHI, Groupes d'automorphismes de certaines hypercartes régulières. Thèse 3e cycle Université de Bordeaux I (1983).
- [22] J.L. BRENNER, R.C. LYNDON, Non parabolic subgroups of the modular group. *J. of Algebra* 77 (1982), 311-322.

- [23] J.L. BRENNER, R.C. LYNDON, Permutations and cubic graphs. Pacific J. Maths. 104 (1983), 285-315.
- [24] G.A. JONES, Triangular maps and non congruence subgroups of the modular group. Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 117-123.
- [25] C. TRETAKOFF, Non parabolic subgroup of the modular group. Glasgow Math. J. 16 (1975), 91-102.

o0o