Universalité des Polynômes de Schubert

A.Lascoux & M.P. Schützenberger

On peut caractériser l'anneau des polynômes symétriques en une infinité de variables par des propriétés algébriques :

1) c'est un $\mathbb{Z}$-module dont la base $\{S_I\}$ est indexée par les partitions (i.e. les suites finies croissantes d'entiers $\geqslant 0$)

2) le produit vérifie les formules de Pieri

$$\forall n\ ,\ \forall I\ ,\qquad S_{1\ldots1}\cdot S_I = \Sigma\, S_J$$

somme sur toutes les partitions $J = (j_1,\ldots,j_p)$, $j_1 = i_1+\epsilon_1$, $j_2 = i_2+\epsilon_2$, ... , $\epsilon_k = 0$ ou 1 , $\Sigma\,\epsilon_k = n$.

Par exemple

$$S_1 \cdot S_{01334} = S_{11334} + S_{02334} + S_{01344} + S_{01335} \ .$$

Comme les représentations irréductibles des groupes symétriques (le produit est induit par $\mathfrak{S}_{p'} \times \mathfrak{S}_{p''} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{p'+p''}$), les représentations irréductibles d'un groupe linéaire (le produit est le produit tensoriel), les classes des variétés de Schubert dans une grassmannienne (le produit est l'intersection) vérifient les formules de Pieri, chacune des algèbres qu'engendrent ces objets est isomorphe à l'anneau des polynômes symétriques, avec comme base canonique les fonctions de Schur.

On veut maintenant caractériser l'anneau des polynômes muni de l'action du groupe symétrique (permutation des indéterminées). La base canonique, en tant que $\mathbb{Z}$-module, n'est pas l'ensemble des monômes, mais la famille des polynômes de Schubert $\{Y_I\}$ indexée par les suites finies d'entiers $\geqslant 0$, et la multiplication est déterminée par les règles de Pieri/Monk :

$$\forall n\ ,\ \forall I\ ,\quad Y_{0..010..0}\cdot Y_I = \Sigma\, Y_J \ .$$

Pour écrire commodément les J apparaissant à droite dans cette formule, on a besoin de "décoder" : une permutation $w = w_1\, w_2\, w_3\, \ldots$ a pour code

la suite finie $J = (j_1, j_2, \ldots)$, où $j_p = \mathrm{card}\{w_n , n>p , w_n<w_p\}$.
Réciproquement, une suite finie (prolongée par un nombre idoine de zéros) donne une permutation et une seule dans chaque $\mathfrak{S}_N$, N assez grand.

Avec ces conventions

$$Y_{0..010..0} \cdot Y_{\mathrm{code}(w)} = \Sigma \; Y_{\mathrm{code}(w')}$$

où les w' sont toutes les permutations obtenues en échangeant une paire (w_i , w_k) , $i\leq n$, $k>n$, telles que $j_1 + j_2 +\ldots+ j_N = i_1 + \ldots + i_N + 1$.

Par exemple,

$$Y_{01000} \cdot Y_{10100} = Y_{30000} + Y_{20100} + Y_{12000} + Y_{11100} \;;$$

puisque 10100 est le code de 21435 et que les permutations 41235, 31425, 24135 et 23415 ont pour codes respectifs 30000, 20100, 12000, 11100 .

Dans le cas particulier où $I = 0\leq i_1\leq i_2 \ldots\leq i_n$, $i_{n+1} = 0 = i_{n+2} = \ldots$ on retrouve la règle de Pieri et le polynôme de Schubert Y_I est la fonction de Schur $S_{i_1\ldots i_n}$.

Les formules de Pieri/Monk sont vérifiées par différentes algèbres de représentations de groupes, ou en géométrie, par l'anneau de cohomologie de la variété de drapeaux, etc... ; ces algèbres sont donc isomorphes à l'anneau des polynômes (pointé par la base canonique des polynômes de Schubert) .

En outre, comme pour les fonctions de Schur, il existe une extension à des algèbres non commutatives (algèbre plaxique, algèbre nilplaxique) pour lesquelles les objets combinatoires fondamentaux sont les tableaux de Young.

Référence : Symmetry and Flag manifold, Springer L.N. 996