Article à paraître dans
Bull. Soc. Math. France, 113, 1985, p. 3-22.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES BASIQUES MULTIVARIÉES

PAR

JACQUES DÉSARMÉNIEN et DOMINIQUE FOATA (*)

RÉSUMÉ. — L'étude de certaines statistiques sur le groupe symétrique fait apparaître des fonctions hypergéométriques basiques multivariées. De nouvelles identités sur ces fonctions, ainsi que leurs interprétations combinatoires, sont obtenues ici à partir d'un calcul classique sur les fonctions de Schur gauches.

ABSTRACT. — Multivariate basic hypergeometric series occur in the study of certain statistics on the symmetric group. New identities on those functions as well as their combinatorial interpretations are here obtained by means of a classical calculation on the skew Schur functions.

1. Introduction

La théorie des *fonctions hypergéométriques basiques* [2, 3, 23] fait apparaître des séries normalisées par des quantités de la forme $(a;q)_n$

(*) Texte reçu le 30 mai 1984, révisé le 28 novembre 1984.

Cet article a été composé au moyen du logiciel TEX par le laboratoire de typographie informatique du département de mathématique de Strasbourg, puis envoyé sur bande magnétique pour révision au département d'informatique de l'Université Stanford, où le premier auteur était en détachement en 1983-84.

Les légères modifications proposées par l'arbitre anonyme ont été intégrées dans le fichier de saisie rapatrié à Strasbourg. Ce fichier a été ensuite envoyé à la Société Américaine de Mathématique à Providence, R.I. (Etats-Unis), qui, après traitement sur une photo-composeuse ALPHATYPE, d'une résolution de 6.000 points par pouce, a renvoyé un film à partir duquel le présent texte a été imprimé et reproduit.

J. DÉSARMÉNIEN et D. FOATA, département de mathématique, Université Louis-Pasteur de Strasbourg, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

et $(a;q)_\infty$ définies par :

$$(a;q)_0 = 1$$
$$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\ \dots\ (1-aq^{n-1})$$
$$(a;q)_\infty = \lim_n (a;q)_n = \prod_{n\geq 0}(1-aq^n).$$

Les formules suivantes :

$$\sum_n \frac{u^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(u;q)_\infty}, \tag{1.1a}$$

$$\sum_n q^{n(n-1)/2}\frac{u^n}{(q;q)_n} = (-u;q)_\infty, \tag{1.1b}$$

$$\sum_n (a;q)_n \frac{u^n}{(q;q)_n} = \frac{(au;q)_\infty}{(u;q)_\infty}, \tag{1.1c}$$

où n varie de 0 à $+\infty$, sont les outils de base de cette théorie. Les deux premières apparaissent comme des q-analogues de la formule exponentielle. Elles sont aussi deux cas particuliers de la troisième, qu'on désigne habituellement par *formule q-binomiale* (*cf.* [1, 2]).

On connaît assez peu de choses sur les fonctions hypergéométriques basiques à plusieurs variables (*cf.* [2, 3, 23]). En revanche, le développement de certains produits infinis et aussi l'étude de certaines statistiques sur le groupe symétrique font apparaître des identités qui sont probablement des cas particuliers de formules de transformation sur ces fonctions. Pour chaque paire d'entiers positifs r, s, posons :

$$\begin{aligned}(u;q_1,q_2)_{r,s} &= 1, && \text{si } r \text{ ou } s \text{ est nul ;}\\ &= \prod_{1\leq i\leq r}\ \prod_{1\leq j\leq s}(1-uq_1^{i-1}q_2^{j-1}), && \text{si } r, s \geq 1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(u;q_1,q_2)_{\infty,\infty} &= \lim_{r,s}(u;q_1,q_2)_{r,s}\\ &= \prod_{i\geq 1}\prod_{j\geq 1}(1-uq_1^{i-1}q_2^{j-1}).\end{aligned}$$

Les trois développements de produits infinis :

$$\sum_n A_n(q_1,q_2)\frac{u^n}{(q_1;q_1)_n\,(q_2;q_2)_n} = \frac{1}{(u;q_1,q_2)_{\infty,\infty}}, \tag{1.2a}$$

$$\sum_n B_n(q_1,q_2)\frac{u^n}{(q_1;q_1)_n\,(q_2;q_2)_n} = (-u;q_1,q_2)_{\infty,\infty}, \tag{1.2b}$$

$$\sum_n C_n(z,q_1,q_2)\frac{u^n}{(q_1;q_1)_n\,(q_2;q_2)_n} = \frac{(-zu;q_1,q_2)_{\infty,\infty}}{(u;q_1,q_2)_{\infty,\infty}}, \tag{1.2c}$$

peuvent être ainsi considérés comme des identités sur les fonctions hypergéométriques basiques à deux variables.

Considérons enfin les trois identités :

$$(1.3a)\quad \sum_n A_n \frac{u^n}{(t_1;q_1)_{n+1}\,(t_2;q_2)_{n+1}} = \sum_{r,s} t_1^r t_2^s \frac{1}{(u;q_1,q_2)_{r+1,s+1}},$$

$$(1.3b)\quad \sum_n B_n \frac{u^n}{(t_1;q_1)_{n+1}\,(t_2;q_2)_{n+1}} = \sum_{r,s} t_1^r t_2^s (-u;q_1,q_2)_{r+1,s+1},$$

$$(1.3c)\quad \sum_n C_n \frac{u^n}{(t_1;q_1)_{n+1}\,(t_2;q_2)_{n+1}} = \sum_{r,s} t_1^r t_2^s \frac{(-zu;q_1,q_2)_{r+1,s+1}}{(u;q_1,q_2)_{r+1,s+1}},$$

où n, r et s varient de 0 à $+\infty$. Ces trois formules expriment le fait que la série en *deux* variables t_1, t_2 du second membre peut se développer en une série en *une* variable u, convenablement normalisée, les coefficients, comme nous allons le voir, étant des polynômes : $A_n = A_n(t_1,t_2,q_1,q_2)$, $B_n = B_n(t_1,t_2,q_1,q_2)$ et $C_n = C_n(z,t_1,t_2,q_1,q_2)$, respectivement à quatre et cinq variables.

Comme le suggère la numérotation utilisée et comme nous l'indiquerons dans cet article, chaque formule $(1.ic)$ entraîne $(1.ib)$ et $(1.ia)$ pour $i = 1,2,3$. De même, pour x fixé égal à l'une des lettres a,b,c, on a les implications $(1.3x) \Rightarrow (1.2x) \Rightarrow (1.1x)$. La formule (1.3$c$) entraîne donc toutes les précédentes.

C'est Carlitz [4] qui a montré que (1.2a), (1.2b) et (1.2c), cette dernière pour z fixé égal à 1, définissaient trois suites de *polynômes* $A_n = A_n(q_1,q_2)$, $B_n = B_n(q_1,q_2)$ et $C_n = C_n(z,q_1,q_2)$ $(n \geq 0)$ à coefficients *entiers positifs* et satisfaisant à $A_n(1,1) = B_n(1,1) = n!$, $C_n(1,1,1) = n!\,2^n$. Plus tard, Garsia et Gessel [10] ont obtenu l'extension (1.3a) de (1.2a) et montré que l'on définissait ainsi, pour chaque $n \geq 0$, un polynôme A_n à coefficients entiers positifs de somme $n!$. En fait, ils ont trouvé, tout comme Rawlings [16], une interprétation combinatoire pour les polynômes A_n, dont nous reparlerons plus loin.

Il semble que personne jusqu'ici n'ait songé à donner une extension analogue aux formules (1.2b) et (1.2c). Le premier but de cet article est de les fournir. Ces extensions sont précisément (1.3b) et (1.3c), où B_n et C_n sont encore des polynômes à coefficients entiers positifs, la somme de leurs coefficients étant égale à $n!$ et $n!\,2^n$, respectivement.

La variable z que nous rajoutons aussi à (1.2c) a l'avantage de permettre de faire le lien avec le formulaire des fonctions hypergéométriques basiques à une variable.

Par ailleurs, la structure formelle des deux identités (1.2a) et (1.2b) ressemble trop à celle d'identités dues à CAUCHY sur les séries bilinéaires de fonctions de Schur S_λ pour qu'il n'existe pas de lien direct entre ces deux familles de formules. Rappelons que ces identités s'écrivent (*cf.* par exemple MACDONALD [15, p. 33 et 35]) :

$$\sum_\lambda S_\lambda(x)S_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\sum_\lambda S_\lambda(x)S_{\lambda'}(y) = \prod_{i,j}(1+x_iy_j), \tag{1.5}$$

où λ varie dans l'ensemble de toutes les partitions d'entiers, où i et j varient de 0 à $+\infty$ et enfin où λ' désigne la partition conjuguée de λ.

Comme second but de cet article, nous nous proposons de montrer que les expressions analytiques des formules (1.2a) – (1.3c), ainsi que leurs contenus combinatoires, peuvent se déduire des formules (1.4) et (1.5) et des propriétés géométriques des fonctions de Schur, tout particulièrement de leur interprétation en termes de fonctions génératrices de tableaux (*cf.* [15, p. 42]).

Le troisième but de cet article est de calculer les fonctions génératrices des ***involutions*** en utilisant toujours les propriétés combinatoires et algébriques des fonctions de Schur. Rappelons que les formules (linéaires) de Schur sur les fonctions du même nom s'écrivent :

$$\sum_\lambda z^{c(\lambda)}S_\lambda(x) = \prod_i(1-zx_i)^{-1}\prod_{i<j}(1-x_ix_j)^{-1}, \tag{1.6}$$

$$\sum_\lambda z^{r(\lambda)}S_\lambda(x) = \prod_i(1+zx_i)\prod_{i\le j}(1-x_ix_j)^{-1}, \tag{1.7}$$

où $c(\lambda)$ (resp. $r(\lambda)$) désigne le nombre de colonnes (resp. de lignes) de longueur impaire de la partition λ (*cf.* [15, p. 46]). Notons $H_n(z_1,z_2,t,q)$ le polynôme générateur des involutions de $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ par nombre de points fixes, nombre de transpositions, nombre de descentes, indice majeur (ces deux dernières notions seront rappelées au début de la section 2). Notre troisième but est ainsi de montrer que (1.6) et (1.7) permettent d'établir les formules :

$$\sum_n H_n\frac{u^n}{(q;q)_n} = \sum_r t^r\frac{1}{(z_1u;q)_{r+1}}\prod_{0\le i<j\le r}\frac{1}{(1-u^2z_2q^{i+j})}, \tag{1.8}$$

$$\sum_n K_n\frac{u^n}{(q;q)_n} = \sum_r t^r(-z_1u;q)_{r+1}\prod_{0\le i\le j\le r}\frac{1}{(1-u^2z_2q^{i+j})}, \tag{1.9}$$

où $n, r \geq 0$ et où $K_n = K_n(z_1, z_2, t, q)$ désigne un autre polynôme générateur des involutions par des statistiques que nous préciserons dans la section 6. L'identité (1.8) a été obtenue par GESSEL [11] au moyen d'autres techniques combinatoires.

Cette méthode qui consiste à déduire des identités entre q-séries et $q_1 q_2$-séries, ainsi que leur contenu combinatoire, de propriétés géométriques sur le groupe symétrique a été utilisée par DÉSARMÉNIEN [6, 7]. Elle a l'avantage de nécessiter peu de calculs et de n'impliquer aucune vérification de formules de récurrence.

L'organisation de l'article est la suivante. La section 2 contient une description de tous les outils combinatoires mis en œuvre. On y montre en particulier que l'identité (1.3c) entraîne toutes les précédentes formules, son contenu géométrique fournissant également l'interprétation combinatoire de chacune d'elles.

Pour établir ensuite (1.3c), on part d'une définition combinatoire du polynôme $C_n = C_n(z, t_1, t_2, q_1, q_2)$ donnée en (2.10). On exprime ensuite (formule (3.3)) ce polynôme en termes de fonction génératrice de paires de tableaux standard d'une forme appropriée, en faisant appel à la correspondance de Robinson-Schensted (*cf.* [12, p. 48–73] et [18, 20, 22]).

Par ailleurs, on introduit une classe de fonctions de Schur gauches, notées $S_{\lambda\otimes\mu}(x)$, qui permet d'intégrer les propriétés géométriques des tableaux dans le contenu algébrique des fonctions $S_{\lambda\otimes\mu}(1, q, q^2, \ldots, q^r)$. Le théorème 4.1 est en fait l'outil de transfert fondamental.

Partant enfin des formules bilinéaires (1.4) et (1.5), un simple jeu de substitution des indéterminés par des puissances de deux variables q_1, q_2 permet d'établir (1.3c). Ceci fait l'objet de la section 5.

La dernière section, comme nous l'avons dit, est consacrée au calcul des fonctions génératrices des involutions, en faisant usage encore des techniques développées dans les sections précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREWS (George E.). — *The Theory of Partitions.* — Reading, Mass., Addison-Wesley, 1976 (*Encyclopedia of Math. and Its Appl.*, 2).

[2] ANDREWS (George E.) and ASKEY (Richard). — The Classical Orthogonal Polynomials and their Discrete and q-Analogues, Penn. State Univ. and Wisconsin Univ., en préparation.

[3] BAILEY (W.N.). — *Generalized Hypergeometric Series.* — Cambridge University Press, 1935.

[4] CARLITZ (Leonard). — The Expansion of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 7, 1956, p. 558–564.

[5] CHEEMA (M.S.) and MOTZKIN (T.S.). — Multipartitions and Multipermutations, *Combinatorics* [Los Angeles. 1968], p.,39–70. — Providence, Amer. Math. Soc., 1971 (*Proc. Symposia in Pure Math.*, **19**).

[6] DÉSARMÉNIEN (Jacques). — Un analogue des congruences de Kummer pour les q-nombres d'Euler, *Europ. J. Comb.*, t. **3**, 1982, p. 19–28.

[7] DÉSARMÉNIEN (Jacques). — Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série*, t. **16**, 1983, p. 271–304.

[8] FOATA (Dominique) et SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — Major Index and Inversion of Permutations, *Math. Nachr.*, t. **83**, 1978, p. 143–159.

[9] FOULKES (Herbert). — Enumeration of Permutations with Prescribed Up-down and Inversion Sequences, *Discrete Math.*, t. **15**, 1976, p. 235–252.

[10] GARSIA (Adriano M.) and GESSEL (Ira). — Permutation Statistics and Partitions, *Advances in Math.*, t. **31**, 1979, p. 288–305.

[11] GESSEL (Ira). — Counting Permutations by Descents, Greater Index, and Cycle Structure, preprint, Dept. Math., M.I.T., Cambridge, Mass., 1983.

[12] KNUTH (Donald E.). — *The Art of Computer Programming*, vol. 3, Sorting and Searching. — Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1972.

[13] LASCOUX (Alain) et SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — Le monoïde plaxique, *Non-commutative Structures in Algebra and geometric Combinatorics* [A. de Luca, ed., Napoli. 1978], p. 129–156. — Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1981 (*Quaderni de "La Ricerca Scientifica"*, **109**).

[14] LASCOUX (Alain) et SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — Polynômes de Schubert, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **294**, 1982, p. 447–450.

[15] MACDONALD (Ian G.). — *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. — Oxford, Clarendon Press, 1979.

[16] RAWLINGS (Don). — Generalized Worpitzky Identities with Applications to Permutation Enumeration, *Europ. J. Comb.*, t. **2**, 1981, p. 67–78.

[17] RAWLINGS (Don). — The Combinatorics of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1983, p. 560–562.

[18] ROBINSON (Gilbert de Beauregard). — On the Representations of the Symmetric Group, *Amer. J. Math.*, t. **60**, 1938, p. 745–760.

[19] ROSELLE (David P.). — Coefficients associated with the Expansion of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **45**, 1974, p. 144–150.

[20] SCHENSTED (C.). — Longest Increasing and Decreasing Sequences, *Canad. J. Math.*, t. **13**, 1961, p. 179–192.

[21] SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.*, t. **12**, 1963, p. 117–128.

[22] SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — La correspondance de Robinson, *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* [Actes Table Ronde C.N.R.S., Strasbourg. 1976], p. 59–113. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Math.*, **579**).

[23] SLATER (Lucy Joan). — *Generalized Hypergeometric Functions*. — Cambridge Univ. Press, 1966.

[24] STREHL (Volker). — Symmetric Eulerian Distributions for Involutions, *Séminaire lotharingien de combinatoire (Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)*, première session [Strasbourg. 1980], p. 12. — Publ. IRMA Strasbourg, 140/S-02, 1981.