ÜBER DIE q-LAGRANGE INVERSION

von

Peter PAULE

Die folgende Betrachtung der Lagrange Inversion liefert elementare Zusammenhänge bisher weitgehend vereinzelter q-Analoga der Lagrange-Inversionsformeln von Andrews [1], Krattenthaler (beinhaltet die klassischen Fälle von Carlitz und Jackson [2]) [5], und Garsia [3]. (Einen ausgezeichneten Überblick über dieses Gebiet bietet [4].)

Gegeben sei eine formale Potenzreihe (f.P.R.) $f(x)$ (über $\mathbb{C}$). Gewünscht sind explizite Formeln für die Koeffizienten c_n der Darstellung

$$(1) \qquad f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x),$$

wobei

$$g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}, \quad \alpha_k(x) \text{ eine f.P.R. mit } \alpha_k(o) = 1.$$

Auf dem Körper der formalen Laurentreihen (f.L.R.) über $\mathbb{C}$ seien folgende (lineare) Operatoren definiert:

q-Differentiationsoperator D: $(Df)(x) = f'(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$,

Residuumfunktional M: $M\, f(x) =$ Koeffizient von x^{-1} in $f(x)$,

L-Funktional: $L\, f(x) =$ Koeffizient von x^{o} in $f(x)$.

Dann gilt für $h_n(x) = \frac{x^n}{\beta_n(x)}$, $\beta_n(x)$ eine f.P.R. mit $\beta_n(o) = 1$ - - ansonsten beliebig - und

$$R(h_n(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right):$$

(2) $$c_n = [n-1]!\ M\left(\frac{f'(x)}{h_n(x)}\right) - [n-1]!\ R(h_n(x))$$

(3) $$= LD^{n-1}\ f'(x)\ \beta_n(x) - [n-1]!R(h_n(x)) \qquad \text{(1.Version)}$$

(4) $$= q^{-n}\ LD^n\ f(qx)\beta_n(x)\left(1-\frac{x}{[n]}\ \frac{\beta_n'(x)}{\beta_n(x)}\right) - [n-1]!R(h_n(x)). \qquad \text{(2. Version)}$$

(3) und (4) ergeben nach geeigneten Voraussetzungen über $g_k(x)$ und $h_n(x)$ im Limes $q \to 1$ die klassischen Inversionsformeln. (In diesem Fall wird $R(h_n(x)) = 0$.)

Analog zu oben erhält man aus (1) für

$h_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{\beta_n(x)}$, $\beta_n(x)$ f.P.R. mit $\beta_n(o) = 1$ - ansonsten beliebig -:

(5) $$c_n = [n]!\ M\left(\frac{f(x)}{h_{n+1}(x)}\right) - [n]!\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!}\ M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right)$$

(6) $$= LD^n\ f(x)\beta_n(x) - [n]!\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!}\ M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) \qquad \text{(3. Version)}$$

A) Anwendung der Cramerschen Regel auf (3) liefert sofort eine Verallgemeinerung des q-Analogons von Andrews [1], nämlich

(7) $$c_n = LD^{n-1}\ f'(x)\ B_n(x),$$

wobei

$$B_n(x) = \begin{vmatrix} \beta_n(x), & x\ \beta_{n-1}(x), & x^2\ \beta_{n-2}(x), & \dots, & x^{n-1}\ \beta_1(x) \\ \mu_{n,n-1}, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \mu_{n,n-2}, & \mu_{n-1,n-2}, & 1, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \mu_{n,1}, & \mu_{n-1,1}, & \mu_{n-2,1}, & \dots, & 1 \end{vmatrix}$$

mit

$$\mu_{n,k} = \frac{1}{[k]}\ M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right).$$

B) Aus der Tatsache

$$[n-k]!\ M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = [k]LD^{n-k-1}\ \frac{\beta_n'(x)\ \alpha_k(x)}{\alpha_k(x)\ \alpha_k(qx)} - [n]LD^{n-k-1}\ \frac{\beta_n(x)\ \alpha_k'(x)}{\alpha_k(x)\ \alpha_k(qx)}$$

kann man sehr einfach hinreichende Bedingungen für

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = 0 \qquad (1 \le k < n)$$

angeben, woraus sich folgender Satz ergibt, der im wesentlichen von Krattenthaler [5] stammt:

<u>Satz</u>: Gegeben seien f.P.R. $f(x)$, $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ mit $\Phi_\alpha(0) \neq 0$, $\Psi_\alpha(0) \neq 0$,

$$\frac{1}{[\alpha]}\ \frac{\Phi_\alpha'(x)}{\Phi_\alpha(x)} = \Phi(x) \quad \text{und} \quad \frac{q^\alpha}{[\alpha]}\ \frac{\Psi_\alpha'(x)}{\Psi_\alpha(qx)} = \Psi(x) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!}\ \frac{x^k}{\Phi_{k+\lambda}(ax)\ \Psi_{k+\mu}(bx)} \qquad (a,b,\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

$$(8) \qquad c_n = L\ f(D)\ \Phi_\lambda(aD)\ \Psi_\mu(bD)\, x\ \frac{\Phi_{n+\lambda}(aD)\ \Psi_{n+\mu}(qbD)}{\Phi_\lambda(aD)\ \Psi_\mu(qbD)}\ x^{n-1} \qquad (1.\ \text{Version})$$

$$(9) \qquad = LD^n\ f(x)\ \Phi_{n+\lambda}\left(\frac{a}{q}x\right)\ \Psi_{n+\mu}(qbx)\left(1 - \frac{a}{q}x\ \Phi\left(\frac{a}{q}x\right) - bx\Psi(bx) + \right.$$

$$\left. + (1 - q^{\lambda-\mu})\ \frac{ab}{q}\ x^2\ \Phi\left(\frac{a}{q}x\right)\ \Psi(bx)\right).$$

(2. Version)

C) Garsias q-Analogon - vgl. etwa (6.8) in [4] - erhält man aus (5) mit dem unbestimmten Ansatz (um $M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = 0$ zu erreichen)

$$h_{n+1}(x) = \frac{g_{n+1}(x)}{q^n \Psi(q^n x)}, \quad \Psi(x) \text{ eine f.P.R. mit } \Psi(0) = 1.$$

Literatur

[1] G.E. ANDREWS: Identities in combinatorics II: A q-analog of the Langrange inversion theorem. Proc. AMS 53, 240-245 (1975).

[2] J. CIGLER: Operatorenmethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversion und die Lagrangesche Formel. Arch.Math. 35, 533-543 (1980).

[3] A.M. GARSIA: A q-analogue of the Lagrange inversion formula. Houston J.Math. 7, 205-237 (1981).

[4] J. HOFBAUER: Lagrange Inversion. Sitzungsbericht des 6. Treffens des Séminaires Lotharingien de Combinatoire auf Burg Feuerstein. Publ. IRMA Strasbourg (1982).

[5] Ch. KRATTENTHALER: q-Lagrangeformel und inverse Relationen. Dissertation, Univ. Wien 1983.

[6] P. PAULE: A general approach to q-Lagrange inversion. In Vorbereitung.

Peter Paule
Wanger 6
A-4921 Hohenzell
AUSTRIA