

Un modèle combinatoire pour les polynômes de Bessel

Serge Dulucq^(†) et Luc Favreau^(‡)

LaBRI

Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. n° 1304

Université Bordeaux I

Abstract. We present a combinatorial model for the Bessel polynomials. This model, based upon weighted involutions, leads to combinatorial interpretations and proofs for identities of many kinds : differential equation, three-term recurrence relation, differential recurrence equations and exponential generating function. A combinatorial proof of the orthogonality for these polynomials and the value of the normalizing factor, using this model, is given in a forthcoming paper [3].

1. Introduction

Historiquement, les polynômes de Bessel, ainsi nommés compte-tenu de leur relation avec les fonctions de Bessel, apparaissent comme solution de l'équation différentielle du second ordre [1,5]

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 2) \frac{dy}{dx} = n(n + 1)y. \quad (1)$$

La valeur explicite de ces polynômes, en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$, est la suivante :

$$y_n(x) = {}_2F_0(-n, n + 1; _ ; -x/2) \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

(†) avec le soutien du P.R.C. "Mathématiques et Informatique". E-mail dulucq@geocub.greco-prog.fr

(‡) avec le soutien du S.C.A.R. du Québec.

Cette famille de polynômes peut également être définie à partir de la récurrence à trois termes

$$y_{n+1}(x) = (2n+1)x y_n(x) + y_{n-1}(x), \quad (2)$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1+x.$$

Ainsi, les coefficients de ces polynômes sont entiers; nous donnons ci-dessous les cinq premiers polynômes de Bessel pour lesquels nous constatons que les coefficients des monômes de plus haut degré énumèrent les involutions sans point fixe (la suite 1, 1, 3, 15, 105, 945, ...).

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1+x,$$

$$y_2(x) = 1+3x+3x^2,$$

$$y_3(x) = 1+6x+15x^2+15x^3,$$

$$y_4(x) = 1+10x+45x^2+105x^3+105x^4.$$

Il existe de multiples autres relations de récurrence faisant intervenir les dérivées de ces polynômes; parmi les plus classiques nous pouvons citer :

$$x^2 y_n'(x) = (nx-1)y_n(x) + y_{n-1}(x), \quad (3)$$

$$x^2 y_{n-1}'(x) = y_n(x) - (nx+1)y_{n-1}(x), \quad (4)$$

$$x(y_n'(x) + y_{n-1}'(x)) = n(y_n(x) - y_{n-1}(x)), \quad (5)$$

$$(nx+1)y_n'(x) + y_{n-1}'(x) = n^2 y_n(x). \quad (6)$$

La série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel est donnée par l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right), \quad (7)$$

dans laquelle $y_{-1}(x) = 1$, (en général $y_{-n}(x) = y_{n-1}(x)$).

La série apparaissant dans l'exponentielle admet elle-même pour développement

$$\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x} \right) = t + x \frac{t^2}{2!} + 3x^2 \frac{t^3}{3!} + 15x^3 \frac{t^4}{4!} + 105x^4 \frac{t^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (2n)!! x^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

où nous voyons à nouveau apparaître la factorielle impaire $(2n)!! = 1.3.5 \dots (2n-1)$ énumérant les involutions sans point fixe.

Nous proposons, comme le laissent présager les premières constatations faites sur les coefficients, un modèle combinatoire pour cette famille de polynômes, modèle permettant non seulement de retrouver toutes les identités classiques présentées ci-dessus, mais également d'obtenir une démonstration entièrement combinatoire de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

Dans ce travail, nous nous proposons de présenter le modèle et de prouver combinatoirement les identités précédentes, réservant la partie portant sur l'orthogonalité de ces polynômes pour un prochain exposé [3].

Ce travail se présente sous la forme suivante: la section 2 a pour objectif de présenter le modèle combinatoire et de montrer que les objets ainsi définis satisfont l'équation différentielle (1) et la formule de récurrence à trois termes (2); dans le paragraphe 3 nous démontrons les relations de récurrence (3) à (6) et finalement, la dernière section est consacrée à l'obtention de l'identité (7) pour la série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel.

Il convient toutefois de souligner l'existence d'un autre modèle pour les polynômes de Bessel généralisés définis par

$$y_n^a(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+a+1)_k \left(\frac{x}{2} \right)^k$$

où $(n+a+1)_k = (n+a+1)(n+a+2) \dots (n+a+k-1)(n+a+k)$.

Cet autre modèle est un cas particulier d'un modèle plus complexe introduit par Leroux et Strehl [6] pour l'interprétation des polynômes de Jacobi. En effet, en restreignant les objets associés aux polynômes de Jacobi, ils obtiennent un modèle qui

diffère de celui présenté ici, et démontrent les identités fondamentales pour ces polynômes de Bessel généralisés. Mais ce modèle, bien que plus complexe que celui proposé ici, ne permet pas de donner une explication combinatoire pour l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

2. Le modèle combinatoire

Dans cette section, nous définissons, pour chaque entier n positif ou nul, une classe d'objets pondérés telle que la cardinalité de cette famille (en tenant compte de cette pondération) soit un polynôme. Nous montrons ensuite que les polynômes ainsi définis sont les polynômes de Bessel.

Dans toute la suite de cet article, le *nombre d'involutions* sur n points ayant k points fixes sera noté I_n^k , tandis que l'*ensemble de ces involutions* sera noté \mathbb{I}_n^k . Puisque k est le nombre de points fixes et que $n - k$ est le nombre de points qui sont deux à deux couplés, $n - k$ doit obligatoirement être pair. Nous avons donc évidemment

$$I_n^k = \text{Card}(\mathbb{I}_n^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n - k \text{ est impair} \\ I_n^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons souvent une représentation graphique des involutions, très classique en Combinatoire. Celles-ci seront représentées par n points horizontalement alignés et les points deux à deux couplés seront reliés par des *arêtes* (la *figure 1* représente une involution sur cinq points ayant un seul point fixe). Nous noterons $c(\tau)$ le nombre d'arêtes de l'involution τ .

Nous désignerons par le terme *orbites* les cycles de longueur 1 ou 2 de l'involution, c'est à dire les points fixes et les arêtes. Ainsi, l'involution de la *figure 1* comprend trois orbites : deux arêtes et un point fixe.



figure 1

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{I}_n^k(x)$ des involutions pondérées sur n points ayant k points fixes, où la fonction de poids ρ associe à chaque involution τ le poids défini par

$$\rho(\tau) = x^{c(\tau)}.$$

Nous étendons alors la fonction $Card$ à ces objets pondérés comme suit

$$Card_x(\mathbb{I}_n^k(x)) = I_n^k x^k,$$

ce qui nous permet de définir une famille de polynômes qui, comme nous le montrerons par la suite, s'avérera être celle des polynômes de Bessel.

Définition 1. On définit $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ comme étant la suite de polynômes

$$y_n(x) = Card_x\left(\bigcup_{k=0}^n \mathbb{I}_{n+k}^{n-k}(x)\right),$$

c'est à dire, compte-tenu de la définition de $Card_x$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n I_{n+k}^{n-k} x^k. \quad (12)$$

La figure 2 illustre l'ensemble $\mathbb{I}_2^2(x) \cup \mathbb{I}_3^1(x) \cup \mathbb{I}_4^0(x)$ correspondant au polynôme $y_2(x)$.

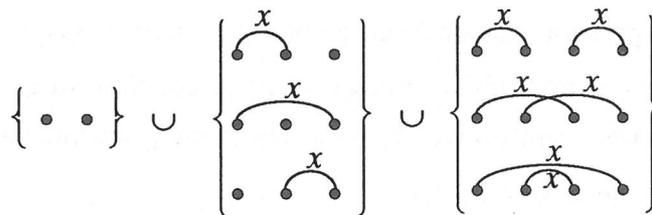


figure 2

Remarque 1. Au polynôme $y_n(x)$ ainsi défini correspond la famille des involutions (pondérées par la fonction ρ) ayant exactement n orbites, c'est à dire les involutions opérant sur un nombre de points pouvant aller de n (uniquement des points fixes) à $2n$ (uniquement des cycles de longueur 2).

Cette interprétation combinatoire des polynômes de Bessel, bien que voisine de celle correspondant aux polynômes de Hermite [4,7], diffère quant à la taille et la pondération des involutions associées. En effet, le n ème polynôme de Hermite est

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} I_n^{n-2k} (-1)^k x^{n-2k}.$$

A ce polynôme correspond donc l'ensemble des involutions opérant exactement sur n points et ayant $n-2k$ points fixes (ou k arêtes). La pondération consiste ici en les poids x sur chaque point fixe et (-1) sur chaque arête.

Théorème 1. Les polynômes $y_n(x)$, définis par (12), sont les polynômes de Bessel.

Preuve. Nous constatons tout d'abord que les deux conditions initiales de la récurrence sont satisfaites, c'est à dire $y_0(x) = 1$ (involution "vide" de poids 1) et $y_1(x) = 1 + x$ (involution comportant une seule orbite : point fixe de poids 1 ou cycle de longueur 2 de poids x). Ensuite, il nous suffit de montrer l'égalité des deux membres de l'identité (2) pour les coefficients en x^k , c'est à dire vérifier que

$$I_{n+l+k}^{n+l-k} = (2n+1)I_{n+k-l}^{n-(k-l)} + I_{n-l+k}^{n-l-k}.$$

Ceci revient à construire une bijection entre l'ensemble I_{n+l+k}^{n+l-k} et l'ensemble $[2n+1] \times I_{n+k-l}^{n-(k-l)} \cup I_{n-l+k}^{n-l-k}$. Considérons donc une involution τ dans l'ensemble I_{n+l+k}^{n+l-k} . Ou bien τ a un point fixe à la fin (à droite dans la représentation graphique c'est à dire le point $n+l+k$) ou bien le dernier point de τ est relié par une arête à un autre point situé à sa gauche. Dans le premier cas, on peut "bijectivement" supprimer ce point et ainsi obtenir une involution appartenant à l'ensemble I_{n+k}^{n-k} ; dans le deuxième cas on supprime l'arête (et ses deux extrémités) en mémorisant la position où se trouvait l'extrémité initiale de cette arête supprimée, et nous obtenons donc un couple de l'ensemble $[n+k] \cup I_{n+(k-l)}^{n-(k-l)}$. Ainsi, nous avons

$$I_{n+l+k}^{n+l-k} = I_{n+k}^{n-k} \cup [n+k] \times I_{n+(k-l)}^{n-(k-l)}. \quad (13)$$

On réapplique une nouvelle fois le même type de décomposition sur le premier ensemble du membre droit de l'identité ci-dessus. Si l'involution τ dans I_{n+k}^{n-k} possède un point fixe à la fin, on le supprime et on obtient une involution dans I_{n-l+k}^{n-l-k} . Si par contre le dernier point est relié à un autre point par une arête, cette fois ci on supprime cette arête en conservant toutefois l'extrémité initiale de celle-ci (ce point devient point fixe de la nouvelle involution) que l'on marque pour rendre la construction réversible. Ce faisant, nous obtenons une involution de l'ensemble $I_{n+(k-l)}^{n-(k-l)}$ dont un point fixe est marqué (choix d'un entier dans l'ensemble $[n-k+1]$).

Cette dernière décomposition permet de réécrire l'équation (13) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{n+l+k}^{n+l-k} &= \mathbb{I}_{n-l+k}^{n-l-k} \cup [n-k+l] \times \mathbb{I}_{n+(k-l)}^{n-(k-l)} \cup [n+k] \times \mathbb{I}_{n+(k-l)}^{n-(k-l)} \\ &= \mathbb{I}_{n-l+k}^{n-l-k} \cup [2n+l] \times \mathbb{I}_{n+(k-l)}^{n-(k-l)}. \end{aligned}$$

La figure 3 présente schématiquement cette bijection pour laquelle nous avons combiné les deux étapes de la décomposition.

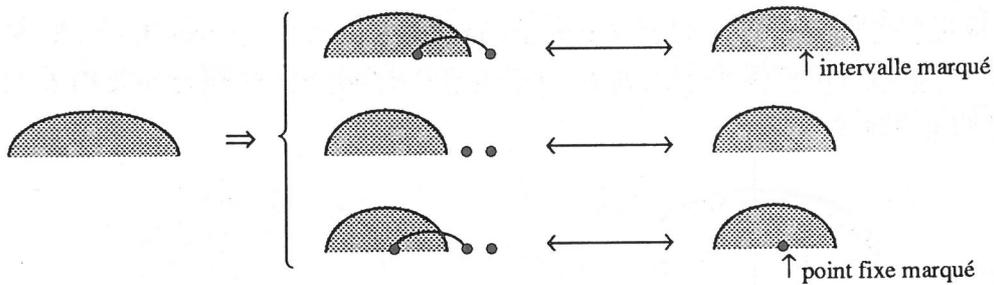


figure 3

Ceci termine la preuve du *théorème 1*.

Une autre façon de montrer que les polynômes définis sont les polynômes de Bessel est de montrer qu'ils satisfont l'équation différentielle du second ordre (1).

Théorème 2. Les polynômes $y_n(x)$ satisfont l'équation différentielle définissant les polynômes de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + 2) \frac{dy}{dx} = n(n+1)y.$$

Preuve. En reportant la définition des polynômes $y_n(x)$ (équation (12)) dans cette équation différentielle, et en extrayant les coefficients du monôme x^k , ce théorème

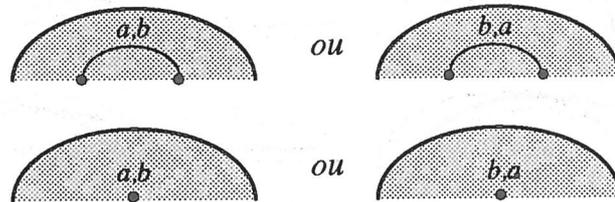


figure 4

revient à montrer que

$$(k+1)kI_{n+k}^{n-k} + 2(k+1)I_{n+(k+1)}^{n-(k+1)} = n(n+1)I_{n+k}^{n-k} \quad (14)$$

Considérons le membre de droite de (14). Celui peut s'interpréter comme étant le nombre d'involutions sur $n+k$ points ayant $n-k$ points fixes, involutions constituées donc de n orbites, dont deux sont pointées par des lettres, a et b par exemple, où l'on tient compte de l'ordre du marquage et où l'on admet les répétitions, une même orbite pouvant être marquée deux fois, et de deux façons distinctes (a,b ou bien b,a comme le montre la figure 4).

Dans le cas où les orbites pointées sont des arêtes (il y en a k), ceci donne le premier terme du membre gauche de (14) ($k(k+1)$ manières d'étiqueter compte-tenu de ces règles dans l'étiquetage).

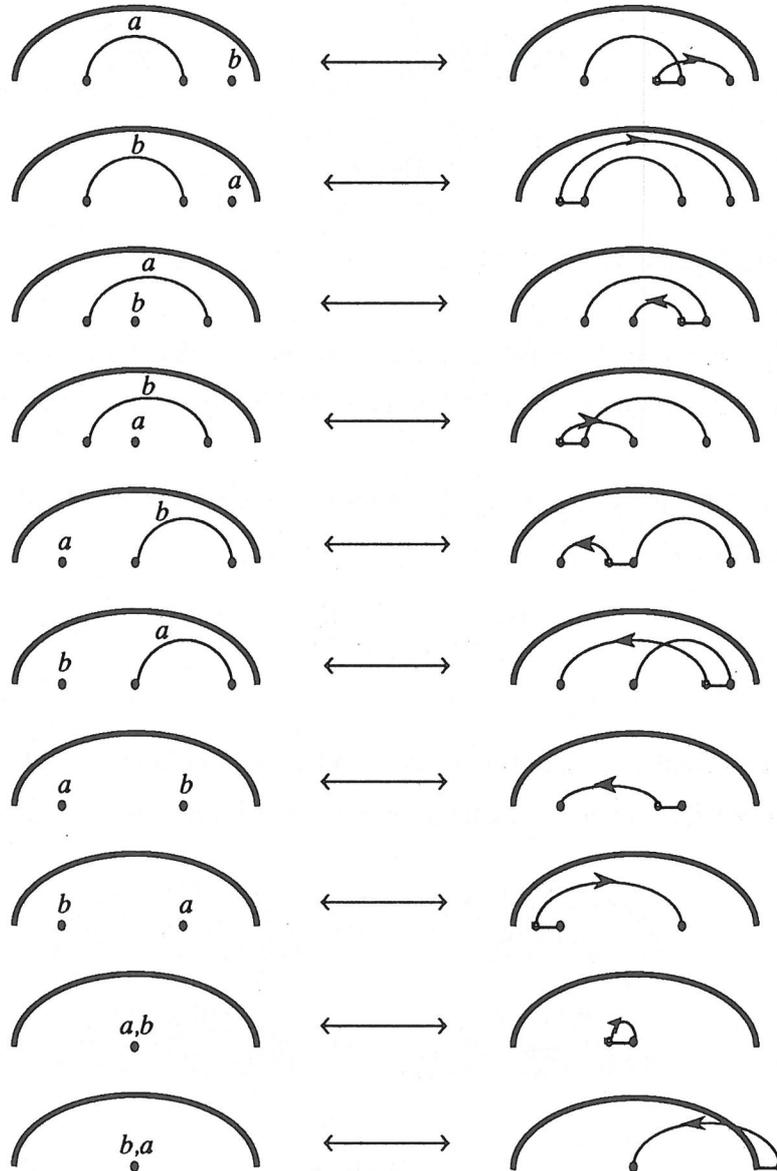


figure 5

Si tel n'est pas le cas, l'étiquetage porte alors sur deux orbites dont l'une au moins est un point fixe de l'involution. Nous obtenons alors dix cas génériques suivant les positions des deux orbites marquées. Par une construction réversible (voir la figure 5), il est possible pour chacun de ces dix cas d'ajouter une nouvelle arête à ces involutions, arête que l'on oriente et dont l'une des extrémités est le (l'un des) point(s) fixe(s) étiqueté(s) de l'involution initiale. Nous obtenons de cette façon des involutions sur $n+k+1$ points ayant $n-(k+1)$ points fixes et dont l'une des $k+1$ arêtes est orientée (à droite ou à gauche), ce qui donne le deuxième terme du membre gauche de (14). On retrouve une classification en dix familles pour ces involutions, en examinant l'orbite déterminée par le point situé immédiatement à droite du point constituant l'origine de l'arête orientée.

3. Equations de récurrence aux dérivées

Nous nous proposons ici de prouver les équations de récurrence (3) à (6) faisant intervenir la dérivée première des polynômes de Bessel à l'aide de notre modèle combinatoire.

Théorème 3. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x^2 y_n'(x) = (nx - 1)y_n(x) + y_{n-1}(x),$$

Preuve. En interprétant cette équation avec notre modèle combinatoire, et en extrayant les coefficients du monôme x^k , ceci revient à montrer l'identité suivante :

$$(n - (k - 1))I_{n+(k-1)}^{n-(k-1)} + I_{n-1+k}^{n-1-k} = I_{n+k}^{n-k}.$$

Cette formule est la formule de récurrence classique pour les involutions. En effet, soit une involution (dont le nombre est donné par le membre droit de l'équation) se termine par un point fixe que l'on supprime, ce qui donne le deuxième terme du membre gauche; soit elle se termine par un point qui est l'extrémité d'une arête, et dans ce cas on supprime ce dernier point et cette arête en marquant l'extrémité initiale (que l'on conserve) qui devient point fixe, obtenant ainsi le premier terme du membre gauche.

Théorème 4. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x^2 y_{n-1}'(x) = y_n(x) - (nx + 1)y_{n-1}(x),$$

Preuve . Ceci revient à démontrer l'identité suivante :

$$(n+k-1)I_{(n-1)+(k-1)}^{(n-1)-(k-1)} + I_{n-1+k}^{n-1-k} = I_{n+k}^{n-k}.$$

Il s'agit toujours de la formule de récurrence classique pour les involutions. La même construction que précédemment permet de la prouver, à ceci près que dans le cas de la suppression de l'arête dont l'une des extrémités est le dernier point de l'involution, on supprime cette fois les deux points constituant cette arête, en marquant l'endroit où figurait la première extrémité de celle-ci.

Théorème 5. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence différentielle

$$x(y'_n(x) + y'_{n-1}(x)) = n(y_n(x) - y_{n-1}(x)),$$

Preuve. La preuve de cette équation revient à prouver l'identité suivante :

$$(n-k)I_{n+k}^{n-k} = (n+k)I_{n-1+k}^{n-1-k}.$$

Le membre gauche de cette identité énumère les involutions sur $n+k$ points ayant $n-k$ points fixes, l'un d'entre eux étant pointé. La suppression de ce point fixe pointé fournit une involution ayant un point (fixe) de moins, un intervalle entre deux points étant marqué (il y en a donc $n+k$) afin que cette construction soit réversible.

Théorème 6. Les polynômes de Bessel satisfont la récurrence

$$(nx+1)y'_n(x) + y'_{n-1}(x) = n^2 y_n(x).$$

Preuve. La démonstration s'inspire de la technique employée dans la preuve du *théorème 2*. Tout d'abord, cette équation revient à prouver l'identité suivante :

$$(k+1)I_{n+(k+1)}^{n-(k+1)} + (k+1)I_{n-1+(k+1)}^{n-1-(k+1)} = n(n-k)I_{n+k}^{n-k}.$$

Le membre droit de cette identité peut s'interpréter comme étant l'ensemble des involutions dont l'une des n orbites est marquée par le symbole " + " par exemple, et l'un des $n-k$ points fixes par le symbole " * ". Ceci conduit à une classification en six groupes suivant les positions de ces marques (voir *figure 6*).

Pour le premier type, on relie les deux points fixes marqués "*" et "+" (dans cet ordre) par une arête que l'on choisit d'orienter vers la gauche. Nous obtenons donc une involution agissant sur le même nombre de points $n+k$ mais ayant deux points fixes de moins, et dont une arête (parmi $k+1$) est marquée (orientée vers la gauche); ceci nous donne la formule d'énumération constituant le second terme du membre gauche de l'identité.

Le premier terme de ce membre gauche énumère les involutions ayant n orbites dont $k+1$ sont des arêtes, l'une d'entre elles étant marquée (orientation vers la droite, comme sur la *figure 6*). Ces involutions sont classifiables en cinq groupes en fonction de l'orbite déterminée par le point situé immédiatement à droite du point constituant l'origine de l'arête orientée (les cinq dernières configurations de la partie droite de la *figure 6*). Lorsque ce point est l'extrémité d'une arête, on supprime ce point et l'arête en conservant l'autre extrémité qui devient point fixe (les trois derniers cas de la *figure 6*) en introduisant les marques permettant d'inverser la construction. Lorsque ce point est fixe ou qu'il n'existe pas, on effectue les deux opérations données par les deuxième et troisième schémas de la *figure 6*.

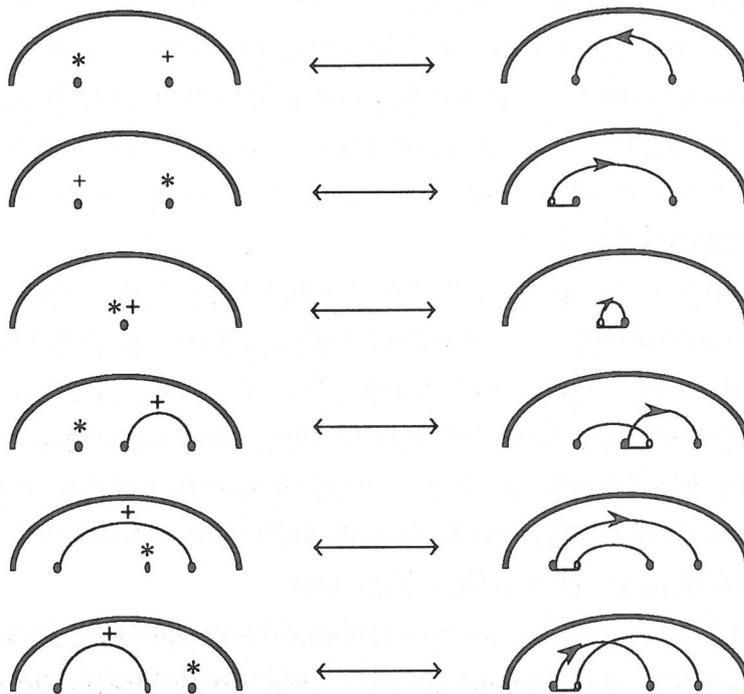


figure 6

4. La série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel

Une fonction importante associée à tout objet combinatoire est sa série génératrice (ordinaire ou exponentielle). Dans le cas des polynômes de Bessel, la série génératrice exponentielle est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right) \quad (15)$$

où le membre droit correspond à l'exponentielle d'une fonction qui elle-même admet pour développement en série exponentielle la série

$$\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right) = \sum_{n \geq 1} (2n - 2)!! x^{n-1} \frac{t^n}{n!}.$$

Au *nième* coefficient de cette série correspond le nombre d'involutions pondérées sans point fixe ayant $n-1$ arêtes, chacune d'elles munie du poids x . Habituellement, le *nième* coefficient de la série génératrice d'une structure combinatoire s'interprète comme étant le nombre d'objets de taille n . Ici les objets sont des involutions sans point fixe ayant $n-1$ arêtes; nous ajoutons donc un point fixe à droite dans la représentation graphique de ces involutions et nous appelons ces involutions les *involutions élémentaires*.

Nous en déduisons, par interprétation de l'exponentiation de cette série, que le *nième* coefficient du membre droit de l'équation (15) dénombre les assemblées d'involutions élémentaires pondérées (poids x sur chaque arête) ayant exactement n orbites étiquetées. La *figure 7* représente une assemblée de trois involutions élémentaires constituée de dix orbites. L'étiquetage des orbites dans chaque part se fait de la gauche vers la droite, suivant l'ordre d'apparition de leur extrémité initiale. Nous dirons que ces involutions élémentaires sont *orbites-étiquetées*.

D'autre part, nous considérons que les involutions correspondant au membre gauche de (15) sont étiquetées naturellement suivant l'ordre des points sur lesquels elles opèrent; nous les appelons involutions *points-étiquetés*. De plus, pour la même raison que précédemment, nous ajoutons un point fixe terminal à ces involutions. Ainsi, le *nième* terme de la série génératrice exponentielle des polynômes de Bessel s'interprète comme étant le nombre d'involutions *points-étiquetés* ayant n orbites, cette dernière orbite devant être un point fixe (voir *figure 8*).

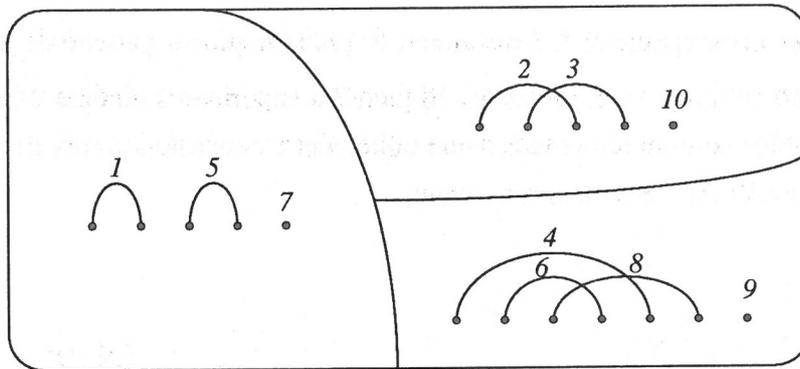


figure 7

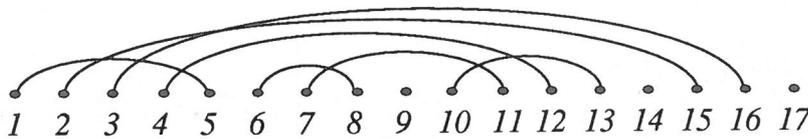


figure 8

Ainsi, démontrer combinatoirement l'équation (15) revient à trouver une bijection qui, à une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées ayant n orbites, fait correspondre une involution points-étiquetés ayant également n orbites, la dernière étant un point fixe. Cette bijection, que nous décrivons par la suite, mettra en particulier en correspondance l'assemblée de la *figure 7* avec l'involution de la *figure 8*.

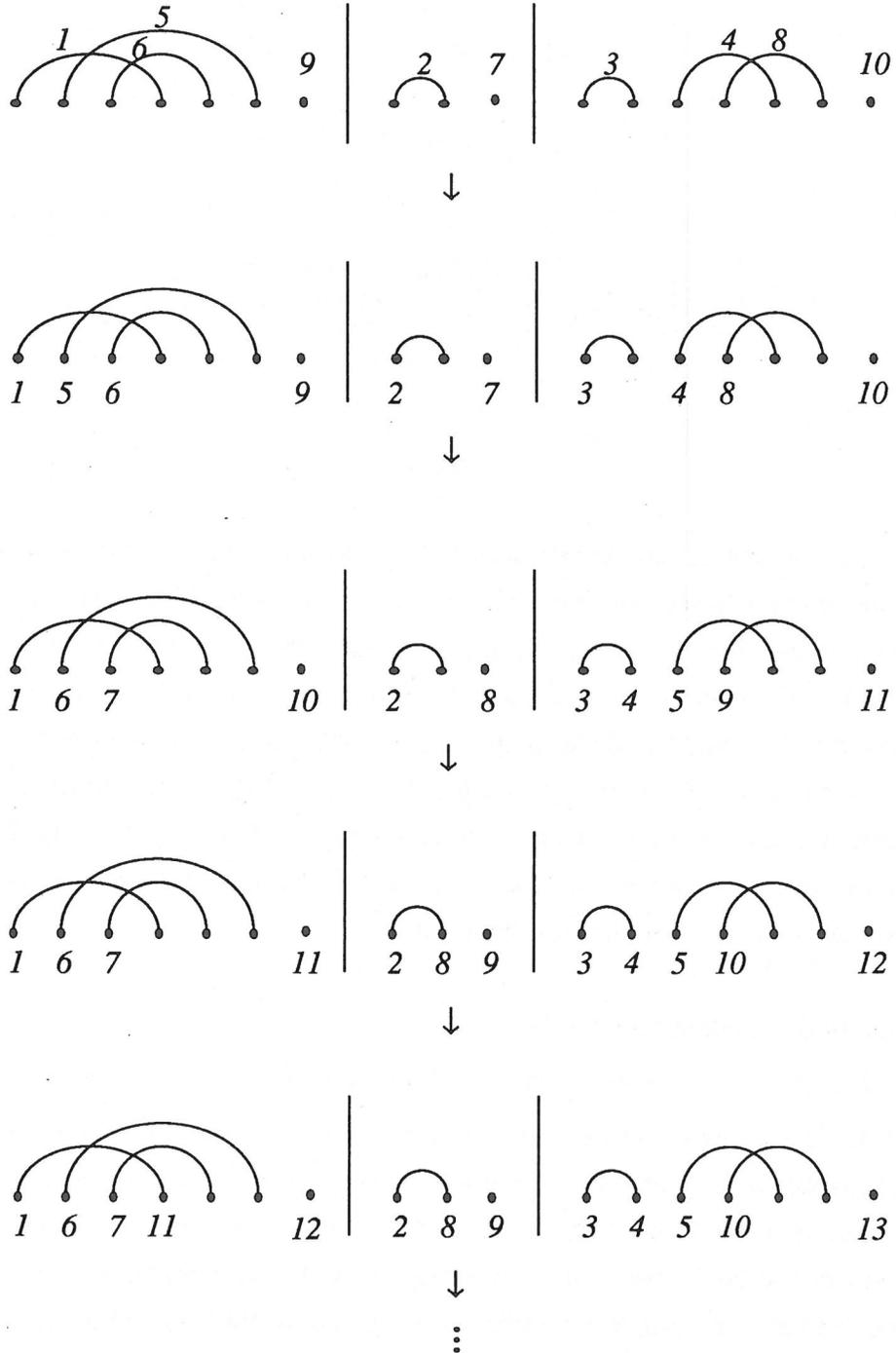
Toutefois, avant de présenter cette bijection, nous allons tout d'abord décrire une construction intermédiaire associant à une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées une assemblée d'*involutions élémentaires points-étiquetés* ayant certaines propriétés les caractérisant que nous énoncerons.

Description de la construction \mathfrak{C} .

Soit $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$ une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées, constituée de n orbites réparties entre les k parts, involutions opérant sur $2n - k$ points au total (parmi les n orbites, k sont exactement des points fixes situés à la fin de chaque part). Pour faciliter la description de cette construction, nous considérons que les étiquettes des arêtes, pour toutes les involutions de l'assemblée, sont associées aux points constituant les extrémités initiales de ces arêtes (passage du premier au second schéma de la *figure 9*). Ensuite, pour chaque entier i de 1 à $2n - k$, l'étiquette i est une étiquette appartenant à une certaine involution élémentaire τ_j pour un certain entier j .

Dans le cas où tous les points de τ_j à gauche du point étiqueté i sont déjà étiquetés, ce point conserve son étiquette i . Autrement, le point le plus à gauche de τ_j non encore étiqueté prend l'étiquette i , et toutes les étiquettes k supérieures ou égales à i apparaissant dans l'assemblée sont incrémentées d'une unité. Cette construction, décrite sur l'exemple qui suit (figure 9) est clairement réversible.

Exemple 1.



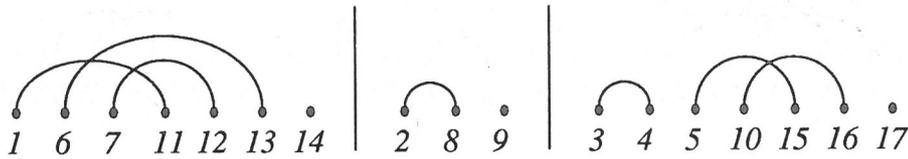


figure 9

Remarque 2. Les involutions élémentaires points-étiquetés ainsi obtenues ont certaines propriétés. En particulier, toute suite de longueur maximale de points consécutifs constituant les extrémités finales d'arêtes ont des étiquettes formant une suite croissante de nombres entiers consécutifs. De plus, le point suivant (nécessairement fixe ou extrémité initiale d'une arête) est étiqueté par l'entier immédiatement supérieur (voir dernière partie de la *figure 9*). Cette propriété caractérise complètement les *involutions élémentaires points-étiquetés*.

Théorème 7. La série génératrice des polynômes de Bessel est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{1 - (1 - 2xt)^{1/2}}{x}\right).$$

Preuve. Nous construisons une bijection Φ entre l'ensemble des assemblées d'involutions élémentaires sur n orbites et l'ensemble des involutions (se terminant par un point fixe) ayant exactement n orbites.

Soit $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$ une assemblée d'involutions élémentaires orbites-étiquetées, comportant au total n orbites. Par la construction \mathfrak{C} , nous obtenons la même assemblée points-étiquetés. Il suffit alors d'insérer les involutions élémentaires de façon canonique, c'est à dire selon l'ordre croissant des étiquettes des points, pour obtenir l'involution cherchée (voir *figure 10*). Celle-ci se termine nécessairement par un point fixe compte-tenu de la construction \mathfrak{C} et de la *remarque 2*.

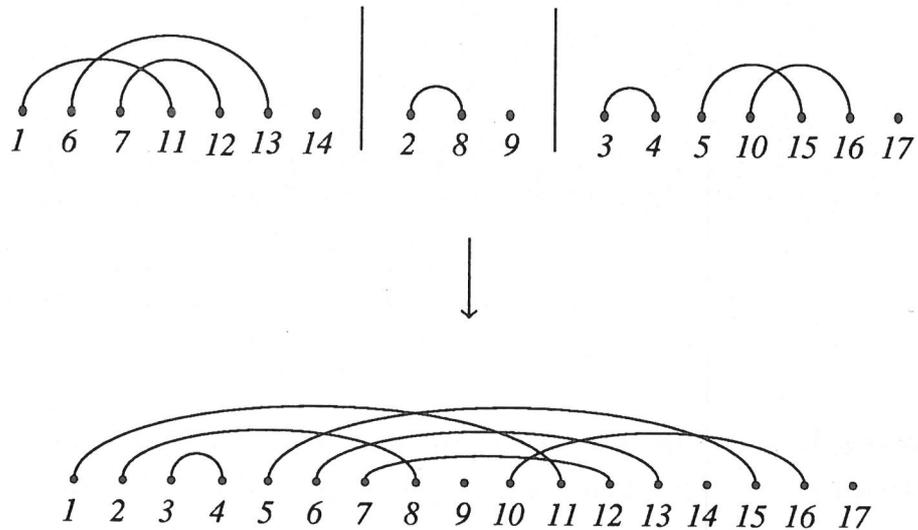


figure 10

Il s'agit maintenant de montrer que Φ est une bijection, ou, en d'autres termes, comment retrouver l'assemblée d'involutions élémentaires à partir de l'involution points-étiquetés? Notons tout d'abord que le nombre de parts de l'assemblée est exactement le nombre de points fixes de l'involution points-étiquetés (il y en a au moins une par construction, les involutions devant toujours se terminer par un point fixe).

Partant de ce point fixe terminal, nous construisons la dernière part de l'assemblée en prenant (voir *exemple 2*) :

- toutes les arêtes dont l'extrémité finale est à droite de l'avant dernier point fixe,
- toutes les arêtes dont l'extrémité finale est étiquetée par un entier immédiatement inférieur à une étiquette d'un point appartenant déjà à la part considérée, cette règle étant appliquée récursivement.

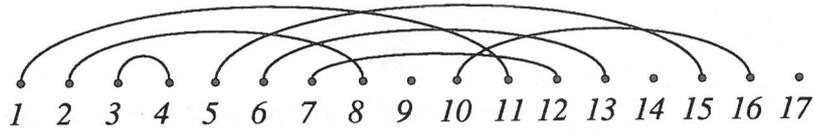
En réitérant ce processus, on construit part par part l'assemblée d'involutions élémentaires.

La construction ainsi définie est bien l'application réciproque de Φ compte-tenu de la *remarque 2* caractérisant les involutions élémentaires points-étiquetés, comme l'on peut le constater dans l'exemple qui suit.

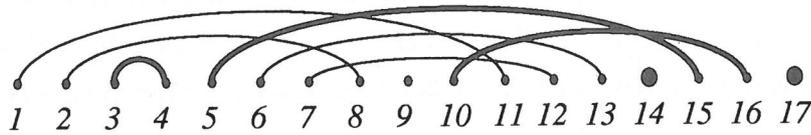
De plus, il est clair que cette bijection conserve la pondération en x des objets, puisque la bijection Φ préserve (de par sa définition) le nombre d'arêtes des objets se correspondant.

Ceci termine la preuve du *théorème 7*.

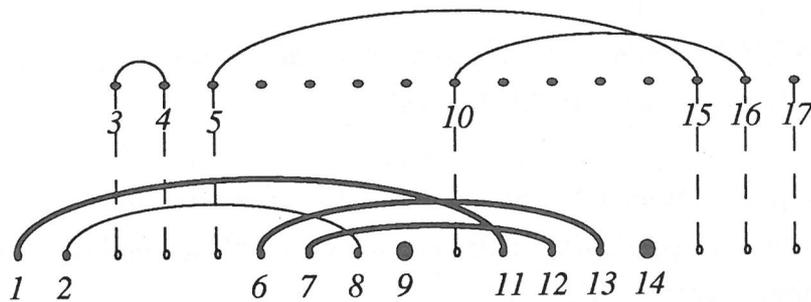
Exemple 2. Considérons l'involution obtenue à l'issue de l'exemple 1, après intercalément des parts de l'assemblée (figure 10).



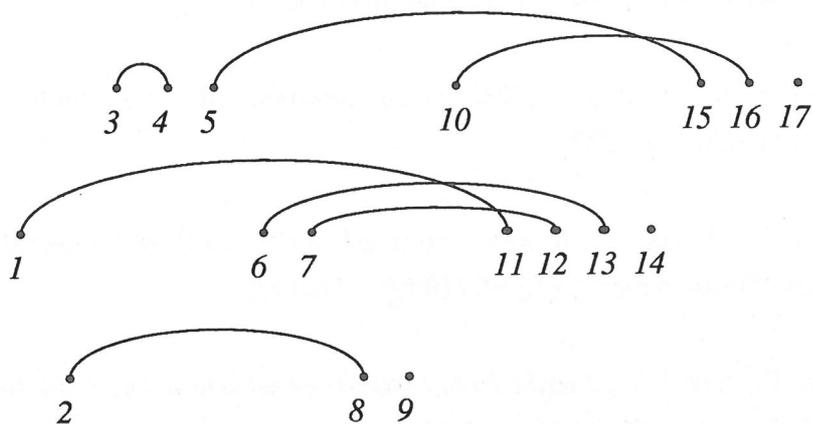
La première itération du processus décrit ci-dessus donne (en gras sur la figure) les arêtes constituant la première part de l'assemblée,



puis la seconde part,



et finalement, nous obtenons les trois parts suivantes



ce qui correspond effectivement à l'assemblée recherchée.

5. Conclusion

Il convient de remarquer que nous aurions pu définir les polynômes de Bessel à partir des tableaux oscillants [2], plus précisément

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n f_{n+k}^{(n-k)} x^k,$$

où $f_n^{(k)}$ est le nombre de tableaux oscillants de longueur n et de forme finale $(k) = (1, 1, \dots, 1)$.

Il serait intéressant de revoir les démonstrations des identités classiques sur ces polynômes en considérant cet autre modèle, modèle opérant dans le treillis des partages d'entiers. Dans ce cas, aux polynômes de Bessel sont associés des tableaux n'opérant que sur une partie de ce treillis (forme finale réduite à une seule ligne (ou colonne)). Un prochain travail pourrait peut-être consister en une généralisation de ces polynômes à tout le treillis.

Bibliographie.

[1] Chihara Th. S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New-York, London, Paris (1978), 181-183.

[2] Delest M.P., Dulucq S., Favreau L., *An analogue to Robinson-Schensted correspondence for oscillating tableaux*. Actes du 20ième Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Alghero 1988, 57-78.

[3] Dulucq S., Favreau L., *Combinatoire des polynômes de Bessel II : orthogonalité*. Rapport de Recherches LaBRI, Université Bordeaux I, 1990.

[4] Heilmann O.J., Lieb E.H., *Theory of monomer-dimer systems*, Comm. Math. Physics, 25 (1972), 190-232.

[5] Krall H.L., Frink O., *A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials*, Trans. Amer. Soc., 65 (1949), 100-115.

[6] Leroux P., Strehl V., *Jacobi Polynomials: combinatorics of the basic identities*, Discrete Mathematics, 57 (1985), 167-187.

[7] Viennot X.G., *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, notes de cours, Université du Québec à Montréal, 1983.