SUR LES POLYNOMES DE CATALAN MULTIPLES

G. Kreweras, PARIS VI

Une des définitions possibles des polynômes de Catalan multiples est la suivante : en appelant $c(x)$ la fonction génératrice des nombres de Catalan,

$$c(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \dots ,$$

Le polynôme de Catalan k-uple $P(m_1, m_2, \dots, m_k ; u)$ est le coefficient du monôme $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ dans le développement de

$$[1 - x_1 c(x_1) - x_2 c(x_2) - \dots - x_k c(x_k)]^{-u-1} ;$$

Son degré en u est $m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Les polynômes de Catalan simples et doubles ($k = 1$ et $k = 2$) ont fait l'objet d'une étude détaillée, à paraître dans le "Journal Européen de Combinatoire". En particulier leurs zéros sont tous des entiers négatifs distincts.

Pour $k \geq 3$, on peut démontrer les propriétés suivantes :

1°) Les zéros de $P(m_1, m_2, \dots, m_k ; u)$ continuent d'être des réels négatifs distincts, mais ne sont plus nécessairement entiers.

2°) Si aucun des m_i n'est nul, les entiers $-1, -2, \dots, -k$ se trouvent parmi les zéros.

3°) Sous la même condition $m_1 m_2 \dots m_k \neq 0$, on peut poser $m_i = r_i + 1$ et faire le changement de variables $v = -k-1-u$. Les $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ zéros de $P(m_1, m_2, \dots, m_k ; u)$ autres que $-1, -2, \dots, -k$ sont alors donnés par ceux d'un polynôme $Q(r_1, r_2, \dots, r_k ; v)$ dont les coefficients se calculent par une règle de convolution simple.

4°) Les zéros du polynôme $Q(r_1, r_2, \dots, r_k ; v)$, dont le degré est $d = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, sont non seulement réels et distincts, mais en outre appartiennent tous au segment $[0, 2d]$. Si l'on a de plus

$r_1 > r_2 + r_3 + \dots + r_k$, $r_1 - r_2 - r_3 - \dots - r_k$ d'entre eux sont les entiers du segment $[d + 1, 2r_1]$.

5°) Dans le cas particulier où $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$, on peut poser $Q(1, 1, \dots, 1 ; v) = Q_k(v)$. On a alors

$$Q_k(v) = \sum_{i=o}^{k} (-2)^i \binom{k}{i} (v)_{k-i} ,$$

avec $(v)_j = v(v-1)\dots(v-j+1)$, et les $Q_k(v)$ se trouvent former une famille de polynômes orthogonaux dont la récurrence de Darboux - Christoffel est

$$Q_k(v) = (v - k - 1)\, Q_{k-1}(v) - 2(k - 1)\, Q_{k-2}(v) ,$$

avec $Q_o(v) = 1$ et $Q_1(v) = v-2$.

6°) Exemple : les six zéros du polynôme de Catalan triple $P(2,2,2 ; u)$ sont

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4{,}510\dots, \quad -6{,}710\dots, \quad -9{,}778 .$$