PUBL. I.R.M.A. STRASBOURG, 1991, 476/S-26
ACTES 26^{e} SÉMINAIRE LOTHARINGIEN, P. 93-113

Interpretation von Mustern in Kontexten und Begriffsverbänden

Norbert Spangenberg
Zentrum für psychosomatische Medizin der Justus-Liebig-Universität Gießen

Karl Erich Wolff
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften der Fachhochschule Darmstadt
und
Forschungsgruppe Begriffsanalyse der Technischen Hochschule Darmstadt

1. Einleitung

Zur Beschreibung der Struktur von Daten werden häufig zwei Denkschemata verwendet: *Klassifikation und Ordnung*. Während man unter *Klassifikation* die Zerlegung einer Menge von Objekten in die Klassen einer Klasseneinteilung (Partition) der Objektmenge versteht, denkt man bei *Ordnung* meist an hierarchische Strukturen, die sich formal durch Ordnungsrelationen darstellen lassen.

Diese Denkschemata gaben im Rahmen der von WILLE [Wi82] eingeführten Formalen Begriffsanalyse, genauer gesagt in der aus der klassischen Meßtheorie (vgl. [Ro79,St51, To58]) entwickelten *begriffsanalytischen Meßtheorie* [Wi82, GSW86, GW88], Anlaß zur Formalisierung entsprechender Datenmuster durch *Nominalskalen* und *eindimensionale Ordinalskalen*, darüber hinaus aber zur Einführung vieler anderer für die Interpretation von Daten nützlicher Grundmuster, wie z.B. verschiedener Skalen zur formalen Beschreibung von Zwischenbeziehungen. Die Nützlichkeit dieser feineren Formen von Datenmustern resultiert ganz wesentlich aus der begriffsanalytischen Verwendung *informationserhaltender graphischer* Repräsentationen von Daten in Form von *Liniendiagrammen* (vgl. [W84]), deren Gebrauch wir kurz skizzieren: Zunächst wird der zu untersuchende Datensatz in Gestalt einer Tabelle, d.h. formal eines *mehrwertigen Kontextes* dargestellt, aus dem dann durch *Skalierung* auf geeignete Weise (nach Wahl mit oder ohne Informationsverlust) eine *Kreuztabelle* hergestellt wird, die formal durch einen *Kontext* beschrieben wird. Die in Anlehnung an die klassische Begriffslehre eingeführten *formalen Begriffe* eines Kontextes bilden eine hierarchische Struktur, den *Begriffsverband* des Kontextes, der durch Liniendiagramme dargestellt werden kann, so daß die im Kontext gegebene Information ohne Informationsverlust im Liniendiagramm graphisch repräsentiert wird.

Während in der klassischen Meßtheorie (vgl. [Ro79,St51,To58]) den zu messenden Objekten eines empirischen Relativs strukturerhaltend *reelle* Zahlen eines numerischen Relativs zugeordnet werden, wird in der von GANTER und WILLE [GW88] entworfenen *begriffsanalytischen Meßtheorie* diese für viele Anwendungen zu enge Bindung an die reellen Zahlen aufgegeben und eine Messung, formal ein *Maß*, beschrieben durch eine

die begriffliche Struktur respektierende Abbildung von der Gegenstandsmenge eines empirisch gegebenen Kontextes in die Gegenstandsmenge eines geeigneten gut interpretierbaren Kontextes, den man dann als Skala bezeichnet. Empirisch gegebene Kontexte besitzen oft Maße in sehr unterschiedliche Skalen. GANTER und WILLE [GW88] haben eine Liste *standardisierter Skalen* angegeben und deren Hauptbedeutungen kurz skizziert. Im folgenden wird anhand von Beispielen aus unseren begriffsanalytischen Untersuchungen an Magersuchtkranken [SW87,SW88,SW89,Sp89] das Verständnis für die Bedeutung dieser Skalen aus konkreten Situationen entwickelt. Dabei beginnen wir mit den zu den Denkschemata *Klassifikation* und *Ordnung* gehörenden *Nominal-* bzw. *(eindimensionalen) Ordinalskalen*, kommen dann über *Wegskalen*, *Interordinalskalen* und *Biordinalskalen* zu *Gitterskalen*, *Booleschen Skalen*, *komplementären Nominalskalen*, *Kreisskalen*, *dichotomen Skalen*, *konvexen Ordinalskalen*, *konträren Ordinalskalen* und zu einer *direkten Summe* zweier Skalen.
Das Verständnis für die Bedeutung dieser Skalen ist eine wesentliche Hilfe bei der *strukturellen Interpretation* von Liniendiagrammen, womit wir die Erklärung der formalen Struktur der Liniendiagramme meinen, im Gegensatz zur *inhaltlichen Interpretation*, die aufbauend auf der strukturellen Interpretation unter Verwendung der Bedeutung der Gegenstands- und Merkmalsnamen die im Liniendiagramm sichtbar gemachte Information in den Gesamtrahmen der Untersuchung einbettet. In der vorliegenden Arbeit benutzen wir die Beispiele aus unseren Untersuchungen an Magersuchtkranken lediglich zur Einführung in die Bedeutung der Skalen und der Skalenmaße bei der *strukturellen Interpretation* von Liniendiagrammen. Zur inhaltlichen Interpretation solcher Liniendiagramme verweisen wir auf [SW88, Sp89]. Auch auf den großen Bereich der Verwendung von Skalen in der *Skalierung*, d.h. der Erzeugung von (1-wertigen) Kontexten aus mehrwertigen Kontexten können wir in dieser Arbeit nicht eingehen.

2. Bezeichnungen

Wir verwenden die von R. WILLE [Wi82] eingeführten Bezeichnungen der Formalen Begriffsanalyse, insbesondere die durch *Kreuztabellen* beschriebenen *Kontexte* und deren *Begriffe* sowie die im *Begriffsverband* repräsentierte und durch *Liniendiagramme* dargestellte Hierarchie der Begriffe eines Kontextes. Von diesen Liniendiagrammen braucht der Leser zunächst nur die *Leseregel*, mit der man im Liniendiagramm die Inzidenzen des gegebenen Kontextes ablesen kann:
Ein Gegenstand g hat das Merkmal m genau dann, wenn im Liniendiagramm ein aufsteigender Pfad vom Gegenstandsbegriff von g zum Merkmalsbegriff von m führt. Im folgenden Liniendiagramm (des Kontextes **383D2F**) liest man damit z.B. ab, daß der VATER genau die Merkmale "schweigsam" und "eifersüchtig" hat.
In den folgenden Kontexten aus unseren begriffsanalytischen Untersuchungen von Magersuchtkranken ([SW88,Sp89]) kommt neben den von der Patientin (= SELBST) genannten Personen auch ihr Idealselbst vor, das als IDEAL bezeichnet wird.

3. Grundmuster in Kontexten und Begriffsverbänden

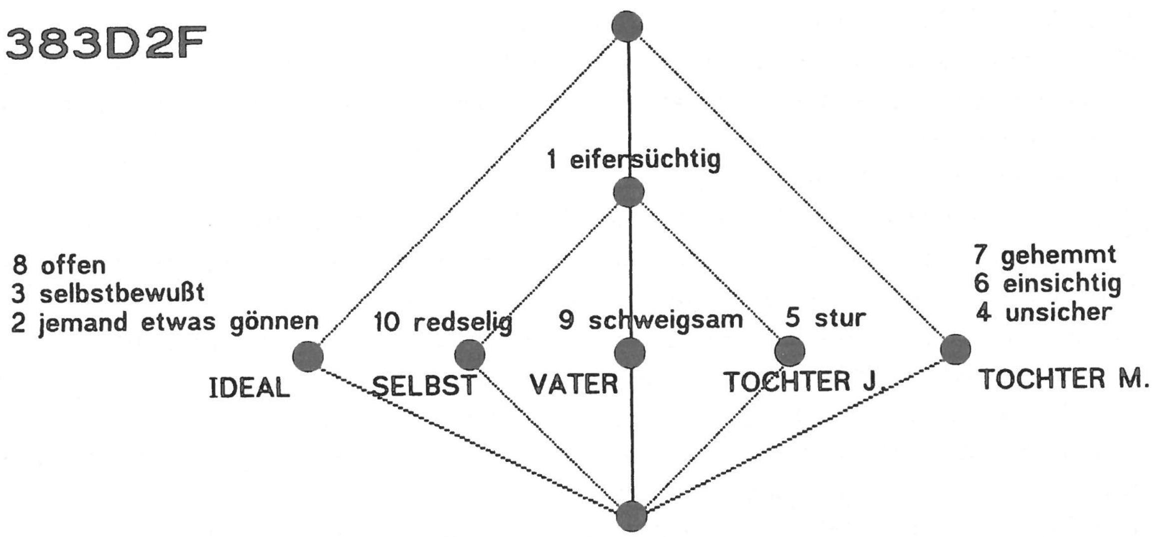
Die folgenden Beispiele führen ein in den Gebrauch und die Bedeutungen der von GANTER und WILLE [GW88] angegebenen standardisierten Skalen.

3.1. Nominalskalen und Umfangspartitionen

Wir beginnen mit folgendem Kontext:

383D2F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IDEAL		X	X					X		
SELBST	X									X
VATER	X								X	
TOCHTER J.	X				X					
TOCHTER M.				X		X	X			

Dieser Kontext läßt sich darstellen durch folgendes Liniendiagramm:



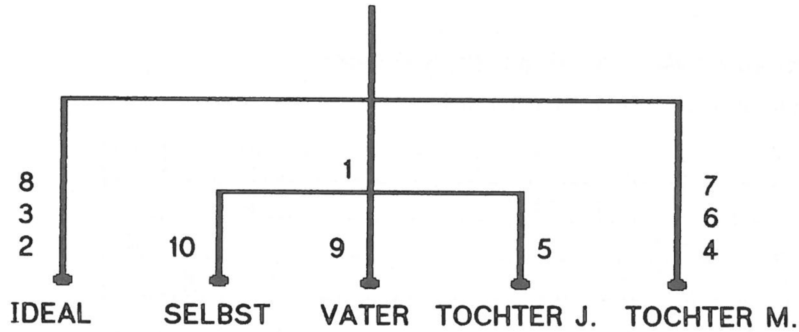
In diesem Liniendiagramm wird die Menge der Personen z.B. durch die Merkmale "offen", "eifersüchtig", "gehemmt" in drei disjunkte Mengen zerlegt, wobei die Menge der eifersüchtigen Personen nochmals feiner partitioniert wird in die redseligen, die schweigsamen und die sturen Personen.

Aus einem guten Liniendiagramm erhält man oft Hinweise auf geeignete Vertauschungen der Zeilen oder Spalten zur Erstellung einer übersichtlicheren Kreuztabelle.

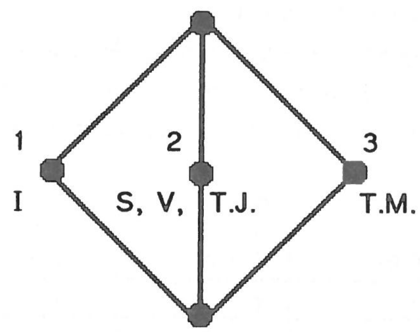
In unserem Beispiel haben wir außerdem äquivalente (d.h. umfangsgleiche) Merkmale zusammengefaßt:

383D2F	8 3 2	10	9	5	7 6 4	1
IDEAL	X					
SELBST		X				X
VATER			X			X
TOCHTER J.				X		X
TOCHTER M.					X	

Zum Vergleich mit dem Liniendiagramm zeigen wir ein *Dendrogramm* mit derselben Partition.



Beim "begriffsanalytischen Klassifizieren" sucht man nach solchen Partitionen der Gegenstandsmenge des gegebenen Kontextes, deren Klassen aus Begriffsumfängen bestehen, wie das im vorliegenden Beispiel nicht nur für die feinste und gröbste Partition der Fall ist, sondern auch für die Partition P := { {IDEAL}, {SELBST, VATER, TOCHTER J.}, {TOCHTER M.} }. Diese *Umfangspartitionen* liefern klare Interpretationen, da ihre Klassen als Begriffsumfänge durch Konjunktionen von Merkmalen beschrieben werden können, während diese Interpretationsfähigkeit bei den durch Ähnlichkeitsmaße beschriebenen (Hierarchien von) Partitionen eines Dendrogramms für Objekte eines (meist) metrischen Raumes oft fehlt.
Das Zusammenfassen der "offenen", "eifersüchtigen" und "gehemmten" Personen zur Umfangspartition P wird in der Sprache der begriffsanalytischen Meßtheorie als eine Messung interpretiert, die formal beschrieben wird durch ein *Maß*, d.h. eine Abbildung von der Gegenstandsmenge des gegebenen Kontextes $\mathbb{K}$ in die Gegenstandsmenge eines (meist einfacheren und gut interpretierbaren) Kontextes $\mathbb{S} = (G_{\mathbb{S}}, M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}})$, genannt eine *Skala*, so daß das Urbild jedes Umfangs von $\mathbb{S}$ ein Umfang von $\mathbb{K}$ ist.
In unserem Beispiel wird ein Maß σ des Kontextes $\mathbb{K}$ = **383D2F** in die Nominalskala $\mathbb{N}_3 = (\{1,2,3\}, \{1,2,3\}, =)$ gegeben durch
σ(IDEAL) = 1 , σ(SELBST) = σ(VATER)= σ(TOCHTER J.) = 2 , σ(TOCHTER M.) = 3
und dargestellt durch folgendes Liniendiagramm des Kontextes $\mathbb{K}_\sigma$ (vgl. [GW88]), das aus "dem" Liniendiagramm von $\mathbb{N}_3$ durch Ersetzung der Gegenstandsnamen 1,2,3 durch die Gegenstandsnamen der zugehörigen σ-Urbilder entsteht.



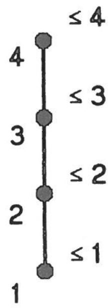
σ ist ein surjektives und (da nicht jeder Umfang von $\mathbb{K}$ ein σ-Urbild eines Umfangs von $\mathbb{N}_3$ ist) ein nicht volles Maß, das "den Kontext $\mathbb{K}$ mit der einfacheren Struktur der Skala $\mathbb{N}_3$ mißt".

Die in obigem Liniendiagramm des Kontextes **383D2F** gewählte "Links-Rechts-Reihenfolge" (IDEAL, SELBST, VATER, TOCHTER J., TOCHTER M.) ist offenbar begrifflich keineswegs ausgezeichnet. Wir werden im folgenden mit den Weg- und den Interordinalskalen begrifflich beschreibbare "Links-Rechts-Reihenfolgen" kennenlernen. Zum besseren Verständnis der Interordinalskalen behandeln wir zunächst kurz die eindimensionalen Ordinalskalen.

3.2. Eindimensionale Ordinalskalen

Im Gegensatz zu den bei der begriffsanalytischen Klassifikation auftretenden Umfangspartitionen bilden die Umfänge eindimensionaler Ordinalskalen $\mathbb{O}_n = (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$ eine Kette. Dabei bezeichnet $\mathbf{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen. Zum Beispiel wird $\mathbb{O}_4$ dargestellt durch folgende Kreuztabelle und das nebenstehende Liniendiagramm, wobei wir zum besseren Verständnis die Kontextmerkmale 1,2,3,4 der standardisierten eindimensionalen Ordinalskala $\mathbb{O}_4$ ersetzt haben durch ≤ 1, ≤ 2, ≤ 3, ≤ 4:

	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4
1	X	X	X	X
2		X	X	X
3			X	X
4				X



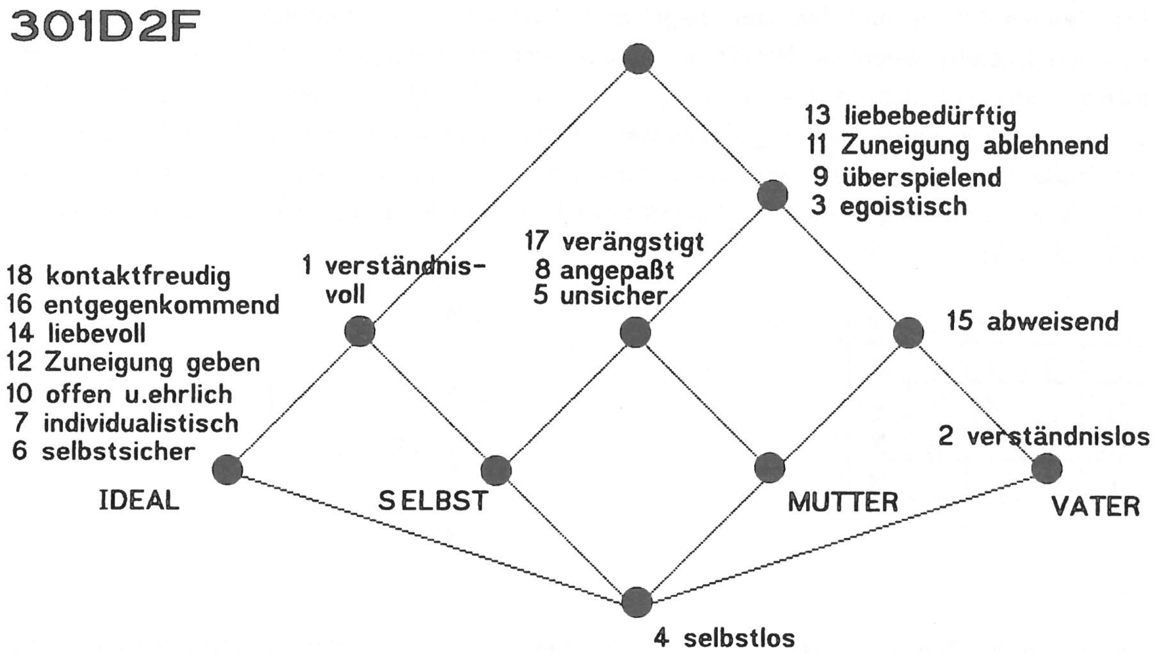
Im folgende Beispiel einer "harmonisierenden" Patientin (alle Familienmitglieder sind "liebevoll") ist der gesamte dargestellte Begriffsverband bereits eine solche Kette, während wir in späteren Beispielen verborgener liegende Ketten mittels geeigneter Maße auf eindimensionale Ordinalskalen sichtbar machen werden.

204D2F

Man beachte, daß zwar ein surjektives O_4-Maß des Kontextes **204D2F** existiert, aber kein surjektives O_5-Maß, was der Intention entspricht, daß Maße die *Gegenstände* messen.

3.3. Wegskalen

Der durch das folgende Liniendiagramm beschriebene Kontextes **301D2F** besitzt mehrere interessante Maße, die uns jeweils einen speziellen Einblick in die Struktur dieses Datensatzes gewähren.



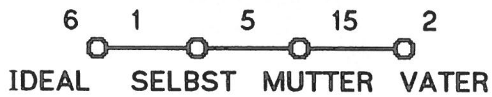
1. Die durch die gegensätzlichen Merkmale "12 Zuneigung geben" und "11 Zuneigung ablehnend" beschriebene Umfangspartition { {IDEAL}, {SELBST, MUTTER, VATER} } liefert ein Maß dieses Kontextes in die zur Nominalskala N_2 äquivalente (s.[GW88]) dichotome Skala $D := (\{0, 1\}, \{0, 1\}, =)$.

2. Durch die Merkmale "1 verständnisvoll" und "15 abweisend" wird die Umfangspartition { {IDEAL, SELBST}, {MUTTER, VATER} } beschrieben, also auch eine N_2-Maß von **301D2F**.

3. Die folgende Beschreibung eines wesentlichen Teils des Kontextes **301D2F** folgt einer **Zickzacklinie** im Liniendiagramm:

Das allein selbstsichere IDEAL ist verständnisvoll wie (nur noch) das SELBST, dieses ist unsicher wie (nur noch) die MUTTER, diese ist abweisend wie (nur noch) der VATER, der als einziger verständnislos ist.

Diese Zickzacklinie läßt sich auch geeignet durch folgenden Graphen darstellen:



Interpretiert man diesen Graphen als einen Graphen mit den Schlingen (= einelementige Kanten) 6 und 2, so erhält man daraus als Inzidenzmatrix den folgenden Kontext, den wir standardisieren zur Skala W_4 (Weg mit 4 Punkten):

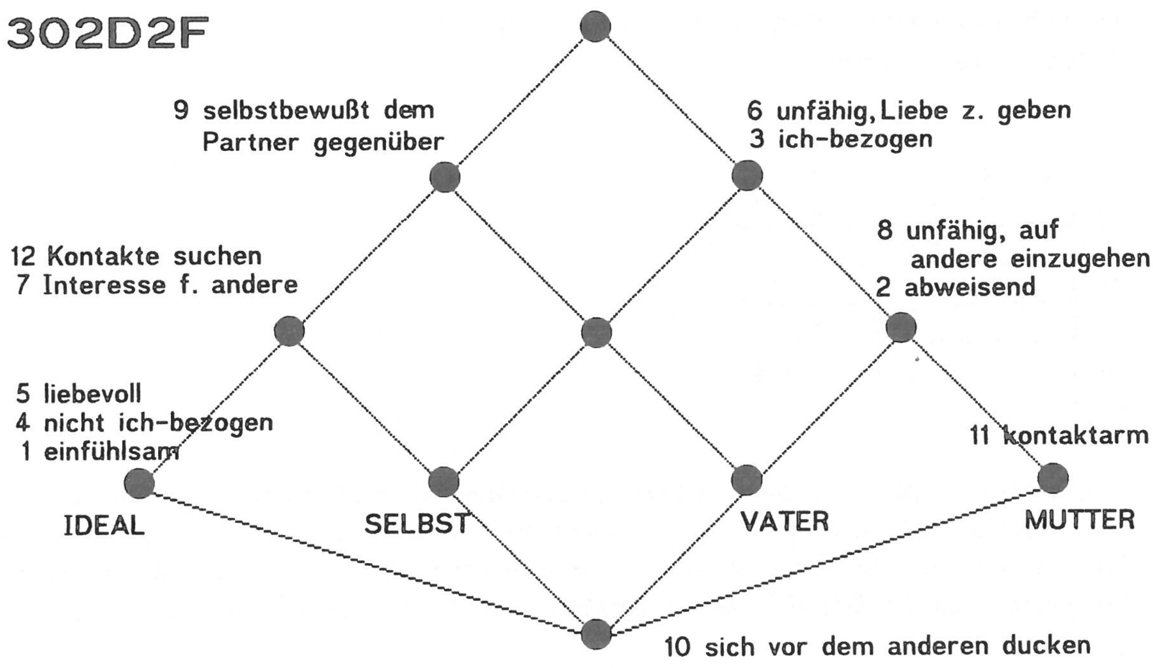
	6	1	5	15	2
I	X	X			
S		X	X		
M			X	X	
V				X	X

W_4	1	2	3	4	5
1	X	X			
2		X	X		
3			X	X	
4				X	X

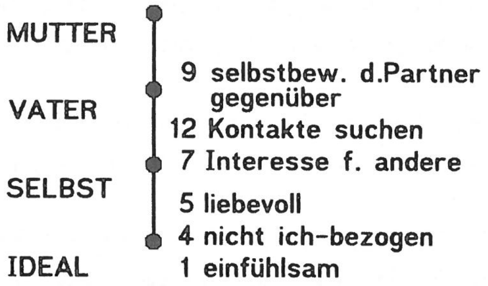
Allgemein sei für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ die Skala $\mathbb{W}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n+1}, I_n)$, wobei $g\, I_n\, m :\Longleftrightarrow m \in \{ g, g+1 \}$, $g \in \mathbf{n}$, $m \in \mathbf{n+1}$. Die Hauptbedeutung dieser "Wegskala" ist eine "schwache Zwischenbeziehung".
Ein Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ besitzt ein surjektives $\mathbb{W}_n$-Maß genau dann, wenn eine geordnete Umfangspartition $(U_1, ..., U_n)$ von $\mathbb{K}$ existiert, so daß die Vereinigung von je zwei aufeinanderfolgenden dieser Umfänge ein Umfang ist.
Damit können wir die "Links-Rechts-Reihenfolge" (IDEAL, SELBST, MUTTER, VATER) im Liniendiagramm des Kontextes **301D2F** durch die Existenz eines surjektiven $\mathbb{W}_4$-Maßes dieses Kontextes präzisieren. Der Kontext **383D2F** besitzt offenbar kein surjektives $\mathbb{W}_n$-Maß (für $n \geq 2$) und insofern keine begrifflich begründete "Links-Rechts-Reihenfolge" seiner Gegenstände, was man auch an den "Symmetrien", d.h. formal den Automorphismen des dargestellten Verbandes erkennt.
Im Kontext **301D2F** ist die MUTTER offenbar "stärker" zwischen SELBST und VATER eingebunden als das SELBST zwischen IDEAL und MUTTER. Eine solche stärkere Zwischenbeziehung tritt im folgenden Kontext **302D2F** besonders klar zu Tage.

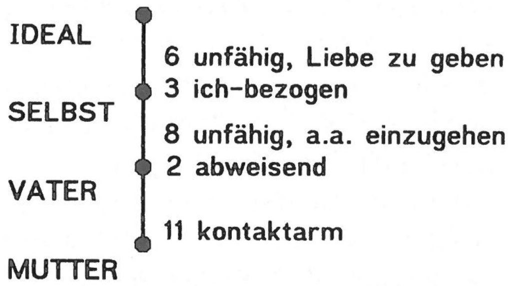
3.4. Eindimensionale Interordinalskalen

Der folgende Kontext stammt übrigens von derselben Patientin (Nr. 30) wie der vorherige Kontext, aber von einem späteren Behandlungszeitpunkt.



Der Kontext **302D2F** besitzt offenbar wie **301D2F** ein surjektives und nicht volles W_4-Maß, darüberhinaus aber auch zwei surjektive O_4-Maße σ und τ, wobei I, S, V, M unter σ auf bzw. 1,2,3,4 und unter τ auf bzw. 4,3,2,1 abgebildet werden.
Die beiden folgenden Liniendiagramme stellen diese O_4-Maße unter Verwendung der Gegenstands- und Merkmalsnamen des Kontextes **302D2F** dar.



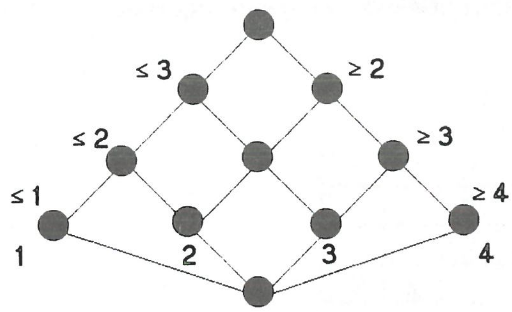


Diese "Projektionen der Gegenstandsbegriffe auf die im Liniendiagramm **302D2F** links stehenden IDEAL-Merkmale bzw. auf die rechts stehenden MUTTER-Merkmale" liefern eine doppelte inhaltliche Begründung der durch die Reihenfolge IDEAL, SELBST, VATER, MUTTER gegebenen "eindimensionalen Zwischenbeziehung".
Gleichzeitig erhält man eine durch die zugehörigen Begriffsumfänge gesicherte Reihenfolge der Merkmale von den starken IDEAL-Merkmalen 1,4,5 über die IDEAL-SELBST-Merkmale 7,12 zu dem schwachen IDEAL-SELBST-VATER-Merkmal 9, dann weiter über die "Familien-Merkmale" 3,6 und die "Eltern-Merkmale" 2,8 zu dem starken "MUTTER-Merkmal" 11.
Dieser "Tendenz" von den IDEAL-Merkmalen zu den entgegengesetzten MUTTER-Merkmalen kann auch durch geeignete Anordnung in einer Kreuztabelle des Kontextes **302D2F** sichtbar gemacht werden:

	5 4 1	12 7	9	6 3	8 2	11
I	X	X	X			
S		X	X	X		
V			X	X	X	
M				X	X	X

Man beachte, daß die beiden zuletzt angegebenen Liniendiagramme gerade zu den Teilkontexten aus den ersten (bzw. letzten) drei Spalten dieser Kreuztabelle gehören. Daher bestimmen diese beiden zu O_4 (als Skalen) äquivalente Teilkontexte bereits den ganzen Kontext **302D2F**, der seinerseits zu der eindimensionalen Interordinalskala I_4 äquivalent ist:

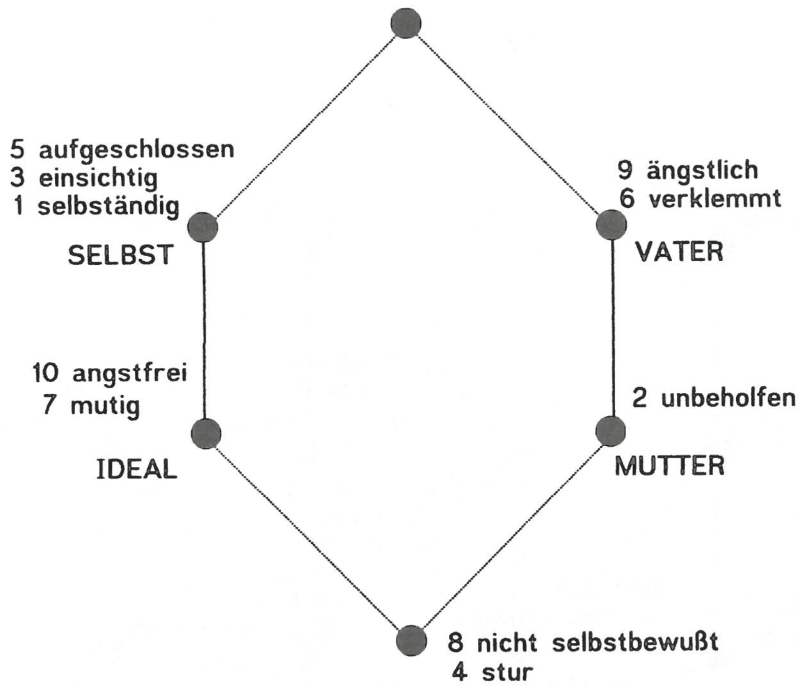
	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≥ 2	≥ 3	≥ 4
1	X	X	X			
2		X	X	X		
3			X	X	X	
4				X	X	X



Die obige Skala entsteht aus der von GANTER und WILLE [GW88] angegebenen standardisierten eindimensionalen Interordinalskala I_4 durch Weglassen der redundanten Merkmale ≤ 4, ≥ 1 und ihrer Vollspalten, die beim Nebeneinandersetzen (Apponieren) der Tabellen von O_4 und O_4^d auftreten.

3.5. Biordinalskalen

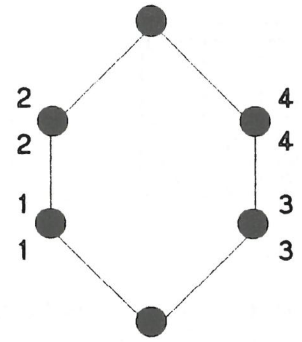
164D2F



Dieses Liniendiagramm zeigt eine Umfangspartition bestehend aus den "aufgeschlossenen" und den "verklemmten" Personen, deren Klassen in 2 (2-elementigen) Ketten angeordnet sind, wobei in jeder Kette die unten stehende Person in ihren Eigenschaften extremer ist als die darüberstehende Person: So hat z.B. die MUTTER nicht nur die Merkmale "ängstlich" und "verklemmt" wie der VATER, sondern dazu noch das Merkmal "unbeholfen".

Der Kontext 164D2F ist daher äquivalent zur Biordinalskala $M_{2,2}$:

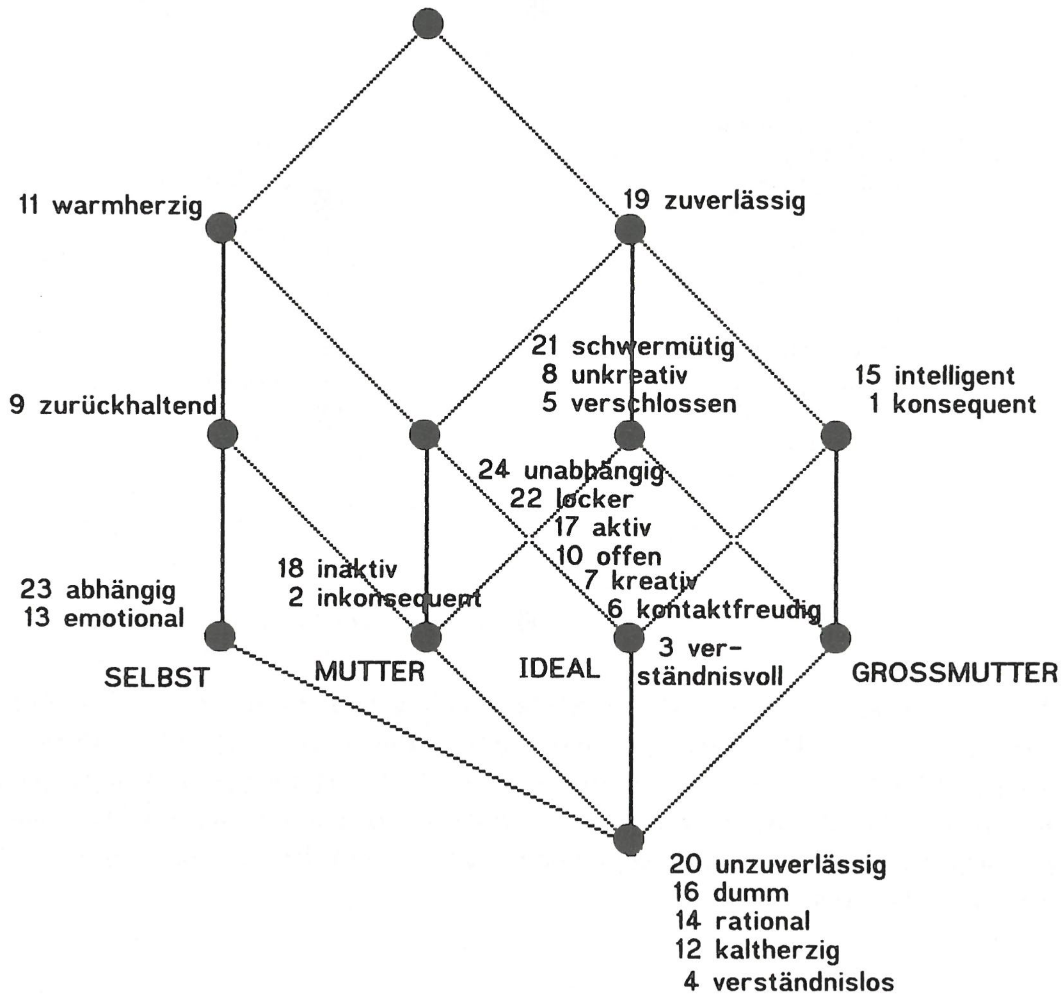
	1	2	3	4
1	X	X		
2		X		
3			X	X
4				X



Beispiel: Der von IDEAL, MUTTER, VATER erzeugte Unterkontext des Kontexts 301D2F besitzt ein $M_{1,2}$-Maß.

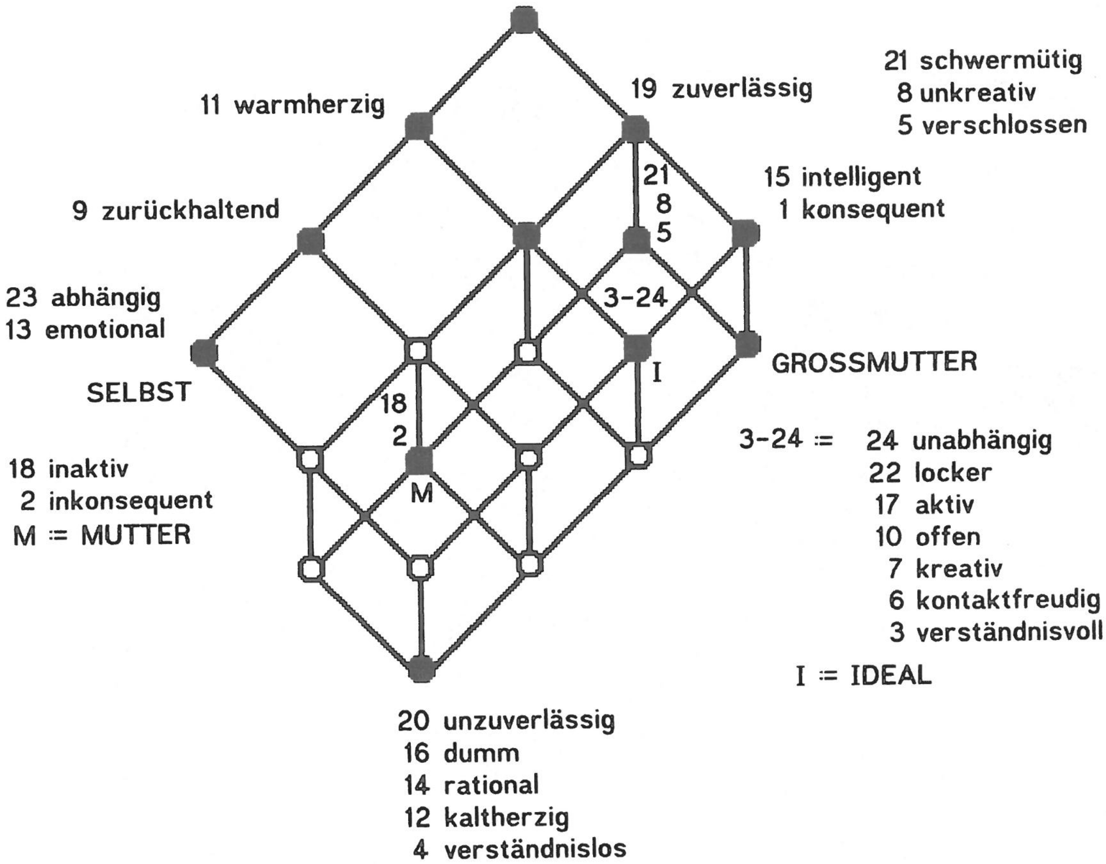
3.6. Gitterskalen

214D2F



Dieser Begriffsverband läßt sich in ein dreidimensionales Gitter so einbetten, daß man jeden Gegenstand - ähnlich wie einen Punkt im dreidimensionalen reellen Raum - durch drei "Koordinaten" darstellen kann, die aus Merkmalen dreier eindimensionaler Ordinalskalen bestehen. Eine solche Einbettung zeigt das folgende Liniendiagramm:

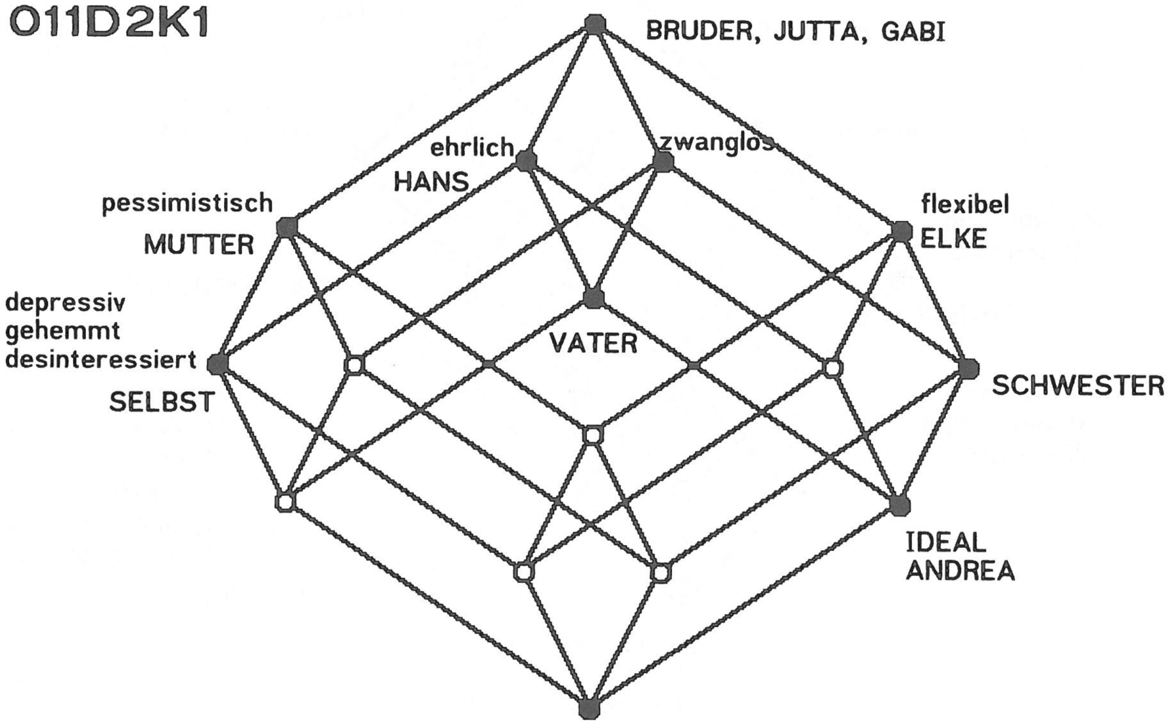
214D2F1



In diesem Liniendiagramm kennzeichnen die schwarzen Kreisscheiben die Begriffe des Begriffsverbandes des Kontextes **214D2F**, die so in den Begriffsverband eines dreidimensionalen Gitters eingebettet sind, daß sowohl die hierarchische Ordnung als auch die Suprema erhalten bleiben. Diese Darstellung benutzt eine Zerlegung der Ordnung der schnittirreduziblen Merkmalsbegriffe des einzubettenden Kontextes in Ketten, die hier durch die Merkmalsnummern (13,9,11), (1,19) und (5) beschrieben sind (s.[Wi82,GW88]). Der durch die Merkmale " 9 zurückhaltend, 19 zuverlässig" gekennzeichnete "weiße" Begriffspunkt markiert die im Kontext $\mathbb{K}$ = **214D2F** gültige Implikation "9 zurückhaltend, 19 zuverlässig $\xrightarrow{\mathbb{K}}$ 5 verschlossen", da jeder Gegenstand dieses Kontextes, der die Prämisse erfüllt, auch die Konklusion erfüllt. Ebenso gilt "11 warmherzig, 5 verschlossen $\xrightarrow{\mathbb{K}}$ 9 zurückhaltend". Die anderen "weißen" Begriffspunkte stellen Implikationen dar, aus deren Prämisse bereits alle anderen Merkmale folgen.

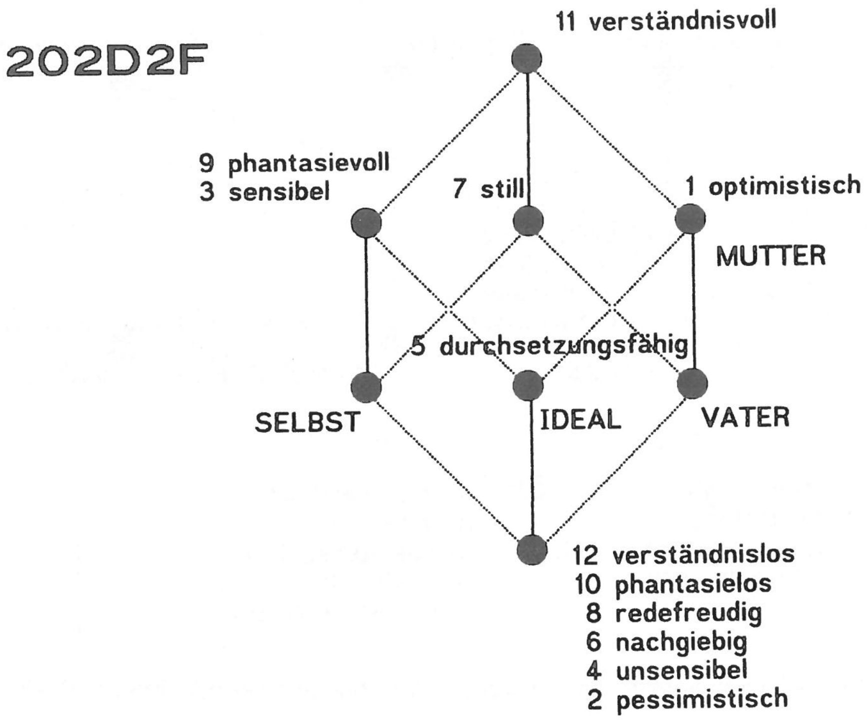
3.7. Boolesche Skalen und komplementäre Nominalskalen

Das folgende Liniendiagramm zeigt eine Supremumeinbettung des Begriffsverbandes des Kontextes **011D2K1** (dargestellt durch die schwarzen Kreisscheiben) in den Begriffsverband der Booleschen Skala $B_4 = (\mathfrak{p}(\{1,2,3,4\}), \mathfrak{p}(\{1,2,3,4\}), \subseteq)$, die ja äquivalent ist zu einer 4-dimensionalen Gitterskala. Diese Supremumeinbettung beschreibt ein volles nicht surjektives B_4-Maß des Kontextes **011D2K1**.



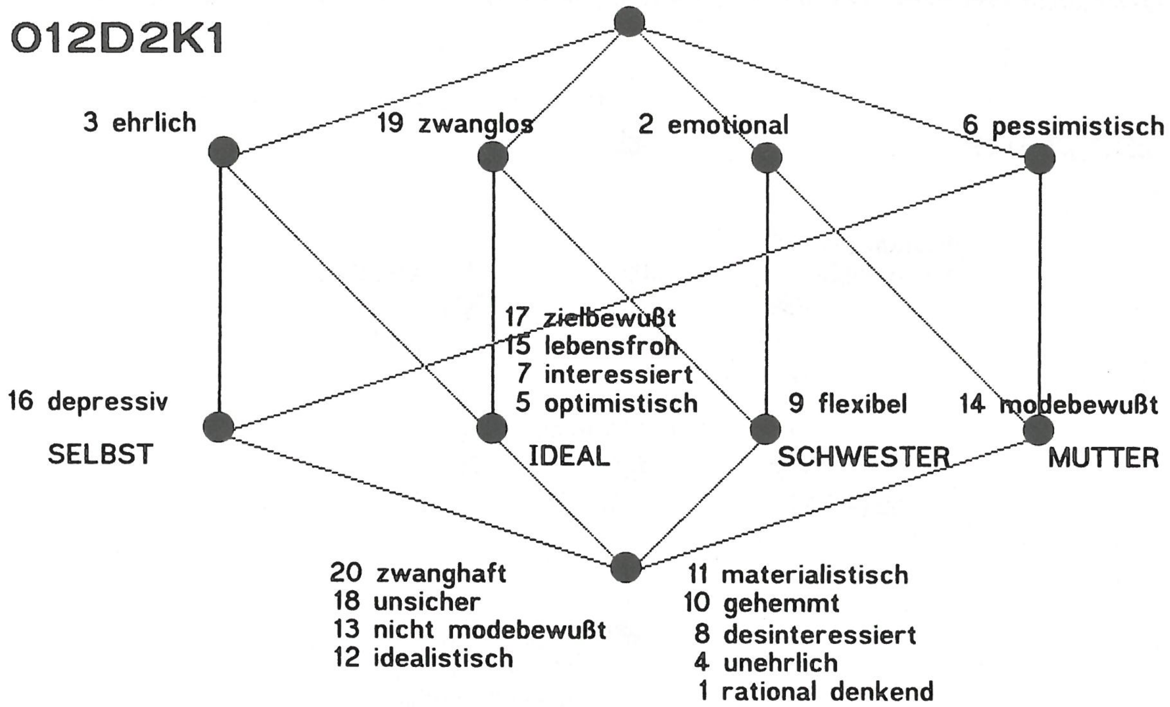
Neben der Möglichkeit, die Personen als Punkte in dem von den 4 schnittirreduziblen Begriffen der Merkmale "pessimistisch, ehrlich, zwanglos, flexibel" erzeugten 4-dimensionalen Gitter darzustellen, erkennt man (im Gegensatz zu der Menge der Merkmale der schnittirreduziblen Begriffe des Kontextes **214D2F**) eine *schwache* Form der *Unabhängigkeit* dieser 4 Merkmale in dem Sinne, daß keines dieser Merkmale ein anderes impliziert, was besagt, daß diese Merkmalsbegriffe eine Antikette bilden.
Andererseits sind diese 4 Merkmale noch *abhängig* in dem Sinne, daß zwischen diesen Merkmalen noch einige (durch "weiße" Begriffspunkte markierte) Implikationen gelten, wie z.B. "ehrlich, flexibel $\xrightarrow{K}$ zwanglos" oder etwa die triviale Implikation "pessimistisch, zwanglos $\xrightarrow{K}$ $M\setminus$ {pessimistisch, zwanglos}", die deshalb gilt, weil in diesem Kontext keine Person pessimistisch und zwanglos ist.
Eine *starke Unabhägigkeit* einer Teilmenge U der Merkmalsmenge M eines Kontextes $\mathbb{K}$ liegt daher dann vor, wenn kein Merkmal der Menge U von den anderen Merkmalen aus U (in $\mathbb{K}$) impliziert wird. Die starke Unabhängigkeit von U besagt genau die *hüllentheoretische Unabhägigkeit* von U im Hüllensystem der Begriffsinhalte von $\mathbb{K}$.

Im folgenden Kontext **202D2F** ist z.B. die Menge {phantasievoll, still, optimistisch} stark unabhängig und unter den stark unabhängigen Merkmalsteilmengen maximal (bzgl $\subseteq$).



An diesem Kontext erläutern wir auch die Bedeutung der *komplementären Nominalskala* $N_n^c := (n, n, \neq)$, deren Begriffsverband zwar isomorph zum Begriffsverband von B_n ist, die aber nur n Gegenstände besitzt, während B_n 2^n Gegenstände hat.
Läßt man im Liniendiagramm des Kontextes **202D2F** die Bezeichnung "MUTTER" weg, so erhält man das Liniendiagramm des von SELBST, IDEAL, VATER erzeugten Unterkontextes **202D2F1**, der offenbar ein surjektives volles N_3^c-Maß besitzt.
In der Skala N_n^c ist jede Teilmenge der Gegenstandsmenge ein Begriffsumfang, woraus sich offenbar ergibt, daß jede Partition von n eine Umfangspartition ist. Andererseits bilden die Gegenstände von n als Merkmale des zu N_n^c dualen Kontextes eine maximale stark unabhängige Menge.

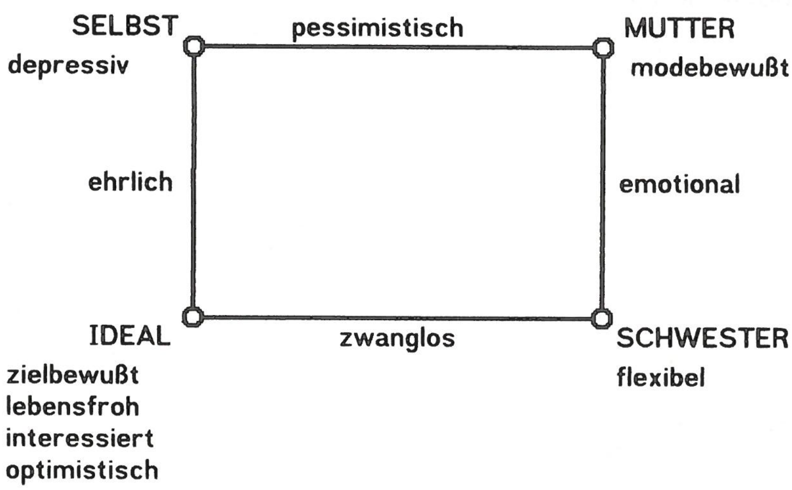
3.8. Kreisskalen und dichotome Skalen



Der Kontext **O12D2K1** dieses Liniendiagramms ist darstellbar durch folgende Kreuztabelle:

O12D2K1	6	3	19	2	16	17 15 7 5	9	14	20 : 1
SELBST	X	X			X				
IDEAL		X	X			X			
SCHWESTER			X	X			X		
MUTTER	X			X				X	

Da in jeder Spalte höchstens ein Kreuz vorkommt, ist dies die Inzidenzmatrix eines Graphen (mit Schlingen), den wir folgendermaßen darstellen:



Der Kontext 012D2K1 ist äquivalent zur folgenden Kreisskala K_4:

K_4	0	1	2	3
0	X	X		
1		X	X	
2			X	X
3	X			X

Allgemein sei für eine natürliche Zahl $n \geq 3$ die *Kreisskala* $K_n := (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n, J_n)$, wobei $\mathbb{Z}_n := \{0,1, \ldots, n-1\}$ und $g\ J_n\ m \ :\Longleftrightarrow\ m \in \{g, g +_n 1\},\ g, m \in \mathbb{Z}_n$. Dabei ist $+_n$ die Addition modulo n. Der Begriffsverband einer Kreisskala ist isomorph zu einer *Krone mit 0 und 1.*
Am Kontext 012D2K1 erläutern wir auch die in [GW88,Proposition 5] angegebene Charakterisierung der Existenz voller Maße in dichotome Skalen. Die Begriffsumfänge der schnittirreduziblen Begriffe von 012D2K1 zerfallen in 2 Paare komplementärer Begriffsumfänge, nämlich die Umfänge der Merkmalsbegriffe von "ehrlich" und "emotional" einerseits und von "zwanglos" und "pessimistisch" andererseits. Da in diesem Kontext außerdem alle Gegenstandsbegriffe Atome des zugehörigen Begriffsverbandes sind, existiert nach Proposition 5 ein volles Maß dieses Kontexts in die 2-dimensionale dichotome Skala D_2, die durch folgende Kreuztabelle dargestellt wird:

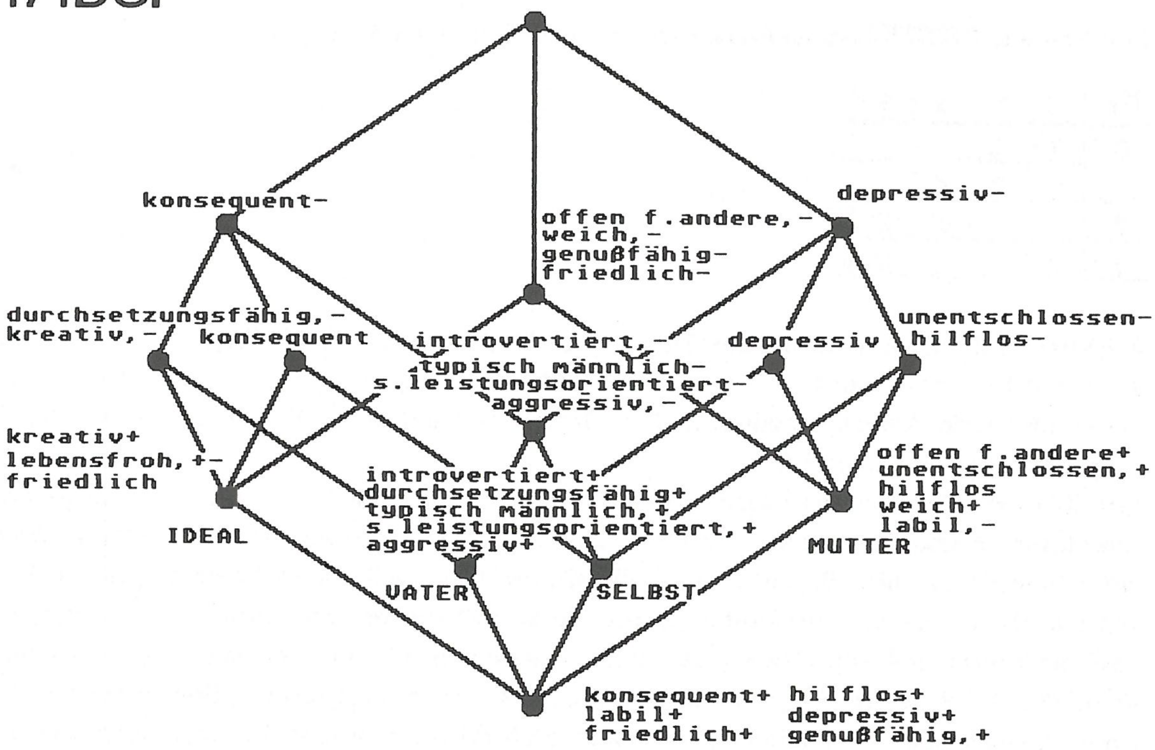
D_2	(0,1)	(1,1)	(0,2)	(1,2)
(0,0)	X		X	
(0,1)	X			X
(1,0)		X	X	
(1,1)		X		X

Der Kontext 012D2K1 ist sogar äquivalent ist zu D_2.

3.9. Konvexe Ordinalskalen und konträre Ordinalskalen

Am Beispiel des folgenden Liniendiagramms erläutern wir eine konvexe und eine konträre Ordinalskala. Zum Verständnis des Liniendiagramms 171DCF eine Leseprobe: Unter den leicht depressiven Personen ("depressiv-") sind die MUTTER und der VATER zwar depressiv, aber niemand ist sehr depressiv ("depressiv+"). Das IDEAL ist "weich", also (wegen der hier benutzten Skalierung eines mehrwertigen Kontextes mit einer Biordinalskala) auch "weich-", u.z. ebenso wie die MUTTER, die sogar sehr weich ("weich+") ist.

171DCF

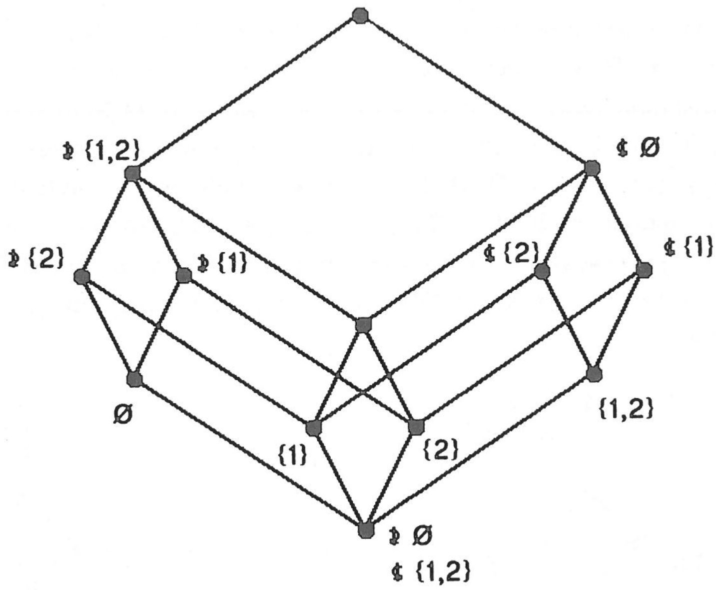


Die offenbar sehr *starke Zwischenbeziehung*, durch die VATER und SELBST zwischen IDEAL und MUTTER "eingespannt" sind, läßt sich folgendermaßen beschreiben:
Der Kontext **171DCF** besitzt ein surjektives Maß auf die folgende *konvexe Ordinalskala* C_P, deren Begriffsumfänge genau die konvexen Teilmengen der Ordnung $(P, \subseteq)$ sind, wobei $P := \mathfrak{p}(\{1,2\})$ die Potenzmenge von $\{1,2\}$ ist.
Zum besseren Verständnis dieser konvexen Ordinalskala geben wir nun eine gemäß der allgemeinen Definition von konvexen Ordinalskalen gebildete Kreuztabelle von C_P an (s. [GW88]):

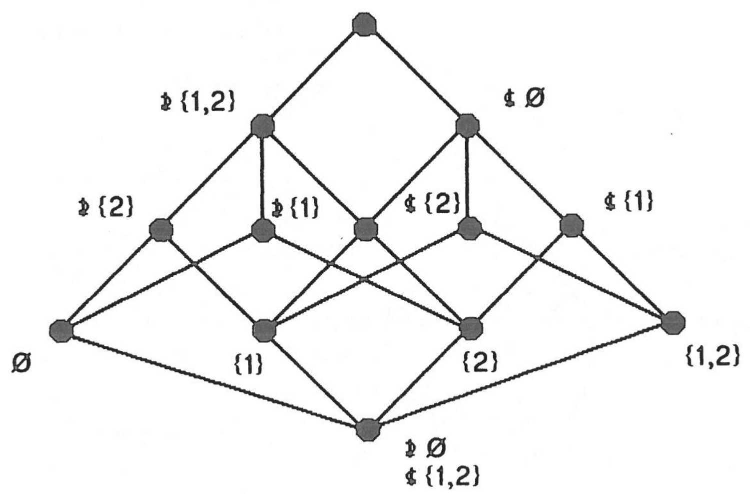
C_P	$\not\supseteq \emptyset$	$\not\supseteq \{1\}$	$\not\supseteq \{2\}$	$\not\supseteq \{1,2\}$	$\not\subseteq \emptyset$	$\not\subseteq \{1\}$	$\not\subseteq \{2\}$	$\not\subseteq \{1,2\}$
$\emptyset$		X	X	X				
$\{1\}$			X	X	X		X	
$\{2\}$		X		X	X	X		
$\{1,2\}$					X	X	X	

Die linke Hälfte der so gebildeten Kreuztabelle beschreibt die *konträre Ordinalskala* $(P, P, \not\supseteq)$, die rechte Hälfte den dazu dualen Kontext $(P, P, \not\subseteq)$.

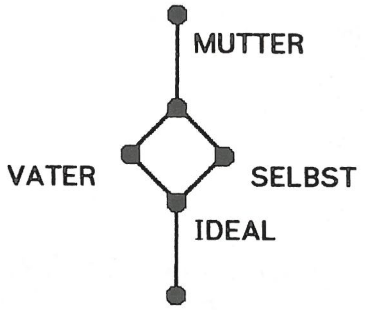
Das folgende Diagramm ist das Liniendiagramm dieser konvexen Ordinalskala $\mathbb{C}_P$, wobei $P := \mathfrak{p}(\{1,2\})$ ist.

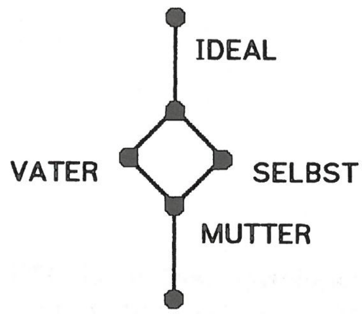


Ein surjektives Maß σ von 171DCF auf $\mathbb{C}_P$ ist offenbar gegeben durch σ(IDEAL) = Ø, σ(VATER) = {1}, σ(SELBST) = {2}, σ(MUTTER) = {1,2}. Das Maß σ ist "beinahe" ein volles Maß, denn {IDEAL, MUTTER} ist der einzige Umfang von 171DCF, der nicht σ-Urbild eines Umfangs von $\mathbb{C}_P$ ist. Läßt man also die auf IDEAL und MUTTER gemeinsam zutreffenden Merkmale des Kontextes 171DCF weg, so erhält man einen zu $\mathbb{C}_P$ äquivalenten Kontext. Das folgende Liniendiagramm des Begriffsverbandes von $\mathbb{C}_P$ zeigt, daß diese konvexe Ordinalskala ein surjektives Maß auf die Interordinalskala $\mathbb{I}_4$ besitzt. Dieses Maß ist ebenfalls "beinahe" voll, da nur die Umfänge der Merkmalsbegriffe von ƀ {1} und ¢ {2} keine Urbilder dieses Maßes sind.

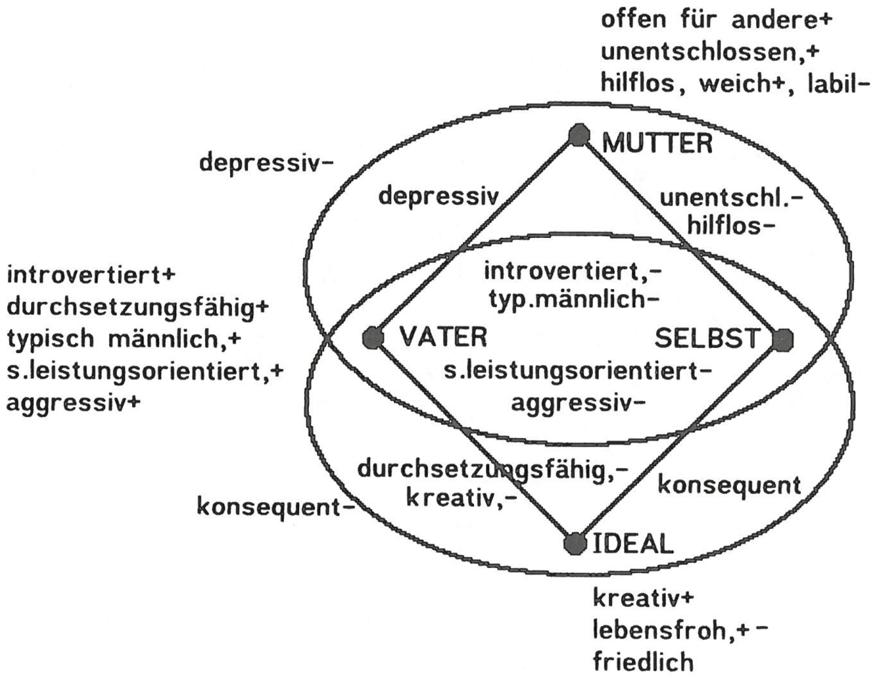


Die durch die obigen Liniendiagramme visualisierte *starke Zwischenbeziehung*, die VATER und SELBST zwischen IDEAL und MUTTER zeigt, läßt sich (analog wie bei den Interordinalskalen) aus der Definition der konvexen Ordinalskalen $C_P := (P, P, \ngeq) | (P, P, \nleq)$ als Apposition (Nebeneinandersetzen) der konträren Ordinalskala $(P, P, \ngeq)$ und der dazu dualen Skala $(P, P, \nleq)$ folgendermaßen doppelt begründen:
Die identische Abbildung von P auf P ist sowohl ein surjektives Maß von C_P auf $(P, P, \ngeq)$ als auch auf $(P, P, \nleq)$. Daher ist auch das oben angegebene surjektive C_P-Maß σ von **171DCF** sowohl ein surjektives $(P, P, \ngeq)$-Maß als auch ein surjektives $(P, P, \nleq)$-Maß von **171DCF**. Die folgenden beiden Diagramme visualisieren diese Maße, die "durch Projektion der Gegenstandsbegriffe in das im Liniendiagramm **171DCF** links enthaltene Liniendiagramm von $(P, P, \ngeq)$ bzw. in das rechts enthaltene Liniendiagramm von $(P, P, \nleq)$ dargestellt werden".

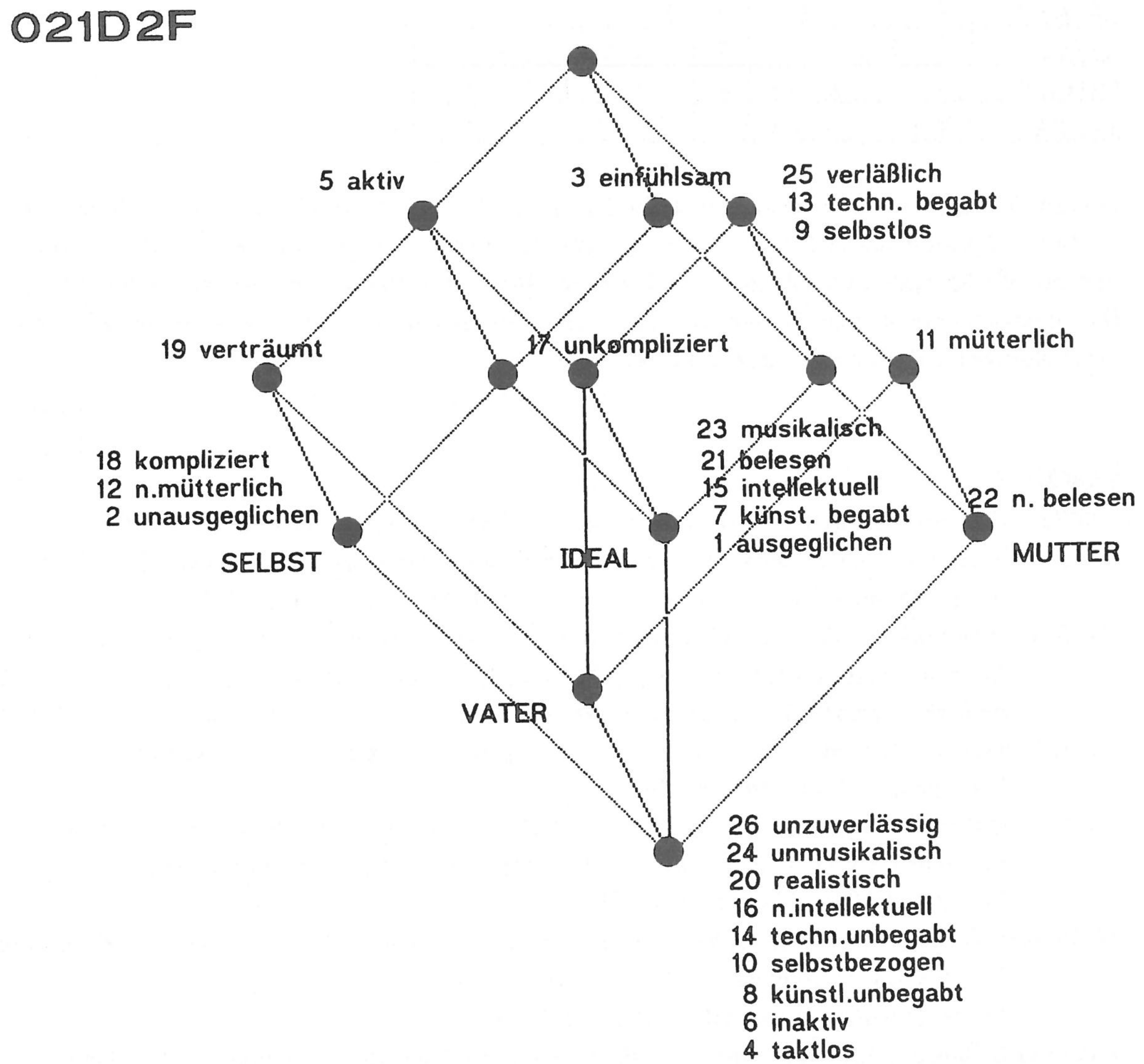




Diese Diagramme zeigen, daß VATER und SELBST sowohl bezüglich der IDEAL-Merkmale als auch bezüglich der MUTTER-Merkmale zwischen IDEAL und MUTTER einzuordnen sind. Die besondere Bedeutung der Umfänge der Skala C_P als konvexe Teilmengen der Ordnung $(P, \leq)$ führt uns zu folgender graphischen Darstellung, in der die nichtleeren Begriffsumfänge des Kontextes **171DCF** durch Punkte, Strecken oder konvexe Venndiagramme und deren Schnitte dargestellt sind:



3.10. Beispiel einer direkten Summe zweier Skalen und des direkten Produkts ihrer Begriffsverbände



An diesem Liniendiagramm fällt zunächst auf, daß sich die einfühlsamen Personen unter den Vatermerkmalen zu einer Interordinalskala gruppieren, während dem Vater als einzigem das Merkmal "3 einfühlsam" nicht zugesprochen wird. Daraus resultiert die einfache Verbandsstruktur einer "doppelten Interordinalskala", die formal das direkte Produkt der Begriffsverbände einer Interordinalskala (mit 3 Gegenständen) und einer zu N_1^c äquivalenten komplementären Nominalskala ist. Daher erhält man aus diesem Liniendiagramm die folgende übersichtliche Kreuztabelle, die in den ersten 3 Zeilen der

021D2F	19	5	25 13 9	11	3	18 12 2	23 : 1	22	17	26 : 4
SELBST	X	X			X	X				
IDEAL		X	X		X		X		X	
MUTTER			X	X	X			X		
VATER	X	X	X	X					X	

ersten 4 Spalten die Interordinalskala I_3 "enthält", während die ersten 4 Zeilen der ersten 5 Spalten die Struktur einer direkten Summe einer zu I_3 äquivalenten und einer zu N_1^c äquivalenten Skala zeigen, deren Begriffsverband das direkten Produkt der Begriffsverbände dieser Skalen ist. Die letzten 5 Spalten liefern keine neuen Begriffe, sie fallen beim Reduzieren des Kontextes weg.

Literatur:

[Bi67] G.Birkhoff: Lattice theory, 3rd ed., Amer.Math.Soc., Providence 1967.

[Bu87] P.Burmeister: Programm zur Formalen Begriffsanalyse einwertiger Kontexte (unter Mithilfe von A.Rust und P.Schleich). TH Darmstadt 1987

[Du87] V.Duquenne: Contextual implications between attributes and some properties for finite lattices. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1987, 213-239.

[Er82] M.Erné: Einführung in die Ordnungstheorie. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/ Wien/Zürich 1982.

[Ga87] B.Ganter: Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1987, 241-254.

[GSW86] B.Ganter, J.Stahl, R.Wille: Conceptual measurement and many-valued contexts. In: W.Gaul, M.Schader (eds.): Classification as a tool of research. North-Holland, Amsterdam 1986, 169-176.

[GW86] B.Ganter, R.Wille: Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen. In: P.O.Degens, H.-J.Hermes, O.Opitz (eds.): Die Klassifikation und ihr Umfeld. INDEKS Verlag Frankfurt 1986, 171-185.

[GW88] B.Ganter, R.Wille: Conceptual scaling. In: F.Roberts (ed.): Applications of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences, 139-167. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 17, Springer Verlag 1989.

[Ro79] F.S.Roberts: Measurement theory. Addison-Wesley, Reading/Mass. 1979.

[Sk86] M.Skorsky: Handbuch für Benutzer und Programmierer des Programmpakets ANACONDA. TH Darmstadt, 1986.

[Sp89] N.Spangenberg: Familienkonflikte bei eßgestörten Patientinnen. Eine empirische Untersuchung mit Hilfe der Repertory Grid Technik. Habilitationsschrift im Fachbereich Humanmedizin der Justus-Liebig-Universität Gießen.

[SW87] N.Spangenberg, K.E.Wolff: Conceptual grid evaluation. In: H.H.Bock (ed.): Classification and related methods of data analysis Proceedings of the First Conference of the International Federation of Classification Societies (IFCS), Technical University of Aachen/FRG, (1987), North Holland, Amsterdam 1988, 577-580.

[SW88] N.Spangenberg, K.E.Wolff: Formal Concept Analysis of Repertory Grids: A case study of a patient with Anorexia nervosa. Eingereicht zur Veröffentlichung in den Proceedings of the 17h European Conference on Psychosomatic Research, Marburg, 1988.

[SW89] N.Spangenberg, K.E.Wolff: Comparison between Principal Component Analysis and Formal Concept Analysis of Repertory Grids. Erscheint demnächst.

[St51] S.S.Stevens: Mathematics, measurement and psychophysics. In: S.S.Stevens (ed): Handbook of experimental psychology. Wiley, New York 1951.

[To58] W.S.Torgerson: Theory and methods of scaling. Wiley, New York 1958.

[Wi82] R.Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: Ordered Sets (ed. I.Rival). Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445-470.

[Wi84] R.Wille: Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In: H.H.Bock (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. INDEKS-Verlag, Frankfurt 1984, 32-51; engl. Übersetzung: Line diagrams of hierarchical concept systems. International Classification 11 (1984), 77-86.

[Wi87] R.Wille: Bedeutungen von Begriffsverbänden. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1987, 161-211.

[Wi88] R.Wille: Dependencies of many-valued attributes. In: H.H.Bock (ed.): Classification and related methods of data analysis. North-Holland, Amsterdam 1988, 581-586.

[Wo88] K.E.Wolff: Einführung in die Formale Begriffsanalyse. Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, (1988) Actes 19e Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 85-96.