Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S-15
Actes 15e Séminaire Lotharingien, p. 51-65

Möbius-Funktionen, Inzidenzalgebren und Potenzreihendarstellungen

Arne Dür

"Möbius-Funktionen" treten in der Kombinatorik in verschiedenen Formen auf. Den algebraischen Rahmen für die "Möbius-Inversion" bildet dabei die "Inzidenzalgebra". Eine allgemeine Theorie der Inzidenzalgebren mit Anwendungen findet man in [8]. Ausgangspunkt dieser Theorie waren vier Konstruktionen aus der kombinatorischen Literatur, die in Kap. I kurz wiederholt werden.

I. Möbius-Funktionen in der kombinatorischen Literatur

Die zahlentheoretische Möbius-Inversion wurde in der Kombinatorik einerseits auf Monoide und andererseits auf geordnete Mengen verallgemeinert.

(i) Möbius-Inversion auf Monoiden (P.Cartier-D.Foata):

Sei N ein Monoid mit der endlichen Faktorisierungseigenschaft: Für jedes $x \in N$ gibt es nur endlich viele Faktorisierungen $x=x_1 \dots x_l$, wobei $l \geq 0$ und alle Faktoren vom Einselement 1 des Monoids verschieden sind. Sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Für $f,g \in \mathbb{Z}^N$ definiere $fg \in \mathbb{Z}^N$ durch $fg(x) = \sum_{\substack{y,z \in N \\ yz=x}} f(y)g(z)$. $\mathbb{Z}^N$ mit dieser Multiplikation ist eine Algebra und heißt die große Monoid-Algebra von N. Die Zeta-Funktion ist $\zeta \in \mathbb{Z}^N$, $\zeta(x) = 1$ für alle $x \in N$. Die Möbius-Funktion ist $\mu = \zeta^{-1}$. Dann gilt für zwei Funktionen $F,G: N \to k$ (k ein kommutativer Ring)

$G(m) = \sum_{\substack{n,l \in N \\ nl=m}} F(n)$ für alle $m \in N$ genau dann, wenn

$$F(m) = \sum_{\substack{n,l\in N\\ nl=m}} \mu(l)G(n) \quad \text{für alle } m\in N \quad (\text{"Möbius-Inversion"}).$$

Literatur: [3],[9],[14],[5].

(ii) Möbius-Inversion auf geordneten Mengen (G.C.Rota):

Sei P eine (partiell) geordnete Menge, welche lokalendlich ist, dh. alle Intervalle von P seien endlich. Sei $M=\{(x,y)\in P\times P; x\leq y\}$, und für $f,g\in \mathbb{Z}^M$ definiere $fg\in \mathbb{Z}^M$ durch $fg(x,y)= \sum_{\substack{z\in P\\ x\leq z\leq y}} f(x,z)g(z,y)$. $\mathbb{Z}^M$ mit dieser Multiplikation ist eine Algebra, heißt die Inzidenzalgebra von P und wird mit $I(P,k)$ bezeichnet. Die Zeta-Funktion ist $\zeta\in \mathbb{Z}^M$, $\zeta(x,y)= 1$ für alle $(x,y)\in M$. Die Möbius-Funktion ist $\mu= \zeta^{-1}$. Dann gilt für zwei Funktionen $F,G:M\to k$ (k ein kommutativer Ring)

$$G(x,y)= \sum_{\substack{z\in P\\ x\leq z\leq y}} F(x,z) \quad \text{für alle } (x,y)\in M \quad \text{genau dann, wenn}$$

$$F(x,y)= \sum_{\substack{z\in P\\ x\leq z\leq y}} \mu(z,y)G(x,z) \quad \text{für alle } (x,y)\in M \quad (\text{"Möbius-Inversion"}).$$

Literatur: [17],[1],[11].

In der kombinatorischen Literatur finden sich aber auch "Möbius-Funktionen" anderer Art, wie die folgenden Beispiele zeigen.

(iii) Die Algebra von Philip Hall:

Sei p eine Primzahl. Jede endliche abelsche p-Gruppe Y ist isomorph zu einer direkten Summe $\mathbb{Z}/p^{\lambda_1}\oplus \mathbb{Z}/p^{\lambda_2} \oplus\ldots\oplus \mathbb{Z}/p^{\lambda_r}$, wobei $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_r>0$. Die Zahlpartition $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ ist durch Y eindeutig bestimmt und heißt der Typ von Y. Sei T die Menge der Partitionen natürlichen Zahlen. Für $t,t_1,t_2 \in T$ definiere den "Schnittkoeffizienten" $G(t;t_1,t_2)$ durch

$G(t;t_1,t_2) = \#\{X;\ X$ Untergruppe von Y, Typ von $X = t_1$, Typ von $Y/X = t_2\}$, wobei Y eine beliebige endliche abelsche p-Gruppe vom Typ t ist. Für $f,g \in \mathbb{Z}^T$ definiere $fg \in \mathbb{Z}^T$ durch $fg(t) = \Sigma_{t_1,t_2 \in T}\, G(t;t_1,t_2) f(t_1) g(t_2)$. $\mathbb{Z}^T$ mit dieser Multiplikation ist eine Algebra, heißt die <u>große Hall-Algebra</u> und wird mit $\mathbb{Z}(T;G)$ bezeichnet. Die <u>Hall-Algebra</u> ist die Unteralgebra $H(p) = \{f \in \mathbb{Z}^T;\ f(t) \neq 0$ für nur endlich viele $t \in T\}$. Die <u>Zeta-Funktion</u> ist $\zeta \in \mathbb{Z}(T;G)$, $\zeta(t) = 1$ für alle t. Die <u>Möbius-Funktion</u> ist $\mu = \zeta^{-1}$ in $\mathbb{Z}(T;G)$. Ein zentraler Satz der Hall'schen Theorie besagt nun, daß die Abbildung

$$H(p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad , \quad f \to \Sigma_{\lambda \in T}\, f(\lambda) P_\lambda(x;\tfrac{1}{p})/p^{n(\lambda)} \quad ,$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{Q}$-Algebren ist. Hier ist Λ der Ring der symmetrischen Funktionen über $\mathbb{Z}$ in unendlich vielen Variablen $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $P_\lambda(x;\frac{1}{p})$ ist die Hall-Littlewood symmetrische Funktion zur Zahlpartition λ, und $n(\lambda) = \Sigma_{i=1}^\infty (i-1)\lambda_i$. Für $\lambda = (1^r)$ zum Beispiel ist $P_\lambda(x;\frac{1}{p})$ die r-te elementar-symmetrische Funktion.
Die große Hall-Algebra besitzt somit die <u>treue Darstellung</u>

$$\rho\colon\ \mathbb{Q}(T;G) \to \mathbb{Q}[[x]] \quad , \quad f \to \Sigma_{\lambda \in T}\, f(\lambda) P_\lambda(x;\tfrac{1}{p})/p^{n(\lambda)} \quad ,$$

<u>durch formale Potenzreihen</u> in den Variablen $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$. Da $\rho(\zeta) = \Sigma_\lambda\, P_\lambda(x;\frac{1}{p})/p^{n(\lambda)} = \Pi_{i=1}^\infty (1-x_i)^{-1}$ und $\rho(\mu) = 1/\rho(\zeta) = \Pi_{i=1}^\infty (1-x_i)$ ist, folgt aus $\Pi_{i=1}^\infty (1-x_i) = \Sigma_{r=0}^\infty (-1)^r P_{(1^r)}(x;\frac{1}{p})$ durch Vergleich, daß

$$\mu((1^r)) = (-1)^r p^{r(r-1)/2} \text{ für } r \geq 0 \text{ , und } \mu(\lambda) = 0 \text{ sonst.}$$

Dies sind aber genau die Werte $\mu_{L(Y)}(0,Y)$ der Möbius-Funktion des Untergruppenverbandes $L(Y)$ einer endlichen abelschen p-Gruppe Y vom Typ λ. Die Zahl der Untergruppen von Y ist $\zeta^2(\lambda) = \Sigma_{t_1,t_2 \in T}\, G(\lambda;t_1,t_2)$ und besitzt die erzeugende Funktion

$$\Sigma_{\lambda\in T}\ \zeta^2(\lambda)P_\lambda(x;\tfrac{1}{p})/p^{n(\lambda)} = \rho(\zeta)^2 = \Pi_{i=1}^{\infty}(1-x_i)^{-2} .$$

Weitere Anwendungen der Darstellung ρ findet man in [15].

Literatur: [13],[15],[16],[4].

(iv) Das Monoid von Faà di Bruno (P.Doubilet-G.C.Rota-R.Stanley):

Für $n\geq 0$ sei Π_n der Verband der Mengenpartitionen von $\{1,..,n\}$ mit der Verfeinerungsordnung. Der Typ einer Partition $\pi\in\Pi_n$ ist die Zahlpartition $t=(1^{t(1)}2^{t(2)}3^{t(3)}\dots)$ von n, wo $t(i)$ die Zahl der Blöcke von π der Größe i angibt. Sei T die Menge der Partitionen natürlicher Zahlen. Für $t,t_1,t_2\in T$ definiere den "Schnittkoeffizienten" $G(t;t_1,t_2)$ durch $G(t;t_1,t_2)=\#\{\sigma\in\Pi_n;\ \sigma\leq\pi,\ \text{Typ von } \sigma = t_1,\ \text{Typ von } \pi/\sigma = t_2\}$, wobei π eine beliebige Partition in Π_n vom Typ t ist und π/σ die von π induzierte Partition der Menge σ bezeichnet. Die Menge T ist ein kommutatives Monoid mit der Addition $(1^{v(1)}2^{v(2)}\dots)+(1^{w(1)}2^{w(2)}\dots)=$ $=(1^{v(1)+w(1)}2^{v(2)+w(2)}\dots)$ und dem Nullelement $(1^0 2^0\dots)$. Wir nennen eine Funktion $f:T\to k$ (k ein kommutativer Ring) multiplikativ, falls $f(0)=1$ und $f(v+w)=f(v)f(w)$ für alle $v,w\in T$ ist. Sei $Mu(k)=\{f:T\to k;\ f \text{ multiplikativ}\}$. Für $f,g\in Mu(k)$ definiere $fg\in Mu(k)$ durch $fg(t)=\Sigma_{t_1,t_2\in T}\ G(t;t_1,t_2)f(t_1)g(t_2)$. Mu(k) mit dieser Multiplikation ist ein Monoid und heißt das Faà di Bruno-Monoid. Die Zeta-Funktion ist $\zeta\in Mu(\mathbb{Z})$, $\zeta(t)=1$ für alle t. Die Möbius-Funktion ist $\mu=\zeta^{-1}$ in $Mu(\mathbb{Z})$. Setzt man $\dim(t)=$ Rang einer Partition vom Typ $t=\Sigma_{i=1}^{\infty}(i-1)t(i)$, so ist $D^{\dim}\in Mu(\mathbb{Z}[D])$, wobei $D^{\dim}(t)=D^{\dim(t)}$ und D eine Unbestimmte ist. Nach P.Doubilet, G.C.Rota und R.P.Stanley besitzt das Faà di Bruno-Monoid die treue Darstellung

$$\rho:\ Mu(k)\ \to\ End(k[[z]])\ ,\ f\ \to\ [z\to\Sigma_{n=1}^{\infty}\ f((n^1))z^n/n!\ ]\ ,$$

durch Endomorphismen der Potenzreihenalgebra in einer Variablen über einer $\mathbb{Q}$-Algebra k. Diese Darstellung erklärt den Namen Faà di Bruno-Monoid, weil die Komposition formaler Potenzreihen durch die Formel von Faà di Bruno beschrieben wird. Aus $\rho(\zeta) = [z \to \exp(z)-1]$ folgt $\rho(\mu) = \rho(\zeta)^{-1} = [z \to \log(1+z)]$ und $\rho(\zeta^2) = \rho(\zeta)\rho(\zeta) = [z \to \exp(\exp(z)-1)-1]$. Aus der Logarithmusreihe $\log(1+z) = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^n/n$ erhält man

$$\mu((n^1)) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \text{für } n \geq 1 \ ,$$

was genau die Werte $\mu_{\Pi_n}(\sigma,\pi)$ der Möbius-Funktion von Π_n für $\sigma = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$ und $\pi = \{\{1,\ldots,n\}\}$ sind. Aus $\zeta^2((n^1)) = \Sigma_{t_1,t_2} G(t;t_1,t_2) = \#\Pi_n$ ergibt sich die erzeugende Funktion der Bell-Zahlen

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \#\Pi_n \; z^n/n! = \exp(\exp(z)-1)-1 \ .$$

Wegen $\dim((n^1)) = n-1$ folgt weiters $\rho(D^{\dim}) = [z \to \frac{\exp(Dz)-1}{D}]$, $\rho(\mu D^{\dim}) = [z \to ((1+z)^D - 1)/D]$ und $\rho(D^{\dim}\zeta) = [z \to \exp(\frac{\exp(Dz)-1}{D})-1]$. Entwickeln von $(1+z)^D$ in die Binomialreihe liefert

$$\mu D^{\dim}((n^1)) = (D-1)(D-2)\ldots(D-n) \ ,$$

also das charakteristische Polynom von Π_n. Schließlich ist

$$D^{\dim}\zeta((n^1)) = \Sigma_{t_1,t_2} G((n^1);t_1,t_2)D^{\dim(t_1)} = \Sigma_{i=0}^{n-1} S(n,n-i)D^i \ ,$$

wobei $S(n,n-i) = \#\{\pi\in\Pi_n;\ \text{Rang von } \pi = i\} = \#\{\pi\in\Pi_n;\ \#\pi = n-i\}$ die Stirling-Zahlen 2.Art sind, und

$$\exp(\frac{\exp(Dz)-1}{D})-1 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \Sigma_{i=0}^{n-1} S(n,n-i)D^i z^n/n!$$

ist eine bivariate erzeugende Funktion.

Literatur: [6].

II. Kategorielle Strukturen und Inzidenzalgebren

Einen gemeinsamen Rahmen für die Konstruktionen in Kapitel I bietet die Theorie der Inzidenzalgebren in [8], deren Kern wir im folgenden skizzieren.

Eine kategorielle Struktur ist gegeben durch eine Kategorie $\underline{K}$, eine Klasse M von Morphismen und eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M mit gewissen Eigenschaften (siehe [8]). Die Äquivalenzklassen von Morphismen in M heißen Typen, und $T = M/\sim$ ist die Menge aller Typen. Der Typ von $s \in M$ wird mit $\bar{s}$ bezeichnet.

Beispiele:

(i) Monoide mit der endlichen Faktorisierungseigenschaft: Hier hat $\underline{K}$ nur ein Objekt, die Morphismen in $\underline{K}$ sind die Elemente des Monoids N, M=N, und $\sim$ ist die Gleichheit. Dann entsprechen den Typen die Elemente des Monoides.

(ii) Lokalendliche geordnete Mengen: Hier sind die Objekte von $\underline{K}$ die Elemente von P, die Morphismen in $\underline{K}$ sind die Paare (x,y) wo $x \leq y$ ist, $M = \{(x,y) \in P \times P;\ x \leq y\}$, und $\sim$ ist die Gleichheit. Dann entsprechen den Typen die Paare $(x,y) \in P \times P$ mit $x \leq y$.

(iii) Die Hall-Algebra: Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen abelschen p-Gruppen, M ist die Klasse der injektiven Gruppenhomomorphismen, und zwei Morphismen $s_1: X_1 \to Y_1$ und $s_2: X_2 \to Y_2$ sind äquivalent, falls die Faktorgruppen $Y_1/s_1(X_1)$ und $Y_2/s_2(X_2)$ isomorph sind. Dann entsprechen den Typen die Isomorphieklassen endlicher abelscher p-Gruppen bzw. die Partitionen natürlicher Zahlen.

(iv) Das Faà di Bruno-Monoid: Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen, M ist die Klasse der surjektiven Abbildungen, und zwei Morphismen $s_1: X_1 \to Y_1$ und $s_2: X_2 \to Y_2$ sind äquivalent, falls es Bijektionen $a: X_1 \to X_2$ und $b: Y_1 \to Y_2$ gibt, sodaß $s_2 a = b s_1$. Den Typen entsprechen dann die Partitionen natürlicher Zahlen via $\bar{s} \to (1^{t(1)}2^{t(2)}\ldots)$, wobei $t(i) = \#\{y \in Y;\ \#(s^{-1}(y)) = i\}$ für $s:X \to Y$.

Definition: Für Typen t, t_1, t_2 sei $G(t;t_1,t_2)$ die Zahl der Möglichkeiten, einen Morphismus s vom Typ t in einen Morphismus s_1 vom Typ t_1 und einen Morphismus s_2 vom Typ t_2 zu faktorisieren. Dabei gelten zwei Faktorisierungen $s=s_2s_1$ und $s=r_2r_1$ als gleich, wenn es einen Isomorphismus a gibt, sodaß $r_1=as_1$ und $r_2=s_2a^{-1}$ (dh. die Faktorisierung $s=r_2r_1$ erhält man aus $s=s_2s_1$ durch Einfügen von $id=a^{-1}a$ zwischen s_2 und s_1). Die Zahlen $G(t;t_1,t_2)$ nennen wir Schnittkoeffizienten. Die Dimension von t ist die maximale Länge einer Faktorisierung von s, und wird mit dim(t) bezeichnet.

Satz 1: Sei k ein kommutativer Ring mit 1 (meist $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$), und sei k^T der k-Modul mit den komponentenweisen linearen Operationen. Für $f,g \in k^T$ wird das Faltungsprodukt $fg \in k^T$ definiert durch

$$fg(t) = \Sigma_{t_1,t_2 \in T}\, G(t;t_1,t_2)f(t_1)g(t_2) \qquad \text{für } t \in T .$$

Mit dieser Multiplikation ist dann k^T eine assoziative Algebra, wird mit $k(T;G)$ bezeichnet, und heißt die Inzidenzalgebra von $\underline{K}$,M,~ . Das Einselement von $k(T;G)$ ist die Delta-Funktion $\delta \in k^T$, wobei $\delta(t) = 1$ falls t der Typ eines Isomorphismus ist, und $\delta(t) = 0$ sonst.

Definition: Die Zeta-Funktion in $\mathbb{Z}(T;G)$ ist $\zeta \in \mathbb{Z}^T$, $\zeta(t)=1$ für alle Typen t. Die Möbius-Funktion ist $\mu = \zeta^{-1}$ in $\mathbb{Z}(T;G)$.

Spezialfälle von Inzidenzalgebren kategorieller Strukturen sind

(a) die große Monoid-Algebra eines Monoids mit der endlichen Faktorisierungseigenschaft

(b) die Inzidenzalgebra einer lokalendlichen geordneten Menge

(c) die Inzidenzalgebra der geordneten Mengen der Unterobjekte (bzw. Quotientenobjekte) in einer Kategorie.

Beispiele für (c) sind die große Hall-Algebra und die Faà di Bruno-Algebra (welche das Faà di Bruno-Monoid enthält). Im folgenden betrachten wir den Spezialfall (c), und zwar Unterobjekte und Quotientenobjekte nacheinander.

Unterobjekte:

Hier ist M eine Klasse von Monomorphismen in $\underline{K}$. Für einen Monomorphismus $s:X\to Y$ bezeichne [s] das durch s gegebene Unterobjekt von Y. Falls die Objekte von $\underline{K}$ Mengen mit einer zusätzlichen Struktur sind, dann ist [s] die Teilmenge s(X) von Y mit der von Y induzierten Struktur. Die Menge $Sub_M(Y)$ der Unterobjekte von Y in M ist (partiell) geordnet mit größtem Element $[id_Y]$. Falls $[s_1]\leq[s_2]$, dann gibt es genau einen Morphismus s sodaß $s_1 = s_2 s$, und wir schreiben $s = s_2\backslash s_1$. Für Typen t,t_1,t_2 gilt dann

$$G(t;t_1,t_2) = \#\{[r] \in Sub_M(Y);\ [s]\leq[r],\ \overline{r\backslash s} = t_1,\ \bar{r} = t_2\} ,$$

wobei s ein Monomorphismus vom Typ t ist. Den Zusammenhang zwischen der Inzidenzalgebra k(T;G) der kategoriellen Struktur $\underline{K}$,M,~ und den Inzidenzalgebren der geordneten Mengen $Sub_M(Y)$ erklärt der folgende Satz.

Satz 2: Die Abbildung

$$k(T;G) \to I(Sub_M(Y),k) \ , \ f \to g \ , \ g([s_1],[s_2]) = f(t) \ ,$$

wobei t der Typ von $s_2\backslash s_1$ ist, ist ein Homomorphismus von k-Algebren. Insbesondere ist

$$\zeta^2(t) = \#\{[r] \in Sub_M(Y);\ [s_1]\leq[r]\leq[s_2]\} ,$$

$$\mu(t) = \mu_{Sub_M(Y)}([s_1],[s_2]) \ , \text{ und}$$

$$(\zeta-\delta)^l(t) = \text{Zahl der Ketten der Länge } l \text{ in } Sub_M(Y) \text{ von } [s_1] \text{ nach } [s_2].$$

Falls $Sub_M(Y)$ die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllt, so gilt für das Intervall $I = \{[r] \in Sub_M(Y);\ [s_1] \leq [r] \leq [s_2]\}$

$$\dim(t) = \text{Rang von } I ,$$

$$\mu D^{\dim}(t) = \text{charakteristisches Polynom von } I ,$$

$$D^{\dim}\zeta(t) = \Sigma_{i=0}^{\dim(t)} W(i) D^i \quad , \quad W(i) = i\text{-te Niveauzahl von } I ,$$

wobei D eine Unbestimmte ist.

<u>Quotientenobjekte:</u>

Hier ist M eine Klasse von Epimorphismen in $\underline{K}$. Für einen Epimorphismus $s:X\to Y$ bezeichne $[s]$ das durch s gegebene Quotientenobjekt von X. Falls die Objekte von $\underline{K}$ Mengen mit einer zusätzlichen Struktur sind, dann ist $[s]$ die Partition $\{s^{-1}(y);\ y\in Y\}$ von X mit der von X induzierten Struktur. Die Menge $Qu_M(X)$ der Quotientenobjekte von X in M ist (partiell) geordnet mit kleinstem Element $[id_X]$. Falls $[s_1] \leq [s_2]$, dann gibt es genau einen Morphismus s sodaß $s_2 = ss_1$, und wir schreiben $s = s_2/s_1$. Für Typen t, t_1, t_2 gilt dann

$$G(t;t_1,t_2) = \#\{[r] \in Qu_M(X);\ [r] \leq [s],\ \bar{r} = t_1 ,\ \overline{s/r} = t_2\} ,$$

wobei s ein Epimorphismus vom Typ t ist. Den Zusammenhang zwischen der Inzidenzalgebra $k(T;G)$ der kategoriellen Struktur $\underline{K}, M, \sim$ und den Inzidenzalgebren der geordneten Mengen $Qu_M(X)$ erklärt der folgende Satz.

<u>Satz 3:</u> Die Abbildung

$$k(T;G) \to I(Qu_M(X),k) \ , \ f \to g \ , \ g([s_1],[s_2]) = f(t) ,$$

wobei t der Typ von s_2/s_1 ist, ist ein Homomorphismus von k-Algebren. Insbesondere ist

$$\zeta^2(t) = \#\{[r] \in Qu_M(X);\ [s_1] \leq [r] \leq [s_2]\} ,$$

$$\mu(t) = \mu_{Qu_M(X)}([s_1],[s_2]) \ , \text{ und}$$

$(\zeta-\delta)^{l}(t)$ = Zahl der Ketten der Länge l in $Qu_M(X)$ von $[s_1]$ nach $[s_2]$. Falls $Qu_M(X)$ die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllt, so gilt für das Intervall $I = \{[r] \in Qu_M(X);\ [s_1] \leq [r] \leq [s_2]\}$

$\dim(t)$ = Rang von I ,

$\mu D^{\dim}(t)$ = charakteristisches Polynom von I ,

$D^{\dim}\zeta(t) = \Sigma_{i=0}^{\dim(t)} W(i) D^{i}$, $W(i)$ = i-te Niveauzahl von I ,

wobei D eine Unbestimmte ist.

Beispiele: In den folgenden drei Beispielen besitzt die Inzidenzalgebra $k(T;G)$ eine treue Darstellung durch formale Potenzreihen. Wie im Falle der Hall-Algebra lassen sich daraus erzeugende Funktionen für Möbius-Funktionen und Anzahlen von Unterobjekten ableiten (siehe [8]).

(1) Teilmengen endlicher Mengen und Exponentialreihen:

Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen Mengen, M ist die Klasse der injektiven Abbildungen, und $Sub_M(Y)$ ist der Boolesche Verband der Teilmengen von Y. Zwei Morphismen $s_1: X_1 \to Y_1$ und $s_2: X_2 \to Y_2$ sind äquivalent, falls $\#Y_1 - \#X_1 = \#Y_2 - \#X_2$. Dann entsprechen den Typen die natürlichen Zahlen via $\bar{s} \to \#Y - \#X$ für $s: X \to Y$, und eine treue Darstellung von $\mathbb{Q}(T;G)$ ist

$$\mathbb{Q}(T;G) \to \mathbb{Q}[[z]] \quad , \quad f \to \Sigma_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^n/n! \quad .$$

(2) Unterräume endlicher Vektorräume und Eulerreihen:

Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$, M ist die Klasse der injektiven $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen, und $Sub_M(Y)$ ist der Verband der Unterräume von Y. Zwei Morphismen $s_1: X_1 \to Y_1$ und $s_2: X_2 \to Y_2$ sind äquivalent, falls $\dim(Y_1) - \dim(X_1) = \dim(Y_2) - \dim(X_2)$. Dann entsprechen den Typen die natürlichen Zahlen via $\bar{s} \to \dim(Y) - \dim(X)$ für $s: X \to Y$, und eine treue Darstellung von $\mathbb{Q}(T;G)$ ist

$$\mathbb{Q}(T;G) \to \mathbb{Q}[[z]] \quad , \quad f \to \Sigma_{n=0}^{\infty} f(n)\ z^n/[n]! \quad ,$$

(J. Goldman - G.C. Rota [10]).

(3) Untergruppen endlicher abelscher Gruppen und die Algebren von Ph. Hall [13] und S. Delsarte [4]:

Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen, M ist die Klasse der injektiven Gruppenhomomorphismen, und $\mathrm{Sub}_M(Y)$ ist der Verband der Untergruppen von Y. Zwei Morphismen $s_1:X_1 \to Y_1$ und $s_2:X_2 \to Y_2$ sind äquivalent, falls die Faktorgruppen $Y_1/s_1(X_1)$ und $Y_2/s_2(X_2)$ isomorph sind. Dann entsprechen den Typen die Isomorphietypen endlicher abelscher Gruppen. Die Inzidenzalgebra $\mathbb{C}(T;G)$ wurde von S. Delsarte studiert. Durch Spezialisieren auf die Kategorie der abelschen p-Gruppen erhält man die große Hall-Algebra.

(4) Teilwörter und die Shuffle-Algebra:

Hier ist $\underline{K}$ die Kategorie der Wörter über einem Alphabet A, M ist die Klasse der Monomorphismen, und $\mathrm{Sub}_M(w)$ ist die geordnete Menge der Teilfolgen des Wortes w. Zwei Morphismen $s_1:v_1 \to w_1$ und $s_2:v_2 \to w_2$ sind äquivalent, falls man nach Entfernen der Teilwörter $s_1(v_1)$ aus w_1 und $s_2(v_2)$ aus w_2 die gleichen Wörter erhält. Dann entsprechen den Typen die Wörter über A, und die Inzidenzalgebra $\mathbb{Z}(T;G)$ ist die große Shuffle-Algebra über dem Alphabet A.

III. Garbenähnliche kategorielle Strukturen und multiplikative Funktionen

"Garbenähnliche" kategorielle Strukturen sind kategorielle Strukturen $\underline{K},M,\sim$, die bezüglich der direkten Summe Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, wie sie für Garbenkategorien gelten (siehe [8]). Die Menge T der Typen ist dann ein kommutatives Monoid mit der von der direkten Summe induzierten Addition, und für die Schnittkoeffizienten gilt

$$G(v+w;t_1,t_2) = \Sigma\, G(v;v_1,v_2)G(w;w_1,w_2) \quad ,$$

wobei über alle Typen v_1,v_2,w_1,w_2 mit $v_1+w_1=t_1$ und $v_2+w_2=t_2$ summiert wird. Diese Identität verallgemeinert die Vandermondesche Faltungsidentität für die Binomialkoeffizienten $G(m+n;m,n) = \binom{m+n}{m}$.

Definition: Sei $k(T;G)$ die Inzidenzalgebra der garbenähnlichen kategoriellen Struktur $\underline{K},M,\sim$. Eine Funktion $f \in k(T;G)$ heißt multiplikativ , falls $f(0)=1$ und $f(v+w)=f(v)f(w)$ für alle Typen v,w ist. Die Menge der multiplikativen Funktionen in $k(T;G)$ bezeichnen wir mit $Mu(k)$.

Satz 4: $Mu(k)$ ist ein multiplikatives Untermonoid von $k(T;G)$. $Mu(\mathbb{Z})$ enthält ζ und μ , und $Mu(\mathbb{Z}[D])$ enthält $D^{\dim}$, $\mu D^{\dim}$ und $D^{\dim}\zeta$.

Beispiele: In den folgenden Beispielen besitzen die Monoide der multiplikativen Funktionen treue Darstellungen durch Endomorphismen von Potenzreihenalgebren. Anwendungen davon werden in [8] besprochen.

(5) Partitionen endlicher Mengen und das Faà di Bruno-Monoid.

(6) Partitionen endlicher Mengen mit ausgezeichneten Blöcken:
Hier sind die Quotientenobjekte die Paare (π,π_0) wo π eine Partition einer endlichen Menge und π_0 eine Teilmenge von π ist. Für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R ist

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Mu}(R) & \to & \mathrm{End}(R[[w,z]]) \\ f & \to & \left[\begin{array}{l} z \to \Sigma_{k\geq 1}\ f(\varepsilon(k))\ z^k/k! \\ \\ w \to \Sigma_{k+l>0}\ f(\varepsilon(k,l))\ z^k w^l/k!l! \end{array}\right] \end{array}$$

eine treue Darstellung.

(7) Invariante Partitionen endlicher G-Mengen (G eine abelsche Gruppe):
Hier sind die Quotientenobjekte die G-invarianten Partitionen einer endlichen G-Menge. Für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R ist

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Mu}(R) & \to & \mathrm{End}(R[[z(G/V);\ V\in \underset{\sim}{C}]]) \\ f & \to & [z(G/V) \to \Sigma_n\ f(\varepsilon(n,G/V))\ z^n/a_V(n)] \end{array}$$

eine treue Darstellung, wobei $\underset{\sim}{C}$ die Menge der Untergruppen von G mit endlichem Index ist, und $a_V(n) = \Pi_{W\leq V}\ [V:W]^{n(G/W)}n(G/W)!$.

(8) Partitionen endlicher Mengen mit vorgeschriebenen Blockgrößen:
Hier sind die Unterobjekte die Partitionen endlicher Mengen, deren Blockgrößen in einer vorgegebenen Menge N von natürlichen Zahlen enthalten sind. Für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R ist

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Mu}(R) & \to & \mathrm{End}(R[[w,z_m;\ m\in N]]) \\ f & \to & \left[\begin{array}{l} w \to w \\ \\ z_m \to \Sigma_{n=0}^{m}(\Sigma_{\alpha,\omega(\alpha)=m-n}\ f(\varepsilon(\alpha,m))\ z^\alpha/\alpha!)\ w^n/n! \end{array}\right] \end{array}$$

eine treue Darstellung, wobei $\omega(\alpha) = \Sigma_{i\in N}\ i\alpha(i)$ ist.

(9) Direkte Summen in endlichen Vektorräumen:

Hier sind die Unterobjekte Mengen von Unterräumen eines endlich-dimensionalen Vektorraums über $GF(q)$, deren Summe direkt ist.

Für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R ist

$$\begin{array}{lll} Mu(R) & \to & End(R[[w,z_1,z_2,\ldots]]) \\ f & \to & \left[\begin{array}{l} w \to w \\ z_m \to \Sigma_{l=0}^{m} q^{-\lambda(m,l)} (\Sigma_{\alpha,\omega(\alpha)=l} f(\varepsilon(\alpha,m)) z^{\alpha}/\alpha!) w^{m-l}/[m-l]! \end{array}\right] \end{array}$$

eine treue Darstellung, wobei $\lambda(m,l) = (m-l)(m+l-1)/2$ und $\omega(\alpha) = \Sigma_{i=1}^{\infty} i\alpha(i)$ ist.

(10) Die Dowling-Verbände:

Hier sind die geordneten Mengen der Unterobjekte die geometrischen Verbände von T.A. Dowling [7]. Für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R ist

$$\begin{array}{lll} Mun(R) & \to & End(R[[w,z]]) \\ f & \to & \left[\begin{array}{l} w \to \Sigma_{n=1}^{\infty} f(\varepsilon(n)) w^n/n! \\ z \to z(1+ \Sigma_{r=1}^{\infty} f(r\varepsilon(0)) w^r/m^r r!) \end{array}\right] \end{array}$$

eine treue Darstellung des Monoides $Mun(R)$ der fast-multiplikativen Funktionen über R.

(11) Wurzelwälder und Butcher-Reihen:

Hier sind die Unterobjekte die Unterwurzelwälder eines Wurzelwaldes. Das Monoid $Mu(\mathbb{R})$ ist eine Gruppe, heißt die Butcher-Gruppe, und besitzt eine Darstellung durch Butcher-Reihen, die in der numerischen Mathematik bei der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt wird [2],[12].

Adresse des Authors: Arne Dür, Institut für Mathematik der Universität Innsbruck, Techniker-Str. 15, A-6020 Innsbruck.

Referenzen:

[1] Bender E.A.-J.R.Goldman, On the applications of Möbius inversion in combinatorial analysis, Am. Mathem. Monthly 82 (1975), 789-803.

[2] Butcher J.C., An algebraic theory of integration methods, Math. Computation 26 (1972), 79-106.

[3] Cartier P.-D.Foata, Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements, Lecture Notes in Math. 85, Springer, 1969.

[4] Delsarte S., Fonctions de Möbius sur les groupes abeliens finis, Annals of Math. 49 (1948), 600-609.

[5] Désarménien J., La fonction de Möbius du monoide plaxique, C.R.Acad.Sci.Paris Ser.A-B 290, no.19 (1980), A859-A861.

[6] Doubilet P.-G.C.Rota-R.Stanley, The idea of generating function, Proc. 6th Berkeley Symp. on Math.Stat. and Prob. vol.II: Probability Theory, 267-318, Univ.Calif. (1972).

[7] Dowling T.A., A class of geometric lattices based on finite groups, J. Combin. Theory Ser.B 14(1973),61-86.

[8] Dür A., Möbius functions, incidence algebras and power series representations, Lecture Notes in Math. 1202, Springer, 1986.

[9] Foata D., Applications ayant des blocs de croissance d'un type donné, d'après Roby, Université de Strasbourg, 1970.

[10] Goldman J.-G.C.Rota, Finite vector spaces and Eulerian generating functions, Studies in Appl.Math. 49(1970),239-258.

[11] Greene C., The Möbius function of a partially ordered set, in: Ordered sets (Banff,Alta.,1981),Proc. of the NATO Advanced Study Institute, Reidel,Dordrecht, 1982,555-581.

[12] Hairer E.-G.Wanner, On the Butcher group and general multivalue methods, Computing 13(1974),1-15.

[13] Hall Ph., The algebra of partitions, Proc. of the Fourth Canadian Math. Congress (1957), Banff(1959),147-159.

[14] Lascoux A.-M.P.Schützenberger, Le monoide plaxique, in: Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples,1978), pp.129-156, Quad."Ricerca Sci.",109,CNR,Roma,1981.

[15] Macdonald I.G., The algebra of partitions, in: Group theory: essays for Philip Hall,Academic Press,1984.

[16] Macdonald I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[17] Rota G.C., Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1964), 340-368.