Obere Schranken für die Permanente von (1,-1)-Matrizen

Norbert Seifter

Von E.T.H. Wang wurde in [3] folgendes Problem gestellt:

Gibt es eine scharfe obere Schranke für den Betrag der Permanente regulärer (1,-1)-Matrizen?

Zur Formulierung der Vermutungen und Resultate benötigen wir folgende Bezeichnungen:

Ω_n ... Menge aller nxn-(1,-1)-Matrizen
$\tilde{\Omega}_n$ ... Menge der regulären nxn-(1,-1)-Matrizen
$C(n,m)=(c_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{für } n-m<i=j\leq n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$D(n,m)$ ... Menge all jener nxn-(1,-1)-Matrizen
$A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{für } n-m<i=j\leq n \\ -1 \text{ oder } 1 & \text{für } n-m<i<j\leq n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$D'(n,m)$ ... Menge all jener nxn-(1,-1)-Matrizen
$A=(a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{für } n-m<i=j\leq n \\ -1 \text{ oder } 1 & \text{für } n-m<i<j\leq n \\ -1 \text{ oder } 1 & \text{für } i=n-m,\ 1\leq j\leq n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Λ_n^1 ... Menge all jener $A\in\Omega_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- Höchstens eine Zeile und eine Spalte enthalten nur positive Elemente.
- Alle Zeilen und Spalten enthalten höchstens zwei negative Elemente.
- Alle Elemente der Hauptdiagonale (bis auf a_{11}) sind negativ.

Λ_n^2 ... Menge all jener $A \in \Omega_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- Jede Zeile und Spalte enthält mindestens ein und höchstens zwei negative Elemente.
- Alle Hauptdiagonalelemente sind negativ.

Zwei Matrizen $A, B \in \Omega_n$ sind äquivalent, $A \sim B$, wenn wir B aus A durch eine Folge folgender Transformationen erhalten:

(i) vertauschen von Zeilen und Spalten

(ii) transponieren

(iii) Multiplikation von Zeilen und Spalten mit (-1)

Es gilt:

$$(1) \quad A \sim B \Rightarrow |\mathrm{per}A| = |\mathrm{per}B|$$

Das genaue Studium aller Matrizen aus $\Omega_i, i \leq 5$, führt unmittelbar zu folgenden Vermutungen (siehe [1]):

$$(2) \quad |\mathrm{per}A| < \mathrm{per}C(n,n-1)$$

wobei $n \geq 5$, $A \in \tilde{\Omega}_n$, $A \nsim C(n,n-1)$, sowie

$$(3) \quad |\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n)$$

wobei $n \geq 6$, $A \in \tilde{\Omega}_n$, $A \nsim C(n,n-1)$.

(2) und (3) konnten zwar noch nicht vollständig bewiesen werden doch liegen folgende Ergebnisse vor (siehe [1] und [2]), die diese Vermutungen bestätigen:

$$|\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n-1)$$

wobei $A \in \Lambda_n^1$, $n \geq 6$.

$$|\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n)$$

wobei $A \in \Lambda_n^2$, $n \geq 6$.

$$|\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,m)$$

wobei $A \in D'(n,m)$, $n \geq 4$, $1 \leq m \leq n-2$.

$$|\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n-1)$$

wobei $A \in D(n,n-1)$, $n \geq 4$.

$$(4) \quad |\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n-2)$$

wobei $A \in D'(n,n-1)$, $n \geq 4$.

Natürlich gelten diese Abschätzungen wegen (1) auch für alle, zu Matrizen aus den jeweiligen Mengen äquivalenten, Matrizen.

Durch genaues Studium der Matrizen aus $\tilde{\Omega}_i$, $i \leq 5$, erhält man folgendes Ergebnis:

$A \in \tilde{\Omega}_i \Rightarrow$ A ist äquivalent zu einer Matrix aus $D'(i,i-1)$.

Ein Beweis dieses Ergebnisses für $i \geq 6$, sowie eine Verbesserung von (4) zu

$$|\mathrm{per}A| \leq \mathrm{per}C(n,n-1)$$

für $A \nsim C(n,n-2)$ würde die endgültige Lösung des in [3] gestellten Problems bedeuten.

[1] A.R. Kräuter, N. Seifter, Some properties of the permanent of (1,-1)-matrices, J. Lin. Multilin. Alg., in print.

[2] N. Seifter, Upper bounds for permanents of (1,-1)-matrices, submitted.

[3] E.T.H. Wang, On permanents of (1,-1)-matrices, Isr. J. Math. 18 (1974), 753-761.

Norbert Seifter
Institut f. Math. u. Angewandte Geometrie
MU-Leoben
87oo Leoben
Austria