Monoides partiellement commutatifs

de

R. Cori et D. Perrin

On considère une relation binaire symétrique

$$\theta \subset A \times A$$

sur un ensemble fini A nommé alphabet. On note

$$M(A;\theta)$$

le monoide engendré par A avec les relations de commutation

$$ab \sim ba \qquad (a,b \in \theta)$$

On dit que $M(A,\theta)$ est le monoide partiellement commutatif libre sur l'ensemble A relativement à la relation $\theta$ .

Ces monoides à commutation partielle ont été introduits par Foata dans le but d'étudier les problèmes de réarrangements. Dans les notations de Cartier et Foata (Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements, Lecture Notes in Math., 1968) ces monoides apparaissent de la façon suivante: on définit un <u>flot</u> sur un ensemble X comme une application de X dans l'ensemble $X^*$ des mots sur l'alphabet X . On note, pour $x,y \in X$

$$\binom{x}{y}$$

le flot qui envoie x sur y et tout $z \neq x$ sur le mot vide. On note A l'ensemble de ces flots et on définit la relation de commutation

$$\theta = \{ (\binom{x}{y},\binom{z}{t}) \mid x \neq z \}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des flots sur X d'une structure de monoide en posant pour $f,g \in \mathcal{F}(X)$

$$fg(x) = f(x)g(x)$$

On montre alors que le monoide $\mathcal{F}(X)$ est isomorphe au monoide $M(A,\theta)$ avec A et $\theta$ définis ci-dessus.

Nous nous sommes interessés au problème suivant: soit T un ensemble de mots sur l'alphabet A et $\theta$ une relation de commutation. Quelle est en général la structure de l'ensemble

$$[T^*]$$

des mots équivalents par la commutation définie par $\theta$ à un mot de l'ensemble

$$T^* = \{w \in A^* \mid w = t_1 t_2 \ldots t_n, n \geq o,\ t_i \in T\}$$

Une conséquence des constructions que nous avons effectuées est le resultat suivant portant sur la série generatrice

$$f_V(z) = \sum_n \mathrm{Card}(V \cap A^n) z^n$$

relative à l'ensemble $V = [T^*]$.

Théorème: Soit $T \subset A^*$ un ensemble fini de mots sur un alphabet $A$ tel que pour tout èlement $t$ de $T$ la classe

$$[t] = \{w \in A^* \mid s \sim t\}$$

des mots équivalents à $t$ soit reduite à $t$.
Alors la série $f_V(z)$ est rationelle.

Ce résultat est très proche d'un ènoncé de F.M.P. Flé et G. Roucairol (On the serializability of iterated transactions, ACM SIGACT-SIGOPS, 1982) qui nous a conduit à nous intéresser a ce type de problèmes.

Nous avons en fait la preuve d'un énoncé un peu plus général qui sera prochainement publié (Sur la reconnaissabilité dans les monoides partiellement commutatifs libres, à paraitre) et d'autres résultats sur ces problèmes ont été obtenus récemment par M. Clerbont et M. Latteux d'une part et Y. Metivier d'autre part.

Les deux exemples qui suivent illustrent l'énoncé.

EXEMPLE 1.
Soient a et b deux lettres qui commutent et

$$T = \{ab\}$$

Alors $V$ est l'ensemble des mots ayant autant d'occurrences de a que de b et donc

$$f_V(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$$

Ceci montre que $f_V(z)$ n'est pas en général rationnelle quand l'ensemble $T$ ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé.

EXEMPLE 2.
Soit $A = \{a, a', b, b'\}$ et $\theta$ la relation dont le complement $\bar{\theta}$ a pour graphe:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] \\ a' \arrow[r, dash] & b' \end{tikzcd}$$

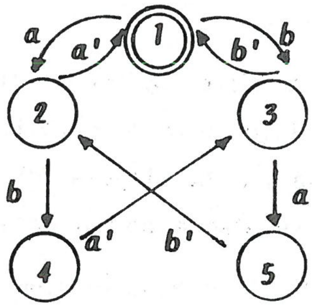
Soit

$$T = \{a a', b b'\}$$

qui satisfait les hypothèses du théorème puisque

$$[a a'] = a a', [b b'] = b b'$$

Alors V est l'ensemble des étiquettes des chemins allant du sommet 1 au sommet 2 dans le graphe ci-dessous:




Dans les notations des expressions rationnelles, on a

$$V = (a(ba'ab')^*(a'+ba'b')+b(ab'ba')^*(b'+ab'a'))^*$$

D'où on déduit le formule

$$f_V(z) = \frac{1}{1-2\,\dfrac{z^2+z^4}{1-z^4}} = \frac{1-z^2}{1-3z^2}$$

Ceci montre que le nombre de mots de longueur 2n dans V est égal à $2 \times 3^{n-1}$ .

Col visto buono di A. Machi

**PUDET, LICET, DECET**

A. Lascoux (p.p.a.)