UNE COMBINATOIRE DU PLETHYSME

François Bergeron

Département de Mathématique et Informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A, Montréal, CANADA, H3S 1Y8

1. Introduction

Nous étudions, dans cet article, une interprétation combinatoire de la substitution pléthystique de deux séries formelles du type

$$F(x_1,x_2,\dots) = \sum f_{d_1 d_2 \dots d_n}\left(x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots\ x_n^{d_n}\right) \Big/ \left(d_1!\, 1^{d_1}\, d_2!\, 2^{d_2} \cdots d_n!\, n^{d_n}\right), \quad (1)$$

où les coefficients $f_{d_1 d_2 \dots d_n}$ sont des entiers, et où la somme a lieu sur l'ensemble des suites d'entiers $d_1, d_2, \dots, d_n$ avec n quelconque. Non seulement cette substitutiontion particulière joue un rôle important en combinatoire, entre autre dans l'étude des structures à isomorphisme près, mais elle intervient aussi dans la théorie de la représentation des groupes, et dans certains problèmes de théorie des nombres.

Récemnent, O. Nava et G.C. Rota [NR] ont proposé un modèle combinatoire pour cette substitution en terme d'une théorie du même genre que la théorie des espèces de structures de A. Joyal [J]. Plus précisément, ils élaborent la théorie des espèces partitionnelles, et associent à chacune de ces espèces une série formelle du type (1), à un multiple près des coefficients. Ils définissent alors une opération combinatoire entre les espèces partitionnelles qui correspond, en passant aux séries formelles associées, au composé pléthystique. Le lecteur interressé aux variations sur le thème de la théorie des espèces pourra consulter Bergeron [B].

Nous allons plutôt élaborer une interprétation combinatoire de la substitution pléthystique, en terme d'espèces sur les permutations. D'abord parce qu'on peut comprendre plus facilement dans ce contexte les particularités de la substitution pléthystique, mais aussi parce qu'il est possible d'établir un lien important entre la substitution des espèces au sens de Joyal, et celle que nous allons introduire.

Mais rappelons d'abord ce qu'est la substitution pléthystique. Soit donc

$$G(x_1,x_2,\dots)=\sum g_{d_1d_2\dots d_n}\left(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots\ x_n^{d_n}\right)/\left(d_1!\,1^{d_1}\,d_2!\,2^{d_2}\cdots d_n!n^{d_n}\right),$$

une seconde série de type (1) telle que $G(0,0,\dots)=0$. La série $H(x_1,x_2,\dots)$ est obtenue par substitution pléthystique de G dans F, si et seulement si

$$H(x_1,x_2,\dots)=F(G_1,G_2,\dots)$$

où par définition $G_k(x_1,x_2,x_3,\dots)=G(x_{1k},x_{2k},x_{3k},\dots)$. On écrit alors $H=F\circ G$. Il a été remarqué depuis longtemps que l'anneau de ces séries formelles est fermé pour l'opération "$\circ$". En plus d'expliquer ce fait combinatoirement, nous allons aussi expliquer pourquoi $x_n\circ x_k=x_{nk}$.

2. Les espèces sur les permutations

Une espèce de structure au sens de A.Joyal, est un foncteur de la catégorie des ensembles finis (avec comme flèches les bijections), vers la catégorie des ensembles finis. Nous aimerions définir une variante de la théorie des espèces en modifiant la catégorie source de ces foncteurs. Désignons donc $\mathbf{S}$ la catégorie dont les objets sont les couples (A,σ), où σ est une permutation de A, c'est-à-dire que σ est une bijection $\sigma:A \xrightarrow{\sim} A$. S'il n'y a pas risque de confusion, on désigne encore par σ l'objet (A,σ). Une flèche $\varphi:(A,\sigma) \longrightarrow (B,\tau)$ de la catégorie $\mathbf{S}$ est une bijection $\varphi:A \xrightarrow{\sim} B$ telle que $\tau=\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}$.

Une espèce T sur les permutations, ou encore $\mathbf{S}$-espèces, est un foncteur $T:\mathbf{S} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, de la catégorie $\mathbf{S}$, dite des permutations, vers la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles finis. Pour un objet (A,σ) de $\mathbf{S}$, on dit d'un élément de l'ensemble $T[(A,\sigma)]$ que c'est une structure de $\mathbf{S}$-espèce T sur (A,σ). Un morphisme $\alpha:T \longrightarrow P$ de la $\mathbf{S}$-espèce T à la $\mathbf{S}$-espèce P, est une transformation naturelle entre les foncteurs correspondants. On obtient ainsi la catégorie $\mathbf{S}$**-Esp** des $\mathbf{S}$-espèces. Nous désignerons d'autre part par **B-Esp** la catégorie des espèces au sens de Joyal, c'est-à-dire les foncteurs $R:\mathbf{B} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, où $\mathbf{B}$ est la catégorie des ensembles finis avec comme flèches les bijections.

Nous allons introduire un certain nombre d'opérations sur les $\mathbf{S}$-espèces. On a d'abord la somme de deux $\mathbf{S}$-espèces T et P, qu'on définie en posant $(T+P)[\sigma]=T[\sigma]+P[\sigma]$ (somme disjointe). Ensuite, pour pouvoir définir le produit de $\mathbf{S}$-espèces, définissons ce qu'est une dissection d'une permutation. Une dissection d'un objet (A,σ) de $\mathbf{S}$, est un couple $((A_1,\sigma_1),(A_2,\sigma_2))$, où:

I) $A_1+A_2=A$,

II) $\sigma(A_i)=A_i$ pour $i\in\{1,2\}$, et enfin

III) σ_i est la restriction à A_i de σ.

Le seul objet de **S** qui n'admet qu'une seule dissection est $(\emptyset,Id_{\emptyset})$, on le désigne par **0**. Les permutations cycliques n'ont que des dissections triviales, ce sont des objets dits "irréductibles". Géométriquement, une des dissections d'une permutation σ peut se représenter comme:

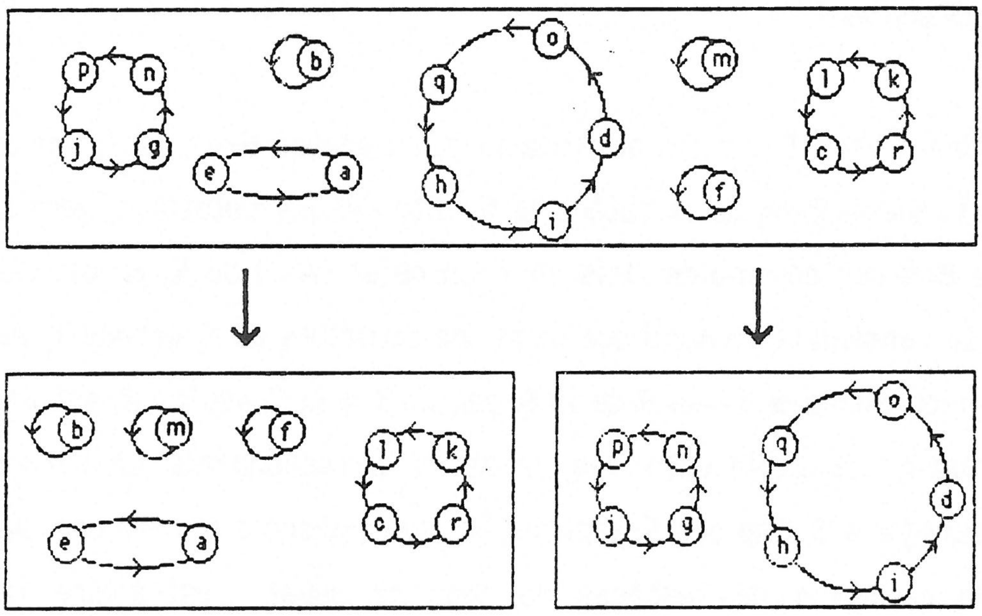

Figure 1

Pour simplifier les notations dans ce qui suit, posons:

$$\gamma(\sigma)=\frac{x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ \cdots\ x_n^{d_n}}{d_1!\,1^{d_1}\,d_2!\,2^{d_2}\cdots d_n!\,n^{d_n}}$$

où d_i est le nombre de cycles de σ de longueur i, n est la cardinalité de l'ensemble sous-jacent à σ, et les x_i sont une infinité de variables distinctes. Il est clair que $\gamma(\sigma)$ ne dépend que du type cyclique de la permutation σ, à savoir le vecteur $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\dots,d_n)$. Pour un tel $\mathbf{d}$, posons encore

I) $\mathbf{d}! = d_1!d_2! \cdots d_n!$

II) $\mathrm{Aut}(\mathbf{d}) = d_1!1^{d_1} d_2!2^{d_2} \cdots d_n!n^{d_n}$

III) $\mathbf{x}^{\mathbf{d}} = x_1^{d_1}x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$, où $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots)$

IV) $\|\mathbf{d}\| = 1d_1+2d_2+\dots+nd_n$,

__Observations__: Deux permutations σ et τ sont isomorphes, au sens de **S**,si et seulement si elles ont le même type cyclique. De plus, il est facile de vérifier que pour **e** et **f** deux types cycliques, l'ensemble des triplets $(\mathbf{d},\sigma_1,\sigma_2)$, où (σ_1,σ_2) est une dissection d'une permutation σ fixée de type $\mathbf{d}=\mathbf{e}+\mathbf{f}$, σ_1 est de type **e**, et σ_2 est de type **f**, a comme cardinalité $\mathbf{d}!/\mathbf{e}!\,\mathbf{f}!$.

A toute **S**-espèce **T**, on peut associer la série:

$$\mathbf{Card}(T) = \sum_{|\sigma|} {}^{\#}T[\sigma]\,\gamma(\sigma) \ ,$$

où $|\sigma|$ varie dans l'ensemble des type cycliques. **Card**(T) est donc une série à une infinité de variables $x_1,x_2,\dots$; on la désigne par $T(x_1,x_2,\dots)$. La série ainsi associée à une **S**-espèce **T** est encore appelée *série indicatrice de cycles* (ou plus simplement: *série indicatrice*) de T. Il est facile de vérifier que **Card**, considéré comme "fonction", respecte la somme. C'est-à-dire que $\mathbf{Card}(T+P)=\mathbf{Card}(T)+\mathbf{Card}(P)$.

Définissons le produit $T\bullet P$ de deux **S**-espèces **T** et **P**, comme

$$(T \bullet P)[\sigma] = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} T[\sigma_1] \times P[\sigma_2],$$

où la somme a lieu sur l'ensemble des dissections (σ_1,σ_2) de σ. Il découle directement de cette définition et des observations ci-dessus, que $\mathbf{Card}(T \bullet P) = \mathbf{Card}(T)\,\mathbf{Card}(P)$.

Comme premier exemple de $\mathbb{S}$-espèce, considérons $\mathbf{C}_n$, telle que:

$$\mathbf{C}_n[\sigma] = \begin{cases} \{\sigma\} & \text{, si } \sigma \text{ est un cycle de longueur } n \\ \varnothing & \text{, sinon} \end{cases}$$

La série indicatrice de $\mathbf{C}_n$ est x_n/n. Il résulte de la définition du produit que $(\mathbf{C}_n)^k$ est une $\mathbb{S}$-espèce telle que $(\mathbf{C}_n)^k[\sigma]$ est non vide seulement lorsque σ a exactement k cycles tous de longueur n. La donné d'un élement de $(\mathbf{C}_n)^k[\sigma]$ correspond alors à la donné d'un ordre total sur ces cycles. Cette remarque suggère de désigner par $(\mathbf{C}_n)^k/k!$ la $\mathbb{S}$-espèce caractéristique des permutations ayant k cycles de longueur n. La série indicatrice de cycles de $(\mathbf{C}_n)^k/k!$ est alors $(x_n)^k/n^k(k!)$. On en conclue plus généralement que pour $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\dots,d_n)$, $(\mathbf{C}_1^{d_1}\mathbf{C}_2^{d_2} \;\dots\; \mathbf{C}_n^{d_n})/\mathbf{d}!$ est la $\mathbb{S}$-espèce caractéristique des permutations de type $\mathbf{d}$, i.e. ayant exactement d_1 cycles de longueur 1, d_2 cycles de longueur 2, ... , et d_n cycles de longueur n. Le lecteur aura probablement déjà deviné que la série indicatrice de cycles de cette $\mathbb{S}$-espèce est $\mathbf{x}^{\mathbf{d}}/\mathbf{d}!$.

Comme autre type d'exemples, considérons la $\mathbb{S}$-espèce **Cycle** caractéristique des cycles, c'est-à-dire que:

$$\mathbf{Cycle}[\sigma] = \begin{cases} \{\sigma\} & \text{, si } \sigma \text{ est un cycle} \\ \varnothing & \text{, sinon} \end{cases}$$

On observe alors que la série indicatrice de **Cycle** est $\sum_n x_n/n$. Si d'autre part on désigne par **U** la **S**-espèce telle que, pour toute permutation σ, $U[\sigma]=\{\sigma\}$, alors il s'ensuit que:

$$\mathrm{Card}(U)=\sum_{\mathbf{d}} \mathbf{x}^{\mathbf{d}}/\mathrm{Aut}(\mathbf{d})$$

où $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ et $\mathbf{d}$ varie dans l'ensemble des tuplets $(d_1,d_2,d_3,\ldots,d_n)$ avec n quelconque. Enfin, pour n et k deux entiers positifs non nuls, on désigne par $C_{n,k}$ la **S**-espèce telle que pour σ une permutation de l'ensemble fini **A**, on ait:

$$C_{n,k}[A,\sigma]=\begin{cases}\{B \mid B\subseteq A,\ {}^{\#}B=n,\ \text{et}\ \sigma^k(B)=B\}, & \text{si } \sigma \text{ est un cycle de longueur } nk\\ \varnothing & \text{, sinon.}\end{cases}$$

On dit d'une $C_{n,k}$-structure sur un cycle σ (de longueur nk), que c'est un cycle n-pointé. La série indicatrice associée à cette espèce est x_{nk}/n.

3. Substitution

Afin de pouvoir définir la substitution pour les **S**-espèces, commençons par rappeler quelques définitions auxiliaires. Pour $\equiv$ une relation d'équivalence sur un ensemble fini **A**, et pour une bijection σ du même ensemble, on définit la relation d'équivalence $\equiv_\sigma$ en posant: $a\equiv_\sigma b$, si et seulement si $\sigma(a)\equiv\sigma(b)$. On dit d'une relation d'équivalence $\equiv$ sur **A** qu'elle est *compatible* avec une permutation σ de **A**, si et seulement si $\equiv$ et $\equiv_\sigma$ coïncident. Pour chaque relation d'équivalence $\equiv$, on désigne encore par $A/\equiv$ l'ensemble des classes d'équivalence de **A** suivant $\equiv$. Lorsque $\equiv$

est compatible avec σ, on peut définir une permutation $\sigma/\equiv$ de $A/\equiv$ en posant, pour $B \in A/\equiv$, $(\sigma/\equiv)(B) = \sigma(B)$. De plus, pour chaque classe d'équivalence $B \in A/\equiv$, on peut définir la *trace* σ_B de σ sur B en posant, pour $b \in B$, que $\sigma_B(b) = \sigma^k(b)$, où k est le plus petit entier (>0) tel que $\sigma^k(b)$ soit dans B (k ne dépend que de B et σ).

Définition de la substitution

Soit P une S-espèce telle que $P[0] = \varnothing$, et T une S-espèce quelconque. La *substitution* $T \circ P$ de P dans T se définit de la façon suivante. Pour chaque objet $(A,\sigma) \in S$, une structure de S-espèce $T \circ P$ sur (A,σ) est la donnée:

I) d'une relation d'équivalence $\equiv$ sur A compatible avec σ,

II) d'une T-structure sur $(A/\equiv, \sigma/\equiv)$,

III) et enfin, pour chaque $B \in A/\equiv$, d'une P-structure p_B sur (B,σ_B), avec la condition de compatibilité: $P[\sigma](p_B) = p_{\sigma(B)}$. (Il y a ici un léger abus de notation dans le membre de gauche, σ désigne la flèche de σ_B à $\sigma_{\sigma(B)}$ correspondant à la restriction de σ à B.)

Il est plus facile de comprendre le sens de cette définition si l'on a une bonne représentation des relations d'équivalences $\equiv$ avec une permutation σ, du quotient $\sigma/\equiv$ de σ par $\equiv$, et enfin de la trace σ_B de σ sur une classe B. Nous illustrons ci-dessous ces concepts.

I) Une relation d'équivalence $\equiv$ compatible avec σ prend en général l'allure suivante:

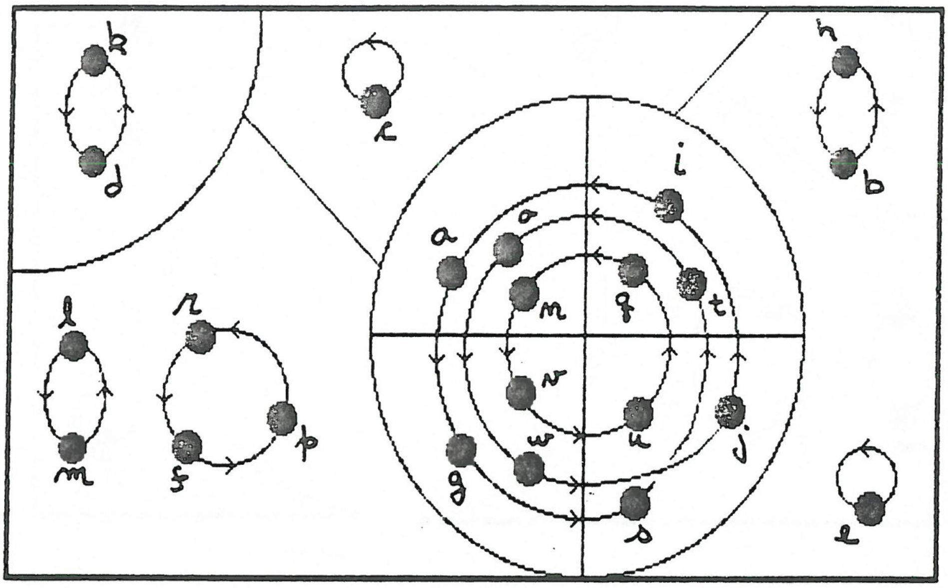

Figure 2-a

II) La permutation $\sigma/\equiv$ peut alors être représentée géométriquement comme:

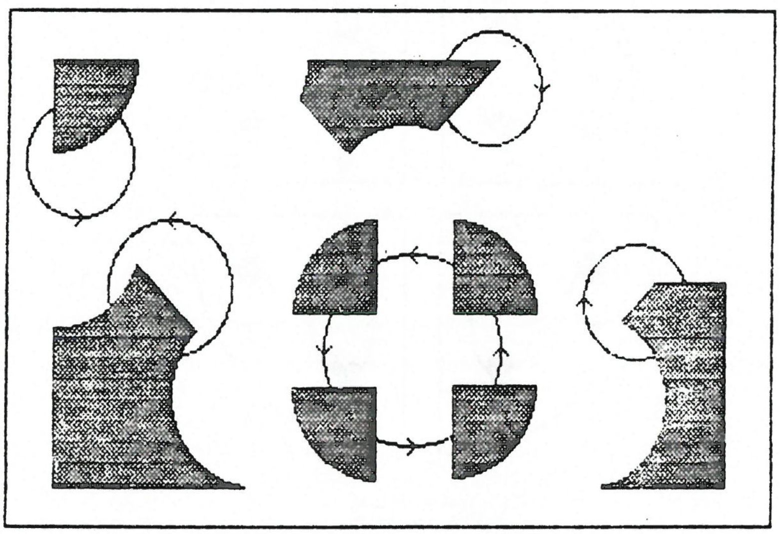

Figure 2-b

III) Enfin, la trace σ_B de σ sur B une classe de $\equiv$ se représente

a) dans le cas où σ_B coincide avec la restriction de σ à B, comme:

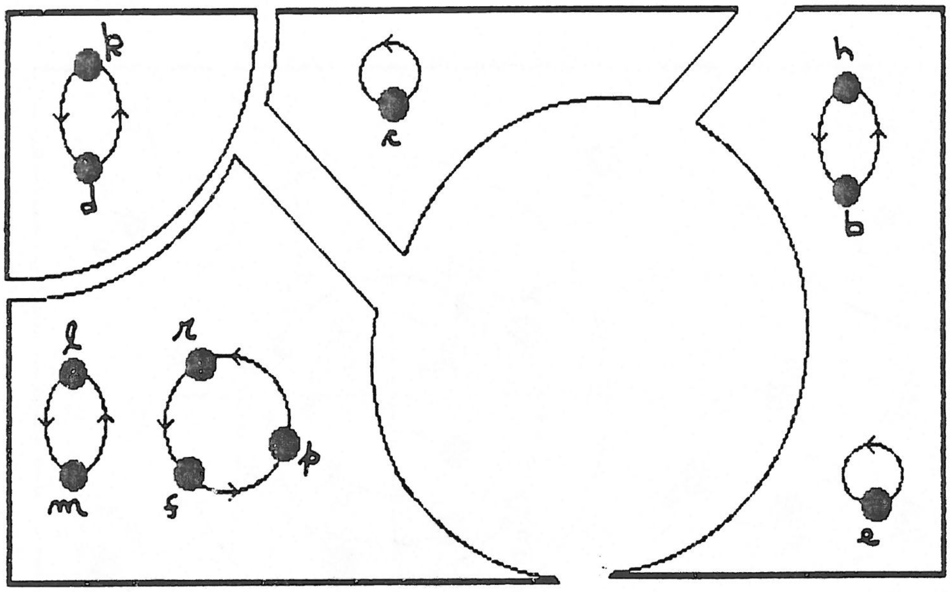

Figure 2-c

b) et dans celui pour lequel σ_B fait effectivement intervenir les composés de σ, comme:

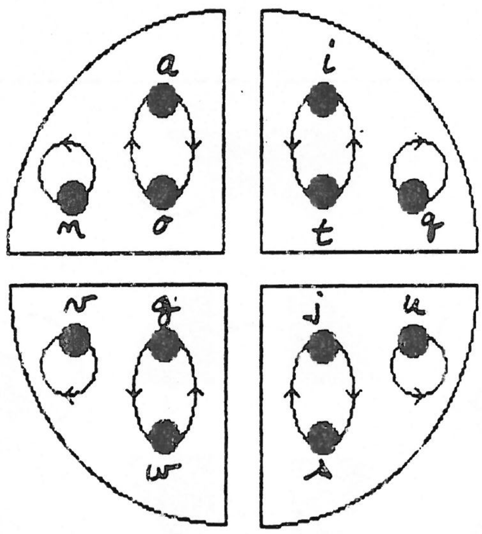

Figure 2-d

Ce n'est que dans ce dernier cas que la condition de compatibilité de la définition de substitution est non triviale. Elle impose que le choix de la $\mathbb{P}$-structure sur chacune des parties soit le même à transport de structure près.

Proposition 1

I) $C_n \circ C_k \cong C_{nk}$

II) $C_{1,k} \circ (C_1^{d_1} C_2^{d_2} \ \dots \ C_n^{d_n})/_{d!} \cong (C_{1,k}{}^{d_1} C_{2,k}{}^{d_2} \ \dots \ C_{n,k}{}^{d_n})/_{d!}$

où $C_{n,k}$ déssigne la $\mathbb{S}$-espèce des cycles de longueur nk, n-pointés.

Démonstration

I) En fait, soit σ une permutation telle que $C_n \circ C_k[\sigma]$ soit non vide. La donnée d'une $C_n \circ C_k$-structure sur σ correspond à la donnée d'une relation d'équivalence $\equiv$ compatible avec σ, telle que:

a) $\sigma/\equiv$ est un cycle de longueur n,

b) et, sur chaque classe $B \in A/\equiv$, σ_B est un cycle de longueur k.

On en conclut que σ est cyclique, puisque

-a) assure qu'on peut passer d'une classe à n'importe quelle autre classe via un composé de σ, et que

-b) assure qu'au sein d'une classe on peut toujours passer d'un élément un autre via un itéré de σ.

De plus, il n'y a qu'une seule telle relation d'équivalence.

II) Nous désignerons par U_d la $\mathbb{S}$-espèce caractéristique des permutations de type d. Donc $U_d = (C_1^{d_1} C_2^{d_2} \ \dots \ C_n^{d_n})/_{d!}$. Pour une permutation σ, une structure de $\mathbb{S}$-espèce $C_{1,n}\circ U_{\mathbf{d}}$ sur σ nécessite d'abord la donnée d'une relation d'équivalence $\equiv$ compatible avec σ, telle que:

a) $\sigma/\equiv$ est un cycle de longueur k,

b) sur chaque classe B de $\equiv$, σ_B est une permutation de type $U_{\mathbf{d}}$.

Or pour chaque partie B et chaque $b \in B$, $\sigma_B(b) = \sigma^k(b)$. La permutation σ est donc de type $\mathbf{d}_k = (d_{1k}, d_{2k}, \ldots, d_{nk})$, si $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. De plus, chaque cycle de σ intersecte chaque classe B en c/k points si c est la longueur du cycle.

Pour compléter la donné d'une $C_{1,n}\circ U_{\mathbf{d}}$-structure sur σ, on doit pointer le cycle $\sigma/\equiv$. Mais ceci équivaut à choisir une des classe B. Le choix de cette classe correspond à choisir j points sur chaque cycle de longueur jk de σ, pour tout j, ce qui montre l'assertion.

Il est important, pour la suite de cet exposé, d'observer que la cardinalité de $C_{1,n}\circ U_{\mathbf{d}}$ est $(x_{1k}/1)^{d_1}(x_{2k}/2)^{d_2} \cdots (x_{nk}/n)^{d_n}/\mathbf{d}!$.

Proposition 2

Pour une $\mathbb{S}$-espèce P fixée telle que $P[\varnothing] = \varnothing$, le foncteur

$$(-)\circ P : \mathbb{S}\text{-}\mathbf{Esp} \longrightarrow \mathbb{S}\text{-}\mathbf{Esp}$$

préserve la somme et le produit de $\mathbb{S}$-espèces, et leurs neutres respectifs. De plus $(-)\circ C_1$ et $C_1\circ(-)$ sont tous deux l'identité de $\mathbb{S}$-$\mathbf{Esp}$.

Démonstration

Pour illustrer, montrons que $(-)\circ P$ préserve le produit, c'est-à-dire qu'on a naturellement $(T \bullet R)\circ P \cong (T\circ P)\bullet(R\circ P)$. Considérons donc une $(T\bullet R)\circ P$-structure sur une permutation σ. On a donc d'abord une relation d'équivalence $\equiv$ compatible avec σ, une $(T\bullet R)$-structure π sur $\sigma/\equiv$, et enfin pour chaque classe B de $\equiv$, une P-structure p_B sur σ_B. Mais la $(T\bullet R)$-structure π sur $\sigma/\equiv$ correspond à la donnée d'une dissection (τ_1,τ_2) de $\sigma/\equiv$ (telle que l'ensemble sous-jacent à τ_1 est réunion de classes de $\equiv$, et de même pour τ_2), d'une T-structure t sur τ_1, et d'une R-structure r sur τ_2. La dissection (τ_1,τ_2) de $\sigma/\equiv$ induit une unique dissection (σ_1,σ_2) de σ, telle que $\sigma_1/\equiv=\tau_1$ et $\sigma_2/\equiv=\tau_2$. On a donc une $(T\circ P)$-structure sur σ_1, et une $(R\circ P)$-structure sur σ_2, c'est-à-dire une $(T\circ P)\bullet(R\circ P)$ -structure sur σ. La réciproque se montre en procédant inversement.

Théorème principal

Pour T et P deux S-espèces avec $P[0]=\emptyset$, on a

$$\mathrm{Card}(T\circ P)=\mathrm{Card}(T)\circ\mathrm{Card}(P)$$

où la substitution dans le membre de droite est la substitution pléthystique.

Démonstration

Pour d est un type cyclique d, désignons par T_d la S-espèce:

$$T_d[\sigma]=\begin{cases}\{\sigma\} & \text{, si le type de } \sigma \text{ est } d\\ \emptyset & \text{, sinon}\end{cases}$$

Pour toute S-espèce T on a alors $T=\sum_d T_d$. On a déjà remarqué que $(T+R)\circ P=(T\circ P)+(R\circ P)$, et il est facile de vérifier que

$$(\sum_d T_d)\circ P = \sum_d (T_d \circ P).$$

On se ramène donc à montrer la proposition dans le cas

$$\mathrm{Card}(T_d \circ P) = \mathrm{Card}(T_d)\circ \mathrm{Card}(P),$$

puisque **Card** préserve la somme. Mais il découle de la définition de la substitution que

$$\mathrm{Card}(T_d \circ P) = {}^{*}T_d[d]\,\mathrm{Card}(U_d \circ P),$$

où **U** est la **S**-espèce uniforme. Rappelons qu'on a toujours $(T\bullet R)\circ P = (T\circ P)\bullet(R\circ P)$, et que **Card** préserve aussi le produit, on peut donc encore ramener la vérification du théorème à la vérification plus simplement de:

$$\mathrm{Card}(C_k \circ P) = (x_k/k)\circ \mathrm{Card}(P)$$

Or

$$\mathrm{Card}(C_k \circ P) = \sum_{|\sigma|} \Big(\sum_{\equiv} {}^{*}P[\tau(\equiv)]\Big)\gamma(\sigma)$$

où $\equiv$ varie dans l'ensemble des relations d'équivalence, sur un ensemble typique, compatibles avec σ, et telle que $\sigma/\equiv$ soit un cycle de longueur k. On a désigné par $\tau(\equiv)$ le type de la trace de σ sur l'une des partie de $\equiv$. Ce type est indépendant de la partie choisie. On peut donc réécrire:

$$\mathrm{Card}(C_k \circ P) = \sum_d {}^{*}P[d]\,\Big(\sum_{\sigma,\equiv} \gamma(\sigma)\Big)$$

où la somme $\sum_{\sigma,\equiv}$ s'effectue sur l'ensemble des couple $(\sigma,\equiv)$ avec σ un type de permutation, et $\equiv$ une relation d'équivalence compatible avec σ telle que $\sigma/\equiv$ soit un cycle de longueur k et telle que pour chaque partie B de $\equiv$ on ait σ_B de type **d**. Il est clair qu'on s'est encore une fois ramené à montrer un cas plus simple de la proposition, à savoir:

$$\mathrm{Card}(C_k \circ U_d) = (x_k/k) \circ \mathrm{Card}(U_d).$$

Mais c'est là une conséquence immédiate de la proposition 1.

Pour illustrer les applications possibles de ce théorème, nous allons en déduire une généralisation de l'identité cyclotomique [voir ?]. Rappelons en d'abord la forme classique

$$(1-\alpha x)^{-1} = \prod_{k\geq 1} (1-x^k)^{M(\alpha,k)}$$

où $M(\alpha,k) = \sum_{d|k} \mu(k/d)\alpha^k$. Nous allons montrer que plus généralement

$$\sum_{n\geq 1} \alpha^n x_n/n = \sum_{n\geq 1} M(\alpha,n)\left(\sum_{k\geq 1} x_{nk}/k\right).$$

On obtient l'identité cyclotomique a partir de cette dernière identité en remplacant x_n par x^n, et en prenant l'exponentielle de chaque membres.

Soit $\mathfrak{A}$ un alphabet (ensemble) fini de cardinalité α. On désigne par $\mathfrak{C}$ la $\mathbb{S}$-espèce telle que

$$\mathfrak{C}[A,\sigma] = \begin{cases} \{\omega \mid \omega : A \longrightarrow \mathfrak{A}\}, & \text{si } \sigma \text{ est un cycle} \\ \varnothing & \text{, sinon.} \end{cases}$$

La série génératrice de $\mathfrak{C}$ est donc $\sum_{n\geq 1} \alpha^n x_n/n$. Si σ est un cycle, on dit de $\omega \in \mathfrak{C}[\sigma]$ que c'est un mot cyclique sur σ. On définit la période π d'un mot cyclique ω de la façon usuelle: $\pi(\omega)$ est le plus petit entier k tel que $\omega(\sigma^k(a)) = \omega(a)$ pour tout a dans A. On désigne par Φ_n la $\mathbb{S}$-espèce des mots cycliques de période n. Un mot cyclique est dit primitif, si sa période est la longueur du cycle sur lequel il est construit. Alors on désigne par $\mathbb{P}$ la $\mathbb{S}$-espèce des mots cycliques primitifs.

Il suit de ces définitions et de la définition de la substitution, que $\Phi_n = \mathbb{P} \circ C_n$; donc $\mathfrak{C} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \circ C_n$. D'autre part, la donné d'un mot cyclique sur un cycle de longueur n, équivaut à la donné donné d'un mot cyclique primitif de longueur k, où k divise n. C'est donc dire que $\alpha^n = \sum_{k|n} p_k$, où p_k est le nombre de mot cyclique primitif de longueur k. Une inversion de Möbius donne $p_k = M(\alpha,k) = \sum_{d|k} \mu(k/d)\alpha^k$. On obtient l'identité cherchée en passant à la cardinalité.

4. Le foncteur Fix

Pour souligner autrement l'intéret de cette nouvelle approche combinatoire au pléthysme, nous allons montrer qu'on peut établir un lien entre espèces au sens usuel, et espèces sur les permutations. Ce lien, concrétisé par un foncteur **Fix**: $\mathbb{B}$-**Esp** $\longrightarrow$ $\mathbb{S}$-**Esp**, permettera de transporter tout identité combinatoire entre espèce de structures, en identité entre $\mathbb{S}$-espèces. En effet, le foncteur **Fix** respecte les opérations "+","•" et "o".

a) Soit T une $\mathbb{B}$-espèce et $(A,\sigma)\in\mathbb{S}$ i.e.: σ est une permutation de A.
On pose:

$$\mathbf{Fix}(T)[(A,\sigma)]=\{t\in T[A] \mid T[\sigma](t)=t\}$$

Autrement dit, **Fix**(T) associe à une permutation l'ensemble des T-structures qui admettent σ comme automorphisme.

b) Soit encore $\varphi:(A,\sigma)\xrightarrow{\sim}(B,\tau)$ une flèche de $\mathbb{S}$ (i.e.: $\tau=\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}$)
on remarque que pour t dans **Fix**(T)[(A,σ)], on a:

$$\begin{aligned} T[\tau](T[\varphi](t)) &= T[\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}](T[\varphi](t)) \\ &= T[\varphi]\circ T[\sigma]\circ T[\varphi^{-1}](T[\varphi](t)) \\ &= T[\varphi]\circ T[\sigma](t) \\ &= T[\varphi](t) \end{aligned}$$

on peut donc définir:

$$\mathbf{Fix}(T)[\varphi]:\mathbf{Fix}(T)[(A,\sigma)]\xrightarrow{\sim}\mathbf{Fix}(T)[(B,\tau)]$$

en posant:

$$\mathbf{Fix}(T)[\varphi](t)=T[\varphi](t)$$

c) Soit enfin $\rho:T \longrightarrow P$ un morphisme de $\mathbb{B}$-espèces, on définit:

$$Fix(\rho):Fix(T) \longrightarrow Fix(P)$$

en posant, pour $(A,\sigma)\in\mathbb{S}$ et $t\in Fix[(A,\sigma)]$, que:

$$Fix(\rho)_{(A,\sigma)}(t)=\rho_A(t)$$

la naturalité de ρ assure que $\rho_A(t)$ appartient alors à $Fix(P)[(A,\sigma)]$.

Proposition 3

Le foncteur Fix est tel que pour T et P des $\mathbb{B}$-espèces, il existe des isomorphismes naturels:

I) $Fix(0) \xrightarrow{\sim} 0$,

II) $Fix(1) \xrightarrow{\sim} 1$,

III) $Fix(U_{\mathbb{B}}) \xrightarrow{\sim} U_{\mathbb{S}}$,

IV) $Fix(T+P) \xrightarrow{\sim} Fix(T)+Fix(P)$,

V) $Fix(T\bullet P) \xrightarrow{\sim} Fix(T)\bullet Fix(P)$,

VI) $Fix(T\circ P) \xrightarrow{\sim} Fix(T)\circ Fix(P)$, si $P[\emptyset]=\emptyset$.

Où $U_{\mathbb{B}}$ et $U_{\mathbb{S}}$ désignent respectivement la $\mathbb{B}$-espèce uniforme et la $\mathbb{S}$-espèce uniforme, c'est-à-dire $U_{\mathbb{B}}[A]=\{A\}$, et $U_{\mathbb{S}}[\sigma]=\{\sigma\}$.

Démonstration

Le dernier cas est celui qui nous préoccupe principalement. Les autres sont laissés en exercice. Une $T\circ P$-structure sur un ensemble fini A est la donnée d'un triplet $(\equiv,t,(p_B)_{B\in A/\equiv})$ où:

1) $\equiv$ est une relation d'équivalence sur A,

2) t est une T-structure sur $A/\equiv$,

3) et enfin, pour chaque $B \in A/\equiv$, p_B est une P-structure sur B.

Une permutation σ de A est un automorphisme de $(\mathbb{P},t,(p_B)_{B\in A/\equiv})$ si et seulement si:

a) La permutation σ est un automorphisme de $\equiv$, c'est-à-dire que la relation d'équivalence $\equiv$ est compatible avec σ.

b) La permutation $\sigma/\equiv$ sur $A/\equiv$ est un automorphisme de t, c'est donc dire que t est une $\mathrm{Fix}(T)$-structure sur $(A/\equiv,\sigma/\equiv)$.

c) Enfin pour chaque B dans $A/\equiv$, la trace σ_B de σ sur B est un automorphisme de p_B, puisque $\sigma|_B$ coincide avec σ_B si $\sigma(B)=B$, sinon il existe un unique entier $k>0$ (qui dépend de B) tel que $\sigma^k(B)=B$, or σ^k est aussi un automorphisme de $(\equiv,t,(p_B)_{B\in A/\equiv})$. On en conclut que p_B est une $\mathrm{Fix}(P)$-structure sur (B,σ_B). La réciproque est aussi directe.

Il découle de a), b) et c) que toute $T\circ P$-structure sur A laissée fixe par une permutation σ de A peut s'identifier canoniquement à une structure de $\mathbb{S}$-espèce $\mathrm{Fix}(T)\circ\mathrm{Fix}(P)$ sur (A,σ), et inversement.

Le foncteur Fix admet un inverse à gauche: le foncteur $\mathfrak{X}:\mathbb{S}\text{-Esp}\longrightarrow\mathbb{B}\text{-Esp}$ qui associe à chaque $\mathbb{S}$-espèce T la $\mathbb{B}$-espèce $\mathfrak{X}(T)$ telle que, pour A un ensemble fini, on ait:

$$\mathfrak{X}(T)[A]=T[A,\mathrm{Id}_A]$$

Il correspond au foncteur $\mathfrak{X}$ un passage de la série indicatrice associée à une $\mathbb{S}$-espèce T, à la série génératrice de la $\mathbb{B}$-espèce $\mathfrak{X}(T)$. En effet, on a un morphisme d'anneau

$$\mathfrak{x}:\mathbb{Q}[[x_1,x_2,x_3,\ldots]]\longrightarrow\mathbb{Q}[[x]]$$

défini en posant $(\mathfrak{x}t)(x)=t(x,0,0,\ldots)$, pour chaque $t(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, qui respecte la substitution. De plus, si $T(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ est la série indicatrice de la $\mathbb{S}$-espèce T, alors $\mathfrak{X}(T)(x)=(\mathfrak{x}T)(x)$. $\mathfrak{X}$ est adjoint à droite de **Fix**. Le foncteur **Fix** admet aussi comme adjoint à gauche le foncteur $\mathfrak{U}$ défini en posant

$$\mathfrak{U}(T)[A]=\sum_{\sigma\in\mathbb{S}[A]}T[\sigma]$$

pour T une $\mathbb{S}$-espèce, et A un ensemble fini. $\mathbb{S}[A]$ désigne ici l'ensemble des permutations de A. Il correspond au foncteur $\mathfrak{U}$ un autre morphisme d'anneau

$$\mathfrak{y}:\mathbb{Q}[[x_1,x_2,x_3,\ldots]]\longrightarrow\mathbb{Q}[[x]]$$

défini en posant $(\mathfrak{y}t)(x)=t(x,x^2,x^3,\ldots)$, pour chaque $t(x_1,x_2,x_3,\ldots)$. On a en effet $(\mathfrak{U}T)(x)=(\mathfrak{y}t)(\mathfrak{x})$.

5. Conclusion

Chaque identité entre espèces sur les permutations donne lieu à une identité entre les séries indicatrices associées. Il est donc important de pouvoir obtenir facilement des identités entre $\mathbb{S}$-espèces. Le foncteur **Fix** fournit de façon systématique de telles identités. Mais elles font toutes intervenir des séries d'un type très particulier. On observera par exemple que le coefficient du monôme $(x_1)^n$, dans la série indicatrice d'une $\mathbb{S}$-espèce obtenue via **Fix**, n'est nul pour tout n que dans le cas de la série nulle. De la l'importance d'avoir un contexte plus riche que celui des espèces usuelles ($\mathbb{B}$-espèces).

Le contexte que nous proposons ici peut se comparer à celui introduit par Nava et Rota, au moyen d'un foncteur $\mathfrak{S}$ qui transforme une espèce T sur les permutations en une espèce $\mathfrak{S}$(T) sur les partitions obtenue en posant:

$$\mathfrak{S}(T)[\pi]=\sum_{\sigma} T[\sigma]$$

où le somme a lieu sur l'ensemble des permutations ayant π comme partition sous-jacente. Rappelons que la partition sous-jacente à une permutation a comme parties les ensembles sous-jacent aux cycles de la permutation. Nous étudirons plus en détails les propriétés de ce foncteur dans un prochain article.

Références

1. F. Bergeron, "Une Systématique de la Combinatoire Enumerative," Ph.D. thesis, Univ. de Montréal and UQAM, April 1986.
2. E. Bender et J.R. Goldman, "Enumerative Uses of Generating Functions," Ind. Math. Jour. Vol 20, N^{o}8 (1971).
3. S.Delsarte, "Fonctions de Möbius sur les Groupes Abéliens Finis," Annals of Math. 49 (1948) pp 600-609.
4. P.Doubilet, G.C.Rota and R.Stanley, "The Idea of Generating Function," Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. California (1972), pp 267-318.
5. M.Henle, "Binomial Enumeration on Dissects," Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975), pp 1-38.
6. A. Joyal, "Une Théorie Combinatoire des Séries Formelles," Adv. in Math. 42 (1981), pp 1-82.
7. S.A.Joni and G.C.Rota, "Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics," Studies in Appl. Math. 61, (1979), pp 93-139.

8. G.Labelle, "Éclosions Combinatoires Appliquées à l'Inversion Multidimensionnelle des Séries Formelles," Jour. Comb. Theory, Series A, vol. 39, No.1 (1985), pp 52-82.

9. I.G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," Clarendon Press, Oxford, (1979).

10. N.Metropolis and G.C. Rota, "Witt Vectors and the Algebra of Necklaces," Adv. in Math. 50 (1983), pp 95-125.

11. O.Nava et G.C.Rota, "Plethysm, Categories and Combinatorics," Adv. in Math. 58 (1985), pp 61-88.

12. J.Riordan, "Combinatorial Inentities," Wiley, NewYork, (1968).

13. S.M.Roman et G.C.Rota, "The Umbral Calculus," Adv. in Math. 27 (1978), pp 95-188.