

q-BESSEL et POLYOMINOS

J.C.Lalanne

LaBRI

Université de Bordeaux I, U.F.R. de Mathématiques et Informatique

Résumé *L'objet de cet article est une généralisation de résultats récents sur l'énumération des polyominos parallélogrammes, utilisant les fonctions de Bessel. Pour cela, nous définissons d'abord la notion de polyomino parallélogramme à franges. Puis nous montrons que la fonction génératrice de ces objets selon l'aire et le nombre de colonnes s'exprime à l'aide de q-analogues de fonctions de Bessel. Nous établissons d'autre part quelques propriétés de ces q-analogues liés au q-calcul.*

1. INTRODUCTION

Un carré unitaire du plan $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une *cellule*, le *niveau* d'une cellule est l'ordonnée de son bord inférieur. Un *polyomino* est une réunion finie de cellules, constituant une partie connexe dont l'intérieur est également connexe. Un polyomino est défini à une translation près. Une *colonne* (resp. une *ligne*) est l'intersection entre le polyomino et une bande unitaire infinie verticale (resp. horizontale). Un polyomino est *convexe* lorsque ses lignes et ses colonnes le sont. L'*aire* est le nombre de ses cellules et le *périmètre* d'un polyomino est la longueur de son bord. Les polyominos sont des objets combinatoires classiques ([14], [12]), également étudiés en Physique Statistique, sous le concept d'animal ([19]). Un problème ouvert est celui de leur énumération selon les paramètres aire ou périmètre. Seuls quelques types de polyominos (tas, parallélogrammes, convexes [8],[16], verticalement convexes [5]) ont été dénombrés selon l'une ou l'autre de ces distributions.

Un *polyomino parallélogramme* est un polyomino convexe tel que la suite des niveaux des cellules inférieures (resp. supérieures) des colonnes numérotées de gauche à droite est croissante. Un polyomino parallélogramme P à n colonnes est entièrement déterminé par la donnée de deux suites $B(P) = (b_1, \dots, b_n)$ et $H(P) = (h_1, \dots, h_n)$, où b_i (resp. h_i) est l'ordonnée du bord inférieur (resp. supérieur) de la $i^{\text{ème}}$ colonne. Ces suites (b_1, \dots, b_n) et (h_1, \dots, h_n) satisfont aux conditions:

$$(C_1) \quad b_i \leq b_{i+1} \quad \text{pour } i=1, \dots, n-1$$

$$(C_2) \quad h_i \leq h_{i+1} \quad \text{pour } i=1, \dots, n-1$$

$$(C_3) \quad b_{i+1} < h_i \quad \text{pour } i=1, \dots, n-1$$

$$(C_4) \quad b_1 = 0$$

et réciproquement tout couple de suites satisfaisant à (C_1) , (C_2) , (C_3) et (C_4) détermine un polyomino parallélogramme à n colonnes.

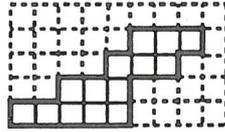


Figure 1. Un polyomino parallélogramme.

On notera \mathcal{PP} l'ensemble des polyominos parallélogrammes et CO (resp. LI, AR, DP) les fonctions nombre de colonnes (resp. nombre de lignes, aire, demi-périmètre) définies sur \mathcal{PP} .

Le polyomino parallélogramme P représenté sur la figure 1 est déterminé par les deux suites $B(P)=(0,0,0,0,0,2,2,3)$ et $H(P)=(1,1,2,2,3,4,4,4)$. Il satisfait aux relations $CO(P)=8$, $LI(P)=4$, $DP(P)=12$, $AR(P)=14$.

Les polyominos parallélogrammes de périmètre $2p+2$ sont en bijection avec les mots de Dyck de longueur $2p$ et sont dénombrés selon ce paramètre par le nombre de Catalan C_p ([8]). L'énumération de ces objets selon l'aire était connue sous forme d'équation fonctionnelle ([13]) ou de fraction continue ([18], [10]), jusqu'aux récents résultats obtenus par J.M.Fédou et M.P.Delest ([7], [11]) dans lesquels apparaissent des q-analogues des fonctions de Bessel J_0 et J_1 .

Le but du présent article est de prolonger les résultats de ces deux derniers auteurs en montrant comment l'introduction d'une nouvelle classe de polyominos, à savoir les *polyominos parallélogrammes à franges*, conduit naturellement à l'étude de q-analogues de la fonction de Bessel.

Soient ν, λ deux entiers naturels, on dira qu'un polyomino parallélogramme est à *franges de largeurs* (ν, λ) (ou (ν, λ) -bordé) s'il est obtenu par "adjonction" à un polyomino parallélogramme de ν cellules à l'Est de chaque ligne, puis de λ cellules au Nord de chaque colonne du polyomino obtenu. On appellera *frange* l'ensemble des cellules ajoutées, et *base* l'ensemble des autres cellules.

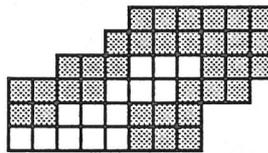


Figure 2. Un polyomino parallélogramme (3,2)-bordé.

Exemple. Le polyomino parallélogramme (3,2)-bordé de la figure 2 a 11 colonnes, 6 lignes et pour aire 48. Sa base a 8 colonnes, 4 lignes et pour aire 14. Sa frange est constituée de 34 cellules.

Ces polyominos sont définis en toute rigueur dans la section 3, où nous donnons également quelques propriétés de ce nouvel objet combinatoire. Nous montrons en particulier que l'énumération des polyominos parallélogrammes à franges selon le périmètre, l'aire et le nombre de colonnes revient à l'énumération des chemins de Dyck selon la longueur, le nombre de pics et un nouveau paramètre lié à la somme des hauteurs des pics.

Pour ν entier naturel, on pose $\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\nu+n}}{n! (\nu+n)!}$. Cette fonction \mathcal{J}_ν est liée à la fonction

de Bessel classique J_ν de l'Analyse par la relation $x^\nu J_\nu(x) = 2^\nu \mathcal{J}_\nu\left(\frac{x^2}{4}\right)$.

Pour k entier naturel, on note $[k] = 1+q+q^2+\dots+q^{k-1}$ et $[k!] = [1].[2] \dots [k]$ et on définit les fonctions suivantes, où I_ν et i_ν désignent des q-analogues de la fonction \mathcal{J}_ν .

$$I_v(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{v+n}{2}} x^{v+n}}{[n!] [(v+n)!]}$$

$$i_v(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{v+n}}{[n!] [(v+n)!]}$$

$$\Phi_v(x,q) = \frac{I_{v+1}(x,q)}{I_v(x,q)}$$

$$\varphi_v(x,q) = \frac{i_{v+1}(x,q)}{i_v(x,q)}$$

Dans la section 4, nous montrons plusieurs propriétés vérifiées par ces fonctions (q-équation différentielle, relations de récurrence des coefficients).

Utilisant la méthode des q-analogues de grammaire algébrique décrite dans [6], on montre dans la section 5 que la fonction génératrice selon le nombre de colonnes et l'aire des polyominos parallélogrammes à franges s'exprime à l'aide de Φ_v . Le résultat principal obtenu étant le suivant:

Théorème. La fonction génératrice des polyominos parallélogrammes (v,λ) -bordés selon le nombre de colonnes et l'aire est $F_{v,\lambda}(t,q) = q^{v(\lambda+1)} t^v (1-q) \Phi_v\left(\frac{q^{\lambda+1}t}{q^v(1-q)^2}, q\right)$.

Ce résultat et ses conséquences généralisent ceux obtenus dans [7], pour le cas particulier des polyominos parallélogrammes (sans franges).

2. POLYOMINOS PARALLELOGRAMMES ET CHEMINS DE DYCK.

Notation. Soit A un *alphabet*, on note A^* le *monoïde libre engendré* par A . Si a est une *lettre* de A et u un *mot* de A^* , on note $|u|_a$ le nombre d'occurrences de a dans u .

Définition 2.1. Un *mot de Dyck* est un mot $w \in \{x, \bar{x}\}^*$ vérifiant les deux conditions:

- (i) $|w|_x = |w|_{\bar{x}}$
- (ii) pour toute factorisation $w = uv$, alors $|u|_x \geq |u|_{\bar{x}}$.

Définition 2.2. Un *chemin de Dyck* est un chemin $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2p})$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $s_0 = (0,0)$, $s_{2p} = (2p,0)$ et pour tout i , $0 \leq i \leq 2p-1$, le pas (s_i, s_{i+1}) est un pas élémentaire Nord-Est ($s_i = (x,y), s_{i+1} = (x+1, y+1)$) ou Sud-Est ($s_i = (x,y), s_{i+1} = (x+1, y-1)$).

Un *pic* (resp. *creux*) est un point s_i tel que le pas (s_{i-1}, s_i) est un pas Nord-Est (resp. Sud-Est) et le pas (s_i, s_{i+1}) un pas Sud-Est (resp. Nord-Est).

Une *montée* (resp. *descente*) du chemin est une suite maximale $((s_i, s_{i+1}), \dots, (s_{i+k-1}, s_{i+k}))$ de pas Nord-Est (resp. Sud-Est).

La *hauteur* $h(s_i)$ d'un sommet s_i est son ordonnée.

On identifiera les chemins de Dyck de longueur $2p$ avec les mots de Dyck $w = x_1 \dots x_{2p}$ de longueur $2p$ en associant à tout pas (s_{i-1}, s_i) Nord-Est (resp. Sud-Est) la lettre $x_i = x$ (resp. $x_i = \bar{x}$). Les *pics* (resp. *creux*) d'un chemin de Dyck correspondent alors aux facteurs $x \bar{x}$ (resp. $\bar{x} x$) du mot de Dyck correspondant. Les *double montées* (resp. *double descentes*) correspondent aux facteurs xx (resp. $\bar{x} \bar{x}$).

Notation. On note \mathcal{D} l'ensemble des chemins (ou mots) de Dyck et \mathcal{D}_p l'ensemble des éléments de \mathcal{D} de longueur $2p$. On note DL (resp. DM, DD, NP, HP) les fonctions demi-longueur (resp.

nombre de double montées, nombre de double descentes, nombre de pics, somme des hauteurs des pics) définies sur \mathcal{D} .

Exemple. Le chemin de Dyck w de la figure 3 est tel que $DL(w)=11$, $DM(w)=3$, $DD(w)=3$, $NP(w)=8$, $HP(w)=14$ et est codé par le mot $x \bar{x} x \bar{x} xx \bar{x} x \bar{x} xx \bar{x} \bar{x} \bar{x} xx \bar{x} x \bar{x} \bar{x} x \bar{x}$.



Figure 3. La bijection μ entre polyomino parallélogramme et chemin de Dyck.

Nous rappelons la bijection μ entre les polyominos parallélogrammes de périmètre $2p+2$ et les chemins de Dyck de longueur $2p$ décrite dans [8]. Un polyomino parallélogramme P à n colonnes peut être défini à l'aide de deux suites d'entiers (p_1, \dots, p_n) et (c_1, \dots, c_{n-1}) , où p_i est le nombre de cellules de la $i^{\text{ème}}$ colonne et (c_i+1) le nombre de cellules contiguës aux colonnes i et $i+1$. Le chemin de Dyck $\mu(P)$ est alors le chemin de Dyck ayant n pics, dont les hauteurs des pics sont p_1, \dots, p_n et les hauteurs des creux sont c_1, \dots, c_{n-1} . D'où la proposition ([8]):

Proposition 2.3. *L'application μ transforme un polyomino parallélogramme de périmètre $2p+2$, ayant n colonnes, m lignes et d'aire k en un chemin de Dyck de longueur $2p$, ayant n pics, $m-1$ double montées et de somme des hauteurs des pics k .*

3. POLYOMINOS PARALLELOGRAMMES A FRANGES.

Définition 3.1. Un polyomino parallélogramme $P_{v,\lambda}$ à N colonnes est (v,λ) -bordé si et seulement si les suites $B(P_{v,\lambda})=(b_1, \dots, b_N)$ et $H(P_{v,\lambda})=(h_1, \dots, h_N)$ des ordonnées des bords inférieurs et supérieurs de ses colonnes satisfont aux conditions:

- (C₁(v, λ)) $b_i \leq b_{i+1}$ pour $i=1, \dots, N-1$
- (C₂(v, λ)) $h_i \leq h_{i+1}$ pour $i=1, \dots, N-1$
- (C₃(v, λ)) $b_{i+v+1} < h_i - \lambda$ pour $i=1, \dots, N-v-1$
- (C₄(v, λ)) $b_1 = \dots = b_{v+1} = 0$
- (C₅(v, λ)) $h_{N-v} = \dots = h_N$

La base P du polyomino parallélogramme $P_{v,\lambda}$ est alors déterminée par les suites $B(P)=(b_{v+1}, \dots, b_N)$ et $H(P)=(h_1 - \lambda, \dots, h_{N-v} - \lambda)$.

Notation. On notera $\mathcal{P} \mathcal{P}_{v,\lambda}$ l'ensemble des *polyominos parallélogrammes (v,λ) -bordés* et $\mathcal{P} \mathcal{P}_v$ l'ensemble des *polyominos parallélogrammes (v,v) -bordés* (on dira également *v -bordés*). Ainsi l'ensemble $\mathcal{P} \mathcal{P}_0$ des polyominos parallélogrammes $(0,0)$ -bordés est l'ensemble $\mathcal{P} \mathcal{P}$ des polyominos parallélogrammes.

Remarque. On identifiera, dans ce qui suit, un polyomino parallélogramme à franges $P_{v,\lambda}$ avec le triplet (v,λ,P) où v,λ désignent les largeurs de franges et P la base de $P_{v,\lambda}$.

Notation. Soient v, λ fixés, on note $\beta_{v,\lambda}$ (resp. β_v) la bijection de $\mathcal{P}\mathcal{P}_{v,\lambda}$ (resp. $\mathcal{P}\mathcal{P}_v$) dans $\mathcal{P}\mathcal{P}$ qui au polyomino parallélogramme à franges $P_{v,\lambda}=(v,\lambda,P)$ associe sa base P . On pose $\mu_{v,\lambda}=\mu \circ \beta_{v,\lambda}$ (resp. $\mu_v=\mu \circ \beta_v$), où μ est la bijection entre $\mathcal{P}\mathcal{P}$ et \mathcal{D} décrite précédemment dans la section 2.

Exemple. Si $P_{3,2}$ désigne le polyomino parallélogramme (3,2)-bordé de base P de la figure 2, il lui correspond par la bijection $\mu_{3,2}$ le mot de Dyck w de la figure 3. On a donc:

$$w = \mu_{3,2}(P_{3,2}) = \mu(P) = x \bar{x} x \bar{x} x x \bar{x} x \bar{x} x x \bar{x} \bar{x} \bar{x} x x \bar{x} x \bar{x} \bar{x} x \bar{x}$$

$$\mu(P_{3,2}) = x x x \bar{x} x \bar{x} x x \bar{x} x \bar{x} x x \bar{x} x \bar{x} x \bar{x} \bar{x} \bar{x} x \bar{x} x \bar{x} \bar{x} x \bar{x} \bar{x} \bar{x} \bar{x}$$

Proposition 3.2. Soit $P_{v,\lambda}$ un élément de $\mathcal{P}\mathcal{P}_{v,\lambda}$ de base P . On a alors les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{CO}(P_{v,\lambda}) &= \text{CO}(P) + v \\ \text{LI}(P_{v,\lambda}) &= \text{LI}(P) + \lambda \\ \text{AR}(P_{v,\lambda}) &= \text{AR}(P) + \lambda \text{CO}(P) + v \text{LI}(P) + \lambda v \end{aligned}$$

Proposition 3.3. La bijection $\mu_{v,\lambda}$ transforme un polyomino parallélogramme (v,λ) -bordé $P_{v,\lambda}$ en un chemin de Dyck w tel que:

$$\begin{aligned} \text{CO}(P_{v,\lambda}) &= \text{NP}(w) + v \\ \text{LI}(P_{v,\lambda}) &= \text{DM}(w) + \lambda + 1 \\ \text{AR}(P_{v,\lambda}) &= \text{HP}(w) + \lambda \text{NP}(w) + v \text{DM}(w) + v(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Notation. Soit w un chemin de Dyck, on note: $\text{HP}_{v,\lambda}(w) = \text{HP}(w) + \lambda \text{NP}(w) + v \text{DM}(w)$

On déduit alors de ce qui précède le résultat suivant:

Proposition 3.4. Le nombre de polyominos parallélogramme (v,λ) -bordé $P_{v,\lambda}$ de demi-périmètre $p+v+\lambda+1$ ayant $n+v$ colonnes, $m+\lambda+1$ lignes et d'aire $k+v(\lambda+1)$ est égal au nombre de chemins de Dyck w de demi-longueur p , ayant n pics, m double-montées et tels que $\text{HP}_{v,\lambda}(w)=k$.

Notation. Soit w un chemin de Dyck ayant N pics, on note p'_i+1 (resp. c_i) la hauteur du i ème pic (resp. creux). Le chemin w est entièrement déterminé par la suite $S(w)=(p'_1, c_1, p'_2, \dots, c_{N-1}, p'_N)$. Les suites (p'_i) et (c_i) satisfont à la propriété: $0 \leq c_i \leq \min(p'_i, p'_{i+1})$ pour $i=1, \dots, N-1$.

On note $\mathcal{D}_{v,\lambda}$ l'ensemble des mots de Dyck w satisfaisant aux propriétés suivantes:

- (i) $\text{NP}(w) = N > v$
- (ii) $w = x^\lambda w' \bar{x}^\lambda$ où w' est un élément de \mathcal{D}
- (iii) $w' = x^{i_1} \bar{x}^{j_1} x^{i_2} \bar{x}^{j_2} \dots x^{i_N} \bar{x}^{j_N}$ avec $j_1 = \dots = j_v = 1$ et $i_{N-v+1} = \dots = i_N = 1$

Proposition 3.5. Soit w un chemin de Dyck à N pics tel que $S(w) = (p'_1, c_1, p'_2, \dots, c_{N-1}, p'_N)$. Alors w appartient à $\mathcal{D}_{v,\lambda}$ si et seulement si on a les relations suivantes:

- (D₁(v,λ)) $N > v$
- (D₂(v,λ)) $\lambda \leq c_i \leq \min(p'_i, p'_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, N-1$.
- (D₃(v,λ)) $c_i = p'_i$ pour $i = 1, \dots, v$.
- (D₄(v,λ)) $c_i = p'_{i+1}$ pour $i = N-v, \dots, N-1$.

Proposition 3.6. La bijection μ transforme un polyomino parallélogramme (v,λ) -bordé en chemin de Dyck w de $\mathcal{D}_{v,\lambda}$.

Preuve. Soit $P_{v,\lambda}$ un élément de $\mathcal{P} \mathcal{P}_{v,\lambda}$ et $w = \mu(P_{v,\lambda})$. On note $N = CO(P_{v,\lambda})$, $B(P_{v,\lambda}) = (b_1, \dots, b_N)$ et $H(P_{v,\lambda}) = (h_1, \dots, h_N)$. La taille de la colonne i est $h_i - b_i$ et le nombre de cellules contiguës aux colonnes i et $i+1$ est $h_i - b_{i+1}$. Le mot w a N pics ($N > v$), la hauteur du i ème pic (resp. creux) est $p'_{i+1} = h_i - b_i$ (resp. $c_i = h_i - b_{i+1} - 1$). On a donc $\lambda \leq c_i$ pour $i=1, \dots, N-1$. De plus $p'_i = c_i = h_i - 1$ pour $i=1, \dots, v$ et $p'_{i+1} = c_i = h_N - b_{i+1} - 1$ pour $i=N-v, \dots, N-1$. Les conditions de la proposition 3.5 sont alors vérifiées par la suite $S(w) = (p'_1, c_1, p'_2, \dots, c_{N-1}, p'_N)$, d'où $w \in \mathcal{D}_{v,\lambda}$.

4. q-ANALOGUES DES FONCTIONS DE BESSEL.

Définition 4.1. Le q -analogue d'un entier naturel n est le polynôme $[n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ et le q -analogue de $n!$ le polynôme $[n!] = [1].[2] \dots [n]$.

Définition 4.2. La q -dérivée $D_q(f)$ d'une fonction $f(x)$ est définie par $D_q(f(x)) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$.

Les formules de q -dérivation suivantes sont immédiates à vérifier:

$$D_q(x^n) = [n] x^{n-1}$$

$$D_q(u + v) = D_q(u) + D_q(v)$$

$$D_q(uv)(x) = D_q(u)(x) v(x) + u(qx) D_q(v)(x)$$

$$D_q\left(\frac{1}{u}\right)(x) = -\frac{D_q(u)(x)}{u(x) u(qx)}$$

On trouvera dans G.Andrews[2], R.Askey, J.Wilson[3], H.Exton [9] quelques éléments de q -calcul et des q -analogues des fonctions classiques ainsi que leurs propriétés.

Définition 4.3. On note $\sigma_{2n}(v)$ la fonction symétrique $\sigma_{2n}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} (j_{v,k})^{-2n}$, où $j_{v,k}$ est le k ème zéro positif de la fonction de Bessel J_v .

Les fonctions σ_{2n} sont coefficients des fonctions $\frac{J_{v+1}}{2J_v}$ et $\frac{J_v}{2J_{v+1}}$ et on a ([1], [17], [4]):

$$\frac{J_{v+1}(x)}{2J_v(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n}(v) x^{2n-1} \quad \text{et} \quad \frac{J_v(x)}{2J_{v+1}(x)} = \frac{v+1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2n}(v+1) x^{2n-1}$$

A l'aide de la relation $x^v J_v(x) = 2^v \mathcal{J}_v\left(\frac{x^2}{4}\right)$ on en déduit alors:

$$\frac{\mathcal{J}_{v+1}(x)}{\mathcal{J}_v(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \sigma_{2n}(v) x^n.$$

Le résultat suivant dû à L.Carlitz [4], montre que $\sigma_{2n}(v)$ est une fraction rationnelle en v .

Proposition 4.4.

$$\frac{\mathcal{J}_{v+1}(x)}{\mathcal{J}_v(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(v)}{B_n(v)} x^n$$

où $A_n(v)$ est un polynôme en v , de degré $d = \sum_{k=2}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - n + 1$

et $B_n(v) = \prod_{k=1}^n (k+v) \binom{n}{k}$ si l'on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Les premiers polynômes $A_n(v)$ sont les suivants:

$$A_1(v)=1, A_2(v)=1, A_3(v)=2, A_4(v)=11 + 5v, A_5(v)=38 + 14v$$

Les coefficients des monomes dominants sont les nombres de Catalan 1, 2, 5, 14, ... (voir [11]).

L'un des principaux résultats obtenus dans ce papier est une interprétation combinatoire d'un q-analogue du résultat de Carlitz.

Notation. On pose $K_v(x,q) = \frac{1}{x^v} I_v(x,q)$ et $k_v(x,q) = \frac{1}{x^v} i_v(x,q)$.

On obtient aisément les propriétés suivantes à l'aide des formules de q-dérivations.

Proposition 4.5.

$$D_q(K_v(x,q)) = -K_{v+1}(x,q)$$

$$D_q(I_v(x,q)) = \frac{[v] I_v(x,q) - q^v I_{v+1}(x,q)}{x}$$

$$D_q(I_{v+1}(x,q)) = I_v(qx,q) = I_v(x,q) + (q-1)x D_q(I_v(x,q)) = q^v I_v(x,q) + (1-q)q^v I_{v+1}(x,q)$$

$$D_q(k_v(x,q)) = -k_{v+1}(x,q)$$

$$D_q(i_v(x,q)) = \frac{[v] i_v(x,q) - q^v i_{v+1}(x,q)}{x}$$

$$D_q(i_{v+1}(x,q)) = i_v(x,q)$$

Proposition 4.6. Les fonctions $L_v(x,q) = x^v \Phi_v(x,q)$ et $l_v(x,q) = x^v \phi_v(x,q)$ sont solutions respectives des q-équations différentielles (E_v) et (e_v) suivantes:

$$D_q(L_v(x,q)) = q^v x^v + q^v(1-q) L_v(x,q) + \frac{1}{x^{v+1}} L_v(x,q) L_v(qx,q) \quad (E_v)$$

$$D_q(l_v(x,q)) = x^v + \frac{1}{x^{v+1}} l_v(x,q) l_v(qx,q) \quad (e_v)$$

Preuve. Elle se déduit des formules de q-dérivation et des relations ci-dessus. En effet on a :

$$D_q(L_v(x,q)) = \frac{D_q(I_{v+1}(x,q))}{K_v(x,q)} - \frac{I_{v+1}(qx,q) D_q(K_v(x,q))}{K_v(x,q) K_v(qx,q)}$$

$$D_q(L_v(x,q)) = q^v \frac{I_v(x,q) + (1-q)I_{v+1}(x,q)}{K_v(x,q)} + \frac{K_{v+1}(x,q) I_{v+1}(qx,q)}{K_v(x,q) K_v(qx,q)}$$

Le théorème suivant donne la réponse, dans le cas général, à une question posée par M.P.Delest et J.M.Fédou [7], qui en donnent une solution dans le cas particulier $v = 0$.

Théorème 4.7. Les fonctions $\Phi_v(x,q)$ et $\phi_v(x,q)$ s'écrivent sous la forme

$$\Phi_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_n(v)]}{[B_n(v)]} x^n \quad \phi_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a_n(v)]}{[b_n(v)]} x^n$$

où $[B_n(v)] = [b_n(v)] = \prod_{k=1}^n [v+k] \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le q-analogue de $B_n(v)$

$[A_n(v)]$ est un polynôme en q à coefficients positifs et de terme de plus bas degré q^{nv}

$[a_n(v)]$ est un polynôme en q à coefficients positifs et de terme de plus bas degré $q^{(n-1)(v+1)}$.

Notation. On notera $\beta_n = \prod_{k=1}^n [v+k] \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ le q -analogue de $B_n(v)$. La suite β_n satisfait la relation de récurrence $\beta_n = \beta_{n-1} \prod_{k \text{ divise } n} [v+k]$ et les premières valeurs de la suite β_n sont:

$$\beta_0=1, \beta_1=[v+1], \beta_2=[v+1]^2[v+2], \beta_3=[v+1]^3[v+2][v+3], \beta_4=[v+1]^4[v+2]^2[v+3][v+4], \dots$$

Définition 4.8. Pour n et i entiers, $0 \leq i \leq n$, on définit le q -binôme de forme β par

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_\beta = \frac{\beta_n}{\beta_i \beta_{n-i}}$$

De manière analogue à [7], on obtient le lemme suivant:

Lemme 4.9. Pour $n \geq 2$ et pour i tel que $1 \leq i \leq n-1$, l'expression $\frac{1}{[v+n]} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_\beta$ est un polynôme en q à coefficients entiers de terme de plus bas degré égal à 1.

Preuve du théorème 4.7. On pose $L_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{v+n}$. L'équation (E_v) s'écrit alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v+n] \gamma_n x^{v+n-1} = q^v x^v + q^v \sum_{i=1}^{\infty} \left((1-q) \gamma_n + \sum_{i=1}^n \gamma_i \gamma_{n-i+1} q^i \right) x^{v+n}$$

D'où $[v+1] \gamma_1 = q^v$ et $[v+n+1] \gamma_{n+1} = q^v(1-q) \gamma_n + \sum_{i=1}^n \gamma_i \gamma_{n-i+1} q^{v+i}$ pour $n \geq 1$.

On a donc $[v+1]^2 [v+2] \gamma_2 = q^{2v}$, $[v+1]^3 [v+2] [v+3] \gamma_3 = q^{3v} (1 + q^{v+2})$

et $\gamma_{n+1} = \frac{q^v (1+q^{v+n})}{[v+1][v+n+1]} \gamma_n + \frac{q^v}{[v+n+1]} \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i \gamma_{n-i+1} q^i$ pour $n \geq 3$

En posant $\gamma_n = \frac{q^{nv} \alpha_n}{\beta_n}$ on obtient: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1 + q^{v+2}$ et

$$\alpha_{n+1} = \frac{1+q^{v+n}}{[v+1][v+n+1]} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \alpha_n + q^v \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{[v+n+1]} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix}_\beta \alpha_i \alpha_{n-i+1} q^i \quad \text{pour } n \geq 3$$

Le résultat se démontre alors par une récurrence immédiate, à l'aide du lemme précédent.

De manière analogue, posons $l_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x^{v+n}$. L'équation (e_v) s'écrit alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v+n] \xi_n x^{v+n-1} = x^v + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{n-i+1} q^{v+i} \right) x^{v+n}$$

D'où $[v+1] \xi_1 = 1$ et $[v+n+1] \xi_{n+1} = \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_{n-i+1} q^{v+i}$ pour $n \geq 1$.

En posant $\xi_n = \frac{q^{(n-1)(v+1)} \delta_n}{\beta_n}$ on obtient: $\delta_1 = 1$ et

$$\delta_{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{[v+n+1]} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix}_\beta \delta_i \delta_{n-i+1} q^{i-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Le résultat se démontre également par récurrence, à l'aide du lemme.

Notation. On pose $\zeta_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ et $\eta_n = \frac{\delta_n}{\beta_n}$. On note $\Psi_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x^n$ et $\psi_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n x^n$.

On a donc $\Phi_v(x,q) = \Psi_v(q^v x, q)$ et $\phi_v(x,q) = \frac{1}{q^{v+1}} \psi_v(q^{v+1} x, q)$. On en déduit alors:

Proposition 4.10. Les suites (ζ_n) et (η_n) satisfont aux relations de récurrence suivantes:

$$\zeta_1 = \frac{1}{[v+1]} \quad \text{et} \quad [v+n+1] \zeta_{n+1} = (1-q) \zeta_n + q^v \sum_{i=1}^n \zeta_i \zeta_{n-i+1} q^i \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (R_v)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{[v+1]} \quad \text{et} \quad [v+n+1] \eta_{n+1} = \sum_{i=1}^n \eta_i \eta_{n-i+1} q^{i-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (r_v)$$

5. ENUMERATIONS DES POLYOMINOS PARALLELOGRAMMES A FRANGES.

Notation. On note $d_{n,m,k}$ le nombre de polyominos parallélogrammes (v,λ) -bordés ayant $n+v$ colonnes, $m+\lambda+1$ lignes et d'aire $k+v(\lambda+1)$. On pose $D_{v,\lambda}(t,s,q) = \sum_{n,m,k} d_{n,m,k} t^n s^m q^k$.

La fonction génératrice selon le nombre de colonnes, le nombre de lignes et l'aire de ces polyominos est alors $f_{v,\lambda}(t,s,q) = q^{v(\lambda+1)} t^v s^{\lambda+1} D_{v,\lambda}(t,s,q)$.

Nous avons démontré (proposition 3.4) que la fonction $D_{v,\lambda}$ énumère également les chemins de Dyck selon le nombre de pics, le nombre de double-montées et le paramètre $HP_{v,\lambda}$. L'un des principaux résultats de cette partie est d'établir que $D_{v,\lambda}$ est reliée aux q -analogues des fonctions de Bessel définies précédemment par la relation $D_{v,\lambda}(t,1,q) = (1-q) \Phi_v\left(\frac{q^{\lambda+1} t}{q^v(1-q)^2}, q\right)$.

Proposition 5.1. La fonction $D_{v,\lambda}(t,s,q)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante:

$$D_{v,\lambda}(t,s,q) = q^{\lambda+1} t + q^{\lambda+1} t D_{v,\lambda}(t,s,q) + q^v s D_{v,\lambda}(qt,s,q) + q^v s D_{v,\lambda}(qt,s,q) D_{v,\lambda}(t,s,q)$$

Preuve. Soit \mathcal{D}' l'ensemble des mots écrits sur $\{x, \bar{x}, t, s\}$ obtenu en remplaçant dans les mots de Dyck non vides chaque facteur $x\bar{x}$ par le facteur $xt\bar{x}$ et chaque facteur xx par xsx (on "marque" chaque pic et chaque double montée). Une grammaire engendrant ce langage est déterminée par

$$\mathcal{D}' = xt\bar{x} + xt\bar{x} \mathcal{D}' + xs\mathcal{D}'\bar{x} + xs\mathcal{D}'\bar{x} \mathcal{D}'.$$

Notons $g_{v,\lambda}$ l'application qui à tout mot w de \mathcal{D}' associe q^k avec $k=HP_{v,\lambda}(w)$. Utilisant la méthode des q -analogues de grammaire algébrique décrite par M.P.Delest et J.M.Fédou dans [6] on définit le q -analogue $(\mathcal{D}':q)$ du langage \mathcal{D}' en "pondérant" chaque mot w de \mathcal{D}' par $g_{v,\lambda}(w)$.

On note $(w;q) = g_{v,\lambda}(w) w$ et $(\mathcal{D}':q) = \sum_{w \in \mathcal{D}'} (w;q)$ la série formelle q -analogue du langage \mathcal{D}' . Les

relations suivantes, permettant le calcul récursif de $g_{v,\lambda}$ se déduisent facilement des règles de la grammaire engendrant \mathcal{D}' et de la définition du paramètre $HP_{v,\lambda}$:

$$(xt\bar{x};q) = q^{\lambda+1} xt\bar{x}$$

$$(xt\bar{x} u;q) = q^{\lambda+1} xt\bar{x} (u;q) \quad \text{pour tout mot } u \text{ de } \mathcal{D}',$$

$$(xu\bar{x};q) = x sq^v q^{|u|t} (u;q) \bar{x}, \quad \text{pour tout mot } u \text{ de } \mathcal{D}',$$

$$(xu\bar{x} v;q) = x sq^v q^{|u|t} (u;q) \bar{x} (v;q), \quad \text{pour } u \text{ et } v \text{ mots de } \mathcal{D}' \quad (\text{voir figure 4})$$

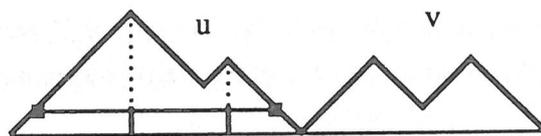


Figure 4. La relation $(xu\bar{x} v;q) = x sq^v q^{|u|t} (u;q) \bar{x} (v;q)$.

Considérons le morphisme χ défini par $\chi(t) = t$, $\chi(s) = s$ et $\chi(x) = \chi(\bar{x}) = 1$ et l'image commutative de $(\mathcal{D}'; q)$ par χ . La série formelle obtenue est $D_{v,\lambda}(t,s,q) = \sum_{u \in \mathcal{D}' } g_{v,\lambda}(u) \chi(u)$.

En appliquant la définition récursive de la fonction $g_{v,\lambda}$, on a alors:

$$D_{v,\lambda}(t,s,q) = q^{\lambda+1}t + q^{\lambda+1}t \sum_{u \in \mathcal{D}' } g_{v,\lambda}(u)\chi(u) + q^v s \sum_{u \in \mathcal{D}' } q^{|u|} t g_{v,\lambda}(u)\chi(u) (1 + \sum_{v \in \mathcal{D}' } g_{v,\lambda}(v)\chi(v))$$

d'où l'équation fonctionnelle cherchée.

Théorème 5.2. *La fonction génératrice des polyominos parallélogrammes (v,λ) -bordés selon le nombre de colonnes et l'aire est $F_{v,\lambda}(t,q) = q^{v(\lambda+1)} t^v (1-q) \Phi_v(\frac{q^{\lambda+1}t}{q^v(1-q)^2}, q)$.*

Preuve. Posons $D_{v,\lambda}(t,1,q) = \sum_{n \geq 1} d_n t^n$ avec $d_n = \sum_{m,k} d_{n,m,k} q^k$.

L'équation fonctionnelle de la proposition 5.1 conduit aux relations de récurrence suivantes:

$$d_1 = q^{\lambda+1} + q^{v+1} d_1 \quad \text{et pour } n \geq 1 \quad d_{n+1} = q^{\lambda+1} d_n + q^{v+n+1} d_{n+1} + q^v \sum_{i=1}^n d_i d_{n+1-i} q^i$$

d'où, en posant $d_n = \frac{\zeta_n q^{n(\lambda+1)}}{(1-q)^{2n-1}}$ on obtient

$$\zeta_1 = \frac{1}{[v+1]} \quad \zeta_2 = \frac{1}{[v+1]^2 [v+2]}$$

$$\zeta_{n+1} = (1-q^2) \zeta_n + q^{v+n+1} \zeta_{n+1} + q^v (1-q) \sum_{i=1}^n \zeta_i \zeta_{n-i+1} q^i \quad \text{pour } n \geq 2$$

On retrouve les relations de récurrence (R_v) vérifiées par les coefficients ζ_n dans la proposition 4.10.

On en déduit donc que $D_{v,\lambda}(t,1,q) = (1-q) \Psi_v(\frac{q^{\lambda+1}t}{(1-q)^2}, q)$, d'où $D_{v,\lambda}(t,1,q) = (1-q) \Phi_v(\frac{q^{\lambda+1}t}{q^v(1-q)^2}, q)$.

De ce dernier résultat on déduit, en prenant $v = \lambda$, la proposition suivante qui généralise pour v quelconque les résultats obtenus par M.P.Delest et J.M.Fédou [7] dans le cas particulier $v=0$:

Proposition 5.3. *La fonction génératrice des polyominos parallélogrammes v -bordés selon le nombre de colonnes et l'aire est $F_v(t,q) = q^{v(v+1)} t^v (1-q) \Phi_v(\frac{qt}{(1-q)^2}, q)$.*

Remarques.

Nous avons montré ici que la fonction génératrice des polyominos parallélogrammes à franges selon le nombre de colonnes et l'aire était liée au quotient de deux q -analogues particuliers de fonctions de Bessel. Ces fonctions, ainsi que celles provenant du rapport des q -analogues usuels des fonctions de Bessel ont également d'autres interprétations combinatoires. Généralisant les résultats obtenus par J.M.Fédou [11] nous obtenons dans [15] une nouvelle interprétation de ces fonctions dans l'énumération de familles d'arbres valués et également dans l'énumération de certaines multichaînes d'un ensemble partiellement ordonné. Il serait d'autre part intéressant de trouver une interprétation combinatoire des polynômes α_n , et δ_n intervenant dans les numérateurs des fractions

$$\text{rationnelles } \gamma_n = \frac{q^{nv} \alpha_n}{\beta_n} \quad \text{et} \quad \xi_n = \frac{q^{(n-1)(v+1)} \delta_n}{\beta_n}.$$

Références.

- [1] J.R.AIREY, Bessel Functions of small Fractional Order and their application to the problems of Elastic Stability. *Phil. Mag.*, series.6 (1921) 200-205.
- [2] G.E. ANDREWS, *q-series: their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*, AMS (1986).
- [3] R. ASKEY, J. WILSON, Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs of Am. Math. Soc.* (1985), n°319.
- [4] L. CARLITZ, Zeroes of the Bessel Function $J_\nu(z)$, *Mathematical tables and others aids to computation* (1943-1945), 1-12 .
- [5] M.P. DELEST, S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, rapport n° 86-15, Université de Bordeaux I, (1986).
- [6] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Attribute Grammars are useful for Combinatorics. *Pub. LaBRI. Université de Bordeaux I*, n° 89.122 (1989).
- [7] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams. *Pub. LaBRI. Université de Bordeaux I*, n° 89.83 (1989).
- [8] M.P.DELEST, G.VIENNOT, Algebraic langages and polyominoes enumeration. *Theoret. Comput. Sci.* 34 (1984), no. 1-2, 169-206.
- [9] H.EXTON, *q-Hypergeometric Functions and Applications*, Ellis Horwood Series, Mathematics and its Applications, (1983).
- [10] J.M. FEDOU, Enumeration de polyominos selon le périmètre et l'aire, *Mémoire de D.E.A. Université de Bordeaux I*, (1987).
- [11] J.M.FEDOU, *Grammaires et q-énumérations de polyominos. Thèse, Université de Bordeaux I*, (1989).
- [12] M. GARDNER, *Math. Games*, *Scientific American*, (1958), 136-142, 182-192.
- [13] I. GESSEL, A noncommutative generalization and q -analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* 257 (1980), 455-482.
- [14] S.GOLOMB, *Polyominoes*, Scribner, New York, (1965).
- [15] J.C.LALANNE, q -Bessel, multiparcours d'arbres et multichaînes de chemins. *Pub. LaBRI. Université de Bordeaux I*, (1990).
- [16] K.Y. LIN, S.J. CHANG, Rigourous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *J. Phys. A: Math. Gen.* 21 (1988) 2635-2642.
- [17] RAYLEIGH, Note on the Numerical Calculation of the Roots of Fluctuating Function, *London Math.Soc. Proc.* 5, (1874), 119-224.
- [18] G.X. VIENNOT Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, *Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal*, (Sept.-Oct. 1983).
- [19] G.X. VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1983/84. Astérisque No. 121-122 (1985), 225-246.

