Ordnungen nichtkommutativer Ringe

von

Udo Hebisch und Wilfried Lex

ABSTRACT. The cardinalities of non-commutative finite rings are completely determined: there is a non-commutative ring of order n or such a ring with identity iff n is not square-free or cube-free, resp.

Unter einem *Ring* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ soll hier eine Struktur mit binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ so verstanden werden, daß $(R, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot$ distributiv bezüglich $+$ ist. $\mathcal{R}$ heiße *assoziativ* bzw. *kommutativ* im Falle der Assoziativität bzw. Kommutativität von $(R, \cdot)$ und natürlich *nichtkommutativ* bzw. *nichtassoziativ*, falls $\mathcal{R}$ nicht kommutativ bzw. nicht assoziativ ist. — $\mathbb{N}$ stehe für die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Bekanntlich ist für jedes n aus $\mathbb{N}$ der Restklassenring der ganzen Zahlen modulo n ein kommutativer Ring der *Ordnung* n — d. h. ein Ring mit n Elementen —, sogar ein assoziativer mit Einselement; aber nichtkommutative Ringe, selbst nichtassoziative, sind, zumindest was die möglichen Ordnungen angeht, weit seltener:

Wie üblich nennen wir eine ganze Zahl n *quadratfrei* bzw. *kubusfrei*, falls es kein t aus $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $t^2 \mid n$ bzw. $t^3 \mid n$ gibt, wobei "|" für "teilt" stehe.

Betrachtet man die möglichen Zerlegungen der additiven Gruppe eines endlichen Ringes in direkte Summen zyklischer Gruppen und benutzt die Tatsache, daß jeder endliche Ring direktes Produkt von Ringen mit Primzahlpotenzordnungen ist (vgl. etwa [1], (I.1), S. 2), so gewinnt man den

Satz: *Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann, und nur dann, einen nichtkommutativen assoziativen Ring der Ordnung n bzw. einen solchen mit Eins, wenn n nicht quadratfrei bzw. nicht kubusfrei ist.*

Die Teilaussage, daß jeder assoziative Ring kubusfreier Ordnung mit Eins kommutativ ist, findet sich bereits in [1], (I.3), (c), S. 4. — Satz und Beweis bleiben gültig, falls "assoziativen" gestrichen wird. — Dieses Resultat ergab sich im Zusammenhang mit der Entwicklung eines Computerprogramms zur Klassifikation algebraischer Strukturen. — Eine ausführlichere englische Darstellung soll noch publiziert werden.

Literatur

[1] **B. R. McDonald:** *Finite Rings with Identity.* Marcel Dekker, New York, 1974.

Udo Hebisch
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal
Erzstraße 1
D – 3392 Clausthal-Zellerfeld

Wilfried Lex
Institut für Informatik
Technische Universität Clausthal
Erzstraße 1
D – 3392 Clausthal-Zellerfeld