Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommer 2018 (UE250040)

1. Sei K ein Körper und $P \subseteq K$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
(a) P is abgeschlossen unter Addition, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $x + y \in P$.
(b) P ist abgeschlossen unter Multiplikation, d.h. für beliebige $x, y \in P$ gilt stets $xy \in P$.
(c) Es gilt $P \cup (-P) = K$ und $P \cap (-P) = \{0\}$, wobei $-P := \{-x : x \in P\}$.
Zeige, dass K mit der Relation

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y - x \in P$$

einen geordneten Körper bildet, $x, y \in K$.

2. Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. Zeige der Reihe nach:
(a) $\varphi(1) = 1$
(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$
(c) $\forall m \in \mathbb{Z} : \varphi(m) = m$
(d) $\forall q \in \mathbb{Q} : \varphi(q) = q$
(e) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Hinweis: $x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.
(f) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$.
(g) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = x$. Hinweis: Wären $\varphi(x)$ und x verschieden, läge eine rationale Zahl dazwischen.
Schließe daraus, dass die identische Abbildung der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$ ist.

3. Betrachte den Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\psi\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \qquad \psi(a + b\sqrt{2}) := a - b\sqrt{2},$$

ein Körperautomorphismus ist und gib den inversen Automorphismus an. Gib ein positives Element in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ an, das durch ψ auf ein negatives Element abgebildet wird, vgl. Punkt (e) im vorangehenden Beispiel. An welcher Stelle (und warum) bricht das Argument im vorangehenden Beispiel zusammen, wenn wir es auf den Automorphismus ψ anwenden?

4. Wiederhole die Definition der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen. Zeige, dass die komplexe Konjugation einen nicht trivialen Körperautomorphismus bildet. An welcher Stelle (und warum) bricht das zuvor besprochene Argument (Beispiel 2) für die komplexe Konjugation zusammen?

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2018.html`

5. Wiederhole die Begriffe Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse und Quotientenmenge. Gib einige Beispiele.

6. Sei $(H, +)$ eine abelsche Halbgruppe, in der die Kürzungsregel gilt:

$$\forall a, b, c \in H : a + c = b + c \Rightarrow a = b.$$

(a) Zeige, dass durch $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = a' + b$ auf $H \times H$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen mit $G := (H \times H)/\sim$. Für die von $(a, b) \in H \times H$ repräsentierte Äquivalenzklasse schreiben wir $[a, b]$.
(b) Zeige, dass durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ auf G eine Operation $+$ wohldefiniert ist.
(c) Zeige, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.
(d) Sei $z \in H$ fix und betrachte die Abbildung $\iota\colon H \to G$, $\iota(a) := [a + z, z]$. Zeige, dass ι ein Halbgruppenhomomorphismus ist, d.h. für beliebige $a, b \in H$ gilt stets $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$. Zeige, dass ι injektiv ist und nicht von der Wahl von z abhängt. Erkläre, warum es daher sinnvoll ist, H mit dem Bild $\iota(H) \subseteq G$ zu identifizieren.

Hinweis: Dies ist analog zur Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen.

7. In der Situation des vorangehenden Beispiels nehmen wir weiters an, dass auf H eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, für die das Distributivgesetz gilt, d.h. für beliebige $a, b, c \in H$ gelte:

$$ab = ba, \qquad a(bc) = (ab)c, \qquad \text{und} \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

(a) Zeige, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf G eine Operation wohldefiniert ist.
(b) Zeige, dass $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.
(c) Zeige $\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad]$ für beliebige $a, c, d \in H$.
(d) Zeige, dass $\iota\colon H \to G$ ein Ringhomomorphismus ist.
(e) Zeige, dass der Ring G ein Einselement besitzt, wenn für die Multiplikation in H ein neutrales Element existiert.

8. Für $v \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ betrachten wir die Abbildung

$$\phi_{\lambda,v}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi_{\lambda,v}(x) := \lambda x + v.$$

(a) Gib eine geometrische Beschreibung dieser Transformationen. Welche Abbildungen erhalten wir für $\lambda = 1$ bzw. $v = 0$?
(b) Zeige $\phi_{\lambda_2,v_2} \circ \phi_{\lambda_1,v_1} = \phi_{\lambda_2\lambda_1,\lambda_2 v_1+v_2}$ für beliebige $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.
(c) Zeige, dass $\phi_{\lambda,v}$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\phi_{\lambda,v}^{-1} = \phi_{1/\lambda,-v/\lambda}$ ist.
(d) Schließe, dass die Menge der Transformationen $\{\phi_{\lambda,v} : v \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine nicht kommutative Gruppe bildet.

9. In der Situation des vorangehenden Beispiels:

(a) Für welche λ und v hat $\phi_{\lambda,v}$ genau einen Fixpunkt?
(b) Für welche λ und v hat $\phi_{\lambda,v}$ keinen Fixpunkt?
(c) Für welche λ und v hat $\phi_{\lambda,v}$ mehr als einen Fixpunkt?

Hinweis: Ein Fixpunkt einer Abbildung ϕ ist ein Argument x für das $\phi(x) = x$ gilt.

10. Auf der Menge reeller Zahlenpaare,

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

betrachten wir Vektoraddition und Skalarmultiplikation,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix},$$

wobei $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Was ist das neutrale Element und wie sehen die additiven Inversen aus? Zeige, dass folgende Rechenregeln für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
(b) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
(c) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(d) $1v = v$
(e) $(-1)v = -v$
(f) $\lambda v = 0$ gilt genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

11. Leite aus den Inzidenzaxiomen I1 bis I3 folgendes ab:

(a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
(b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
(c) Zu jedem Punk existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
(d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

12. Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$. Zeige:

$$ax + by = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Weiters seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $c := ap + bq$. Verwende die vorangehende Äquivalenz und zeige:

$$ax + by = c \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Schließe daraus, dass für eine Teilmenge $g \subseteq \mathbb{R}^2$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existieren reelle Zahlen a, b, c sodass $(a, b) \neq (0, 0)$ und

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : ax + by = c \right\}.$$

(b) Es existieren $P, v \in \mathbb{R}^2$, sodass $v \neq 0$ und

$$g = \big\{ P + tv : t \in \mathbb{R} \big\}.$$

Eine Teilmenge g dieser Form werden wir im Folgenden als Gerade in $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

13. Bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$, die sich wie in (a) und (b) des vorangehenden Beispiels darstellen lassen (Geraden). Zeige, dass in dieser Situation die Inzidenzaxiome I1 bis I3 erfüllt sind. Schließe daraus, dass für je zwei verschiedene Punkte A und B einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$ die Darstellung $g = \{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\}$ gilt.

14. Betrachte folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$X := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Liegt X auf $g(A, B)$?

(b) Liegt X auf $g(C, D)$?
(c) Schneiden sich die Geraden $g(A, B)$ und $g(C, D)$ und wenn, wo?
(d) Schneiden sich die Geraden $g(A, B)$ und $g(C, E)$ und wenn, wo?

15. Wir betrachten wieder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ und die Geradenmenge $\mathcal{G}$ aus Beispiel 13. Für drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ definieren wir $A * B * C$, falls $A \neq C$ und eine Zahl $0 < t < 1$ existiert, sodass $B = A + t(C - A)$. Zeige, dass in dieser Situation die Anordungsaxiome A1 bis A4 erfüllt sind.

Anleitung zu Axiom A4: Sei ABC ein Dreieck und g eine Gerade, die keinen der Eckpunkte trifft. Betrachte nur den Fall, dass g jede der Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ trifft. Es existieren daher reelle Zahlen x, y, z, t, sodass:

$$\begin{aligned} Z &= X + t(Y - X) \\ X &= B + x(C - B) \\ Y &= C + y(A - C) \\ Z &= A + z(B - A) \end{aligned}$$

Leite aus den ersten drei Gleichung die Darstellung

$$Z = C + ty(A - C) + (t - 1)(1 - x)(C - B)$$

her, und schreibe die vierte Gleichung in der Form

$$Z = C + (1 - z)(A - C) - z(C - B).$$

Kombiniere diese beiden Darstellungen für Z, um

$$C + (1 - z - ty)(A - C) = C + ((t - 1)(1 - x) + z)(C - B)$$

zu erhalten. Erkläre, wie daraus mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 (Beispiel 13)

$$1 - z - ty = 0 = (t - 1)(1 - x) + z$$

folgt. Eliminiere t und folgere daraus

$$\frac{1 - x}{x} \cdot \frac{1 - y}{y} \cdot \frac{1 - z}{z} = -1.$$

(Dies wird als Satz von Menelaus bezeichnet.) Zeige weiters

$$X \in (BC) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x}{x} > 0$$

und analog für Y und Z. Wie lässt sich damit nun Axiom A4 folgern?

16. Seien A und B zwei verschiedene Pukte in $\mathbb{R}^2$. Mit der Anordnungsrelation des vorangehenden Beispiels gilt daher

$$(AB) = \{A + t(B - A) : 0 < t < 1\}.$$

Zeige zunächst auch

$$[AB] = \{A + t(B - A) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Leite nun folgende Darstellungen der offenen Halbgeraden her:

$$\begin{aligned} <A)B &= \{A + t(B - A) : t < 0\} \\ (AB> &= \{A + t(B - A) : t > 0\} \end{aligned}$$

Hinweis: Ist $X = A + t(B - A)$ ein von B verschiedener Punkt auf $g(A, B)$, dann gilt $t \neq 1$ und $A = B + \frac{1}{1-t}(X - B)$. Damit lässt sich $A \in (XB)$ charakterisieren. Schließe daraus auch:

$$<A]B = \{A + t(B - A) : t \leq 0\}$$
$$[AB> = \{A + t(B - A) : t \geq 0\}$$

17. Betrachte folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} 13 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Gib zu jedem der Punkte X, Y, Z an, ob er auf (AB), $(AB>$ oder $<A)B$ liegt.

18. Zeige, dass jede Strecke unendlich viele Punkte enthält. Verwende dabei nur die Inzidenz- und Anordnungsaxiome, sowie die in der Vorlesung daraus hergeleiteten Eigenschaften.

19. Sei ABC ein Dreieck. Weiters seien B' und C' zwei Punkte mit $A * B * B'$ und $A * C * C'$. Zeige, dass sich die Strecken (BC') und $(B'C)$ im Inneren des Winkels $\angle CAB$ treffen. Hinweis: Wende, wie in der Vorlesung, Axiom A4 an.

20. (a) Zeige, dass Halbebenen und Halbstrahlen konvex sind.
(b) Zeige, dass beliebige Durchschnitte konvexer Mengen konvex sind.
(c) Schließe, dass die Inneren von Winkeln und Dreiecken konvex sind.

21. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, und betrachte die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \right\}.$$

Zeige, dass

$$\varepsilon_+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by > c \right\} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_- := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by < c \right\}$$

die beiden Seiten von g sind. Hinweis: Zeige, dass alle Punkte von ε_+ auf der selben Seite von g liegen.

22. Betrachte folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gib die beiden Seiten der Geraden $g(A, B)$ durch Ungleichungen wie im vorangehenden Beispiel an. Liegt der Halbstrahl $(CD>$ zur Gänze in einer der beiden Seiten?

23. Betrachte folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 501 \\ 401 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass ABC ein Dreieck bildet.
(b) Liegt E auf der selben Seite von $g(A, B)$ wie C?
(c) Liegt E im Inneren des Winkels $\angle BCA$?
(d) Liegt E im Inneren des Dreiecks ABC?
(e) Liegt F im Inneren des Dreiecks ABC?

(f) Liegt P im Inneren des Winkels $\angle CAB$?

24. Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ vier Punkte, sodass $(AB) = (CD)$. Zeige, dass dann die Endpunkte der Strecken (bis auf Vertauschung) übereinstimmen müssen, d.h. zeige, dass $\{A, B\} = \{C, D\}$ gilt.

25. Die Norm von $v \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$\|v\| := \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{definiert, wobei } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass für beliebige $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$.
(b) $\|tv\| = |t|\,\|v\|$. (Homogenität)
(c) $\|v + \tilde{v}\| \leq \|v\| + \|\tilde{v}\|$. (Dreiecksungleichung)

Anleitung zu (c):

$$\begin{aligned} \|v + \tilde{v}\| \leq \|v\| + \|\tilde{v}\| &\Leftrightarrow \|v + \tilde{v}\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|\tilde{v}\| + \|\tilde{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow x\tilde{x} + y\tilde{y} \leq \|v\|\|\tilde{v}\| \\ &\Leftarrow \big(x\tilde{x} + y\tilde{y}\big)^2 \leq (x^2 + y^2)(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \\ &\Leftrightarrow 2x\tilde{x}y\tilde{y} \leq x^2\tilde{y}^2 + y^2\tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Erkläre jede der angedeuteten Implikationen und erkläre, warum die letzte Ungleichung immer erfüllt ist (binomische Formel).

26. Wir betrachten wieder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ mit den Geraden aus Beispiel 13 und der Anordnungsrelation aus Beispiel 15. Wir nennen zwei Strecken AB und CD kongruent, in Zeichen $AB \equiv CD$, falls $\|B - A\| = \|D - C\|$. Dabei sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ und $\| - \|$ bezeichnet die Norm aus dem vorangehenden Beispiel. Zeige, dass in dieser Situation die Kongruenzaxiome K1 bis K3 erfüllt sind. Für Axiom K3 zeige zunächst:

$$A * B * C \quad \Rightarrow \quad \|C - A\| = \|B - A\| + \|C - B\|.$$

Hinweis: Schreibe $B = A + t(C - A)$ mit $0 < t < 1$, leite daraus $C = B + (1 - t)(C - A)$ her und verwende die Rechenregeln aus dem vorangehenden Beispiel.

27. Betrachte folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Strecken AB, AC, AD, BC, BD, CD sind kongruent?
(b) Auf dem Halbstrahl $(BC>$ bestimme den eindeutigen Punkt E, sodass $BE \equiv CD$.

28. Wir betrachten wieder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ mit den Geraden, der Anordnungsrelation und der Kongruenz von Strecken wie in den vorangehenden Beispielen. Wir erinnern uns daran, dass $\mathcal{P}$ die Menge der Kongruenzklassen von Strecken bezeichnet. Wir erinnern uns auch daran, dass die Kongruenzklasse einer Strecke AB mit $|AB|$ bezeichnet wird.

(a) Warum ist $\mathcal{P} \to (0, \infty)$, $|AB| \mapsto \|B - A\|$ eine wohldefinierte Bijektion?
(b) Warum ist diese Abbildung ein Homomorphismus, d.h. mit der Addition verträglich?

29. Sei AB ein Strecke. Wähle auf verschiedenen Seiten von $g(A,B)$ zwei Punkte C und D, sodass $\angle CAB \equiv \angle DBA$ und $AC \equiv BD$. Bezeichne den Schnittpunkt von $g(A,B)$ und $g(C,D)$ mit M. Fertige eine Skizze an und zeige, dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. Gehe anschließend näher auf folgende Punkte ein:

(a) Warum können Punkte C und D so gewählt werden?
(b) Warum haben $g(A,B)$ und $g(C,D)$ genau einen Schnittpunkt?
(c) Warum kann M nicht mit A oder B zusammenfallen? (Satz vom Außenwinkel)
(d) Warum liegt M im Inneren der Strecke AB?

30. Gib eine Formel für den Mittelpunkt einer allgemeinen Strecke AB in $\mathbb{R}^2$ an und beweise sie. Bestimme den Mittelpunkt der Strecke AB, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

31. Sei AB eine Strecke, M ihr Mittelpunkt und h die Gerade durch M, die normal auf $g(A,B)$ steht. Zeige

$$h = \{X \in \mathcal{E} : |AX| = |BX|\}.$$

Diese Gerade wird als Streckensymmetrale bezeichnet. [1]

32. Sei g eine Gerade, A ein Punkt, der nicht auf g liegt, und F der Schnittpunkt von g mit dem Lot durch A auf g. Zeige, dass für jeden, von F verschiedenen Punkt X auf g die Ungleichung

$$|AX| > |AF|$$

gilt. Drücke diesen Sachverhalt möglichst prägnant mit einem deutschen Satz aus. Formuliere eine (schwächere) Aussage, die auch für Punkte $A \in g$ richtig bleibt.

33. Sei $\angle(h_1, h_2)$ ein Winkel und s die Winkelsymmetrale, d.h. der (eindeutige) vom Scheitel ausgehende Halbstrahl im Inneren des Winkels, sodass $\angle(h_1, s) \equiv \angle(h_2, s)$. Bezeichne W das Innere des Winkels. Für jeden Punkt $A \in W$ betrachten wir das Lot durch A auf die Trägergerade von h_1, bezeichnen den Schnittpunkt mit der Trägergeraden (Fußpunkt) mit F_1 und setzen $d_1(A) := |AF_1|$. Analog, betrachten wir das Lot durch A auf die Trägergerade von h_2, bezeichnen den Fußpunkt mit F_2 und setzen $d_2(A) := |AF_2|$. Fertige eine Skizze an und zeige

$$s = \{A \in W : d_1(A) = d_2(A)\}.$$

34. In Euklids Buch I§7 findet sich folgende Aussage: *Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.* Erkläre, was damit gemeint ist und beweise es.

35. Das Skalarprodukt von $v \in \mathbb{R}^2$ und $w \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$\langle v, w\rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2, \qquad \text{definiert, wobei } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass für beliebige $v, \tilde{v}, w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

[1] Für degenerierte Strecken sei $|AA| := 0 \in \mathcal{K}$, auch in den folgenden Beispielen.

(b) $\langle v+\tilde{v}, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle \tilde{v}, w\rangle$ sowie $\langle v, w+\tilde{w}\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, \tilde{w}\rangle$
(c) $\langle tv, w\rangle = t\langle v, w\rangle = \langle v, tw\rangle$
(d) $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$ (das Quadrat der Norm aus Beispiel 25)

36. Zeige, dass die Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$$

für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeige auch, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn v ein Vielfaches von w, oder w ein Vielfaches von v ist. Hinweis: Wie in der Anleitung zu Beispiel 25(c).

37. Wir betrachten wieder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ mit den Geraden aus Beispiel 13, der Anordnungsrelation aus Beispiel 15, und der Kongruenzrelation aus Beispiel 26. Jedem Winkel $\angle(h, k)$ ordnen wir die Zahl

$$C(h, k) := \frac{\langle A - O, B - O\rangle}{\|A - O\|\|B - O\|}$$

zu, wobei O den Scheitel bezeichnet, A ein Punkt auf h, und B ein Punkt auf k ist. Zwei Winkel $\angle(h_1, k_1)$ und $\angle(h_2, k_2)$ in $\mathbb{R}^2$ werden kongruent genannt, wenn $C(h_1, k_1) = C(h_2, k_2)$.

a) Verwende die Rechenregeln in Aufgabe 35 um zu zeige, dass $C(h, k)$ nicht von der Wahl der Punkte A und B auf den Schenkeln abhängt. D.h. zeige, dass wir für jeden anderen Punkt A' auf h und jeden anderen Punkt B' auf k dieselbe Zahl erhalten.

b) Zeige, dass diese Relation dem Kongruenzaxiom K4 genügt.

c) Zeige, dass diese Relation das Kongruenzaxiom K6 erfüllt.[2] Hinweis: Betrachte ein Dreieck ABC in $\mathbb{R}^2$, setze $v := B - A$, $w := C - A$, und zeige $C - B = w - v$, $A - B = -v$, sowie

$$|w - v|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v, w\rangle$$

und

$$\langle w - v, -v\rangle = |v|^2 - \langle w, v\rangle.$$

38. Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^2$ mit den Anordnungs und Kongruenzaxiomen wie zuvor.

a) Zeige, dass $\angle ABC$ genau dann ein rechter Winkel ist, wenn $\langle A - B, C - B\rangle = 0$ gilt.

b) Sei P ein Punkt und $g = \{A + tv : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass

$$F = A + \frac{\langle P - A, v\rangle}{|v|^2} v$$

der Fußpunkt des Lots auf g durch A ist. Es genügt $\langle P - F, v\rangle = 0$ zu überprüfen. Warum?

In den nächsten Beispielen verwenden wir folgende Definition: Vier Punkte $ABCD$ werden als *konvexes Viereck* bezeichnet, wenn sich die Strecken (AC) und (BD) in genau einem Punkt schneiden.

39. Zeige, dass sich die Diagonalen AC und BD eines Parallelogramms $ABCD$ in ihren Mittelpunkten schneiden. Insbesondere sind Parallelogramme konvexe Vierecke.

40. Zeige, dass ein konvexe Viereck $ABCD$, in dem sich die Diagonalen AC und BD in ihren Mittelpunkten schneiden, ein Parallelogramm ist.

[2] Sie genügt auch Axiom K5, dies soll hier aber nicht verifiziert werden.

41. Zeige, dass ein konvexe Viereck $ABCD$, in dem $|AB| = |CD|$ und $AB \| CD$ gilt, ein Parallelogramm ist.

42. Zeige, dass ein konvexe Viereck $ABCD$, in dem $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |AD|$ gilt, ein Parallelogramm ist.

43. Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ mit den Geraden aus Beispiel 13 dem Parallelenaxiom P genügt.

44. Sei ABC ein Dreieck und X im Inneren der Seite AB. Zeige

$$|CX| < \max\{|CA|, |CB|\}.$$

Leite daraus folgende Tatsachen ab:

a) Ist AB eine Sehne eines Kreises, dann liegt (AB) zur Gänze im Inneren des Kreises.

b) Das Innere eines Kreises ist konvex.

Hinweis: Nimm indirekt $|CX| \geq |CA|$ und $|CX| \geq |CB|$ an und vergleiche die Winkel $\angle CXA$ und $\angle CAX$ sowie die Winkel $\angle CXB$ und $\angle CBX$.

45. Sei ABC ein Dreieck. Zeige, dass der Fußpunkt der Höhe durch C genau dann im Inneren der Strecke AB liegt, wenn $\angle CAB$ und $\angle ABC$ beide spitze Winkel sind.

46. Sei AB eine Strecke und C, C' zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$. Zeige, dass das die vier Punkte A, B, C und C' genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AC'B = 2R.$$

Anleitung: Die eine Implikation folgt leicht aus dem Tangentenwinkelsatz. Für die andere Implikation betrachte den Kreis Γ durch A, B und C, sowie den Kreis Γ' durch A, B und C'. Aus dem Tangentenwinkelsatz folgt, dass sich die Tangentenwinkel für C und C' bei A zu $2R$ addieren. Schließe daraus, dass die Tangenten an Γ und Γ' bei A zusammenfallen, und daher die Mittelpunkte von Γ und Γ' beide auf der Geraden durch A liegen, die normal auf diese Tangente(n) steht. Erkläre, wie daraus $\Gamma = \Gamma'$ folgt.

47. Zeige, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Dreiecke ist.

In den folgenden beiden Beispielen sei ABC ein Dreieck mit Seiten $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Ebenso sei $A'B'C'$ ein Dreieck mit Seiten a', b', c' und Winkeln α', β', γ'.

48. Beweise den S:S:S-Satz: Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die $a/a' = b/b' = c/c'$ gilt, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$. Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S-Satzes lässt sich dies mit dem W:W:W-Satz auf den SSS-Satz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

49. Beweise den S:S:W-Satz: Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die $\beta = \beta'$ und $b/b' = c/c'$ gelten, und ist darüber hinaus auch $b \geq c$, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ und $a/a' = b/b' = c/c'$. Hinweis: Analog zum Beweis des S:W:S-Satzes lässt sich dies mit dem W:W:W-Satz auf den SSW-Satz zurückführen. Betrachte dazu ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit $c'' = c'$, $\alpha'' = \alpha$ und $\beta'' = \beta$.

50. (Umkehrung des Strahlensatzes) Sei $\angle(h, h')$ ein Winkel mit Scheitel O. Weiters seien $A, B \in h$ und $A', B' \in h'$. Zeige, dass aus $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$ nicht die Parallelität der Geraden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ folgt. Gib ein Gegenbeispiel (Skizze) an.

51. (Strahlensatz) Seien $\angle(h, h')$ und $\angle(h', h'')$ zwei Winkel. Weiters sei l eine Gerade, die die drei Halbstrahlen h, h' und h'' in drei Punkten A, A' und A'' schneidet. Schließlich sei k eine zu l parallele Gerade, die die drei Halbstrahlen in Punkten B, B' und B'' trifft. Zeige, dass in dieser Situation $\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|A'A''|}{|B'B''|}$ gilt.

52. Seien AB und $A'B'$ zwei Sehnen eines Kreises, die sich in einem inneren Punkt S des Kreises schneiden. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz um zu zeigen, dass die Dreiecke ASB' und $A'SB$ ähnlich sind.

53. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und bezeichne S den Schnittpunkt der beiden Diagonalen (AC) und (BD). Zeige, dass die vier Eckpunkte A, B, C und D genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$$

gilt. Hinweis: Die eine Implikation folgt aus dem vorangehenden Beispiel. Für die andere Implikation verwende den S:W:S-Satz um zu zeigen, dass die Dreiecke ASD und BSD ähnlich sind. Wende dann die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes an.

54. Sei AB eine Sehne eines Kreises und T ein weiterer Punkt des Kreises, sodass die Gerade $g(A, B)$ die Tangente bei T in einem Punkt S im Äußeren des Kreises treffen. Zeige

$$|SA| \cdot |SB| = |ST|^2.$$

Hinweis: Erkläre, warum wir o.B.d.A. $A * B * S$ annehmen dürfen, und warum T nicht auf $g(A, B)$ liegen kann. Verwende dann den Tangentenwinkelsatz, um zu zeigen, dass die Dreiecke STB und SAT ähnlich sind.

55. Seien $\angle(h, h')$ ein Winkel mit Scheitel S, $A \neq B$ zwei Punkte auf h, und $A' \neq B'$ zwei Punkte auf h'. Zeige, dass $ABA'B'$ genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'|.$$

Hinweis: Zeige, dass diese Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn die beiden Dreiecke $AB'S$ und $A'BS$ ähnlich sind. Dies ist wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\angle AB'S \equiv \angle A'BS$ gilt. Wende den Peripheriewinkelsatz bzw. Beispiel 46 an.

56. Sei ABC ein Dreieck. Bezeichne H_a den Fußpunkt der Höhe durch A, H_b den Fußpunkt der Höhe durch B, und H_c den Fußpunkt der Höhe durch C. Zeige

$$|AH| \cdot |HH_a| = |BH| \cdot |HH_b| = |CH| \cdot |HH_c|.$$

Hinweis: Zeige, dass die Dreiecke AHH_b und BHH_a ähnlich sind.

57 (Höhenschnittpunkt). Wir wollen mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes erneut überprüfen, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks schneiden. Sei dazu ABC ein Dreieck, H_b der Fußpunkt der Höhe durch B, H_c der Fußpunkt der Höhe durch C, und H der Schnittpunkt dieser beiden Höhen. Wir nehmen an, dass H auf keiner der Trägergeraden der drei Seiten liegt. Weiters existiere ein Schnittpunkt X von $g(A, H)$ und $g(B, C)$. Zeige, dass $\angle AXB$ ein rechter Winkel ist und schließe daraus, dass $g(A, H)$ mit der Höhe durch A übereinstimmt. Anleitung: Verwende den Peripheriewinkelsatz bzw. Beispiel 46 und zeige der Reihe nach:

(a) A, H_b, H und H_c liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle H_bAH \equiv \angle H_bH_cH$.

(b) B, C, H_b und H_c liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle H_bH_cC \equiv \angle H_bBC$.
(c) A, B, X und H_b liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle AH_bB \equiv \angle AXB$.

58 (Höhenschnittpunkt). Sei ABC ein Dreieck. Wir nehmen an, dass die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c paarweise verschieden sind. Zeige, dass die Höhen des Dreiecks ABC mit den Winkelsymmetralen des Dreiecks $H_aH_bH_c$ übereinstimmen. Da sich die Winkelsymmetralen in einem Punkt schneiden, liefert dies einen weiteren Beweis dafür, dass sich die Höhen in einem Punkt schneiden. Anleitung: Verwende den Peripheriewinkelsatz bzw. Beispiel 46 und zeige:

(a) A, B, H_a und H_b liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle H_aAH_b \equiv \angle H_bBH_a$.
(b) A, C, H_a und H_c liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle H_aAC \equiv \angle CH_cH_a$.
(c) B, C, H_b und H_c liegen auf einem Kreis und es gilt $\angle H_bBC \equiv \angle CH_cH_b$.

59 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei AB Durchmesser eines Kreises Γ. Weiters sei C ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

(a) Liegt C im Inneren von Γ, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt C auf Γ, dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
(c) Liegt C im Äußeren von Γ, dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne C' den Schnittpunkt von Γ mit dem Radius durch C. Verwende den Satz von Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle AC'B$ zu vergleichen.

60 (Umkehrung des Satzes von Thales). Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Zeige:

(a) Liegen M und C auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt M auf $g(A, B)$, dann ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel.
(c) Liegen M und C auf derselben Seite von $g(A, B)$, dann ist $\angle ABC$ spitz.

Hinweis: Verwende den Tangentenwinkelsatz.

61 (Tangenten an Kreise). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M, und A ein Punkt im Äußeren von Γ.

(a) Erkläre, warum die Strecke (MA) den Kreis Γ in einem Punkt B schneidet.
(b) Sei t die Tangente an Γ im Punkt B, und bezeichne Γ' der Kreis mit Mittelpunkt M durch A. Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
(c) Erkläre, warum (MC) den Kreis Γ in einem Punkt D schneidet.
(d) Zeige, dass die Gerade durch A und D tangential an Γ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an Γ durch A?

62. Seien Γ und Γ' zwei Kreise, die sich in genau einem Punkt schneiden (berühren). Zeige, dass dieser Schnittpunkt auf der Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte liegt. Zeige weiters, dass die beiden Kreise dort eine gemeinsame Tangente haben, nämlich die Potenzgerade der beiden Kreise.

63. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \| g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

64 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$. Schließlich sei $g(A,B) \| g(A',B')$ und $g(B,C) \| g(B',C')$. Zeige, dass dann auch $g(C,A)$ und $g(C',A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

65 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$. Schließlich seien $g(A,B') \| g(B,A')$ und $g(B,C') \| g(C,B')$. Zeige, dass dann auch $g(A,C')$ und $g(C,A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz, sowie $\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} = -\frac{AO}{OC}$.

66. Ersetze im Satz von Menelaos die Bedingung $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1$ durch

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} = 1.$$

Welche der beiden Implikationen des Satzes bleibt richtig und warum? Erkläre, warum die andere Implikation nicht mehr stimmt und gib ein Gegenbeispiel an. Führe eine analoge Diskussion mit der Aussage von Korollar 2.1.14 durch.

67 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a, H_b und H_c. Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

68. a) Drei Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.

b) Zeige, dass für drei verschiedene Punkte A, B, C einer Geraden stets $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} = \frac{BA}{AC}$ gilt.

69 (Harmonisch konjugierter Punkt). Seien A und C zwei verschiedene Punkte und $g := g(A,C)$. Wir ordnen jedem Punkt B auf g den eindeutigen Punkt D auf g zu, für den $\frac{AD}{DC} = -\frac{AB}{BC}$ gilt. Zeige, dass dies eine Bijektion

$$\phi\colon g \setminus \{C, M\} \to g \setminus \{C, M\}, \qquad \phi(B) := D,$$

definiert, wobei M den Mittelpunkt der Strecke AC bezeichnet. Warum müssen wir den Mittelpunkt ausnehmen? Bestimme $\phi(A)$. Zeige $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$, d.h. $\phi(\phi(B)) = B$ für jeden Punkt $B \in g \setminus \{C, M\}$.

70 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

71. Sei AC eine Strecke. Sei D ein Punkt, sodass $\angle ACD$ ein rechter Winkel ist und $2|CD| = |AC|$. Sei E im Inneren der Strecke AD so, dass $|DE| = |DC|$. Sei B im Inneren der Strecke AC so, dass $|AB| = |AE|$. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ gilt.

72 (Odoms Konstruktion des golgenden Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A,B)$

mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A*B*C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende Beispiel 52.

73 (Goldenes Dreieck). Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, $|AB| = |AC|$, und bezeichne X den Schnittpunkt der Winkelsymmetrale bei C mit der Seite AB. Das Dreieck ABC wird ein goldenes Dreieck genannt, wenn ABC und CXB ähnliche Dreiecke sind. Zeige, dass in diesem Fall X die Seite AB im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|AX|}$ gilt. Zeige auch, dass $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$ gilt.

74. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Weiters seien A, B, C Punkte in $\mathcal{E}$ mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass C auf $g := g(A, B)$ liegt und bestimme die Teilverhältnisse $\frac{CA}{AB}$ und $\frac{AC}{CB}$.
(b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D auf g, für den $\frac{DA}{AB} = -2$ gilt.
(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes E auf g, für den $\frac{AE}{EB} = 3$ gilt.
(d) Fertige eine Skizze der Geraden g an, in der die Punkte A, B, C, D, E mit korrekten Teilverhältnissen eingezeichnet sind.

75. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Betrachte Punkte A, B, C, D mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(D) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g := g(A, B)$ und $h := g(C, D)$ auf drei verschiedene Arten:

(i) Beschreibe beide Geraden durch Parameterdarstellungen und löse das Gleichungssystem für die beiden Parameter.
(ii) Beschreibe beide Geraden durch Gleichungen und löse das Gleichungssystem für die Komponenten des Schnittpunkts.
(iii) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung, die andere mit einer Parameterdarstellung und löse die lineare Gleichung für den Parameter, die duch Einsetzen entsteht.

76. Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Drei der Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$ haben Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinaten des vierten Eckpunkts D, sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts E.

77 (Schwerpunkt). Zeige erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden. Betrachte dazu ein beliebiges affines Koordinatensystem mit Koordinatenabbildung $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$, beschreibe die drei Schwerlinien in Koordinaten durch Parameterdarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden. Schließe daraus auch

$$\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2,$$

wobei M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten bezeichnen. Zeige auch, dass in jedem affinen Koordinatensystem die Koordinaten des Schwerpunkts S durch

$$\begin{aligned} x(S) &= \tfrac{1}{3}x(A) + \tfrac{1}{3}x(B) + \tfrac{1}{3}x(C) \\ &= x(A) + \tfrac{1}{3}\big(x(B) - x(A)\big) + \tfrac{1}{3}\big(x(C) - x(A)\big) \end{aligned}$$

gegeben sind, wobei A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks bezeichnen.

78 (Satz von Menelaos). Beweise den Satz von Menelaos mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems. Wähle das Koordinatensystem so, dass die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, vgl. Beweis des Satzes von Ceva mit Koordinaten.

79 (Strahlensatz). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei parallele Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem mit Ursprung O so, dass die Gerade g in Koordinaten durch die Gleichung $x_2 = 1$ gegeben ist.

80 (Doppelverhältnis). Seien a, b, c, d vier verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien g und g' zwei (nicht notwendigerweise parallele) Geraden, die nicht durch O gehen und jede der Geraden a, b, c, d in genau einem Punkt treffen. Die Schnittpunkte mit g heißen A, B, C, D und die Schnittpunkte mit g' heißen A', B', C', D'. Zeige mit Hilfe eines affinen Koordinatensystems, dass in dieser Situation

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'}$$

gilt. Wähle das Koordinatensystem so, dass

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Erkläre warum dann

$$x(C) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(A') = a' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B') = b' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C') = c' \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},$$

für gewisse $c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Drücke c' durch c, a', b' aus und zeige

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{AC}{CB} = \frac{a'}{b'}.$$

Wie folgt daraus die gewünschte Gleichung?

81 (Dreiecksungleichung). Zeige erneut, dass in einem Dreieck ABC mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ die Dreiecksungleichung $a < b + c$ gilt. Verwende diesmal ein kartesisches Koordinatensystem, um die Seitenlängen durch die Norm auszudrücken und wende die Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für Vektoren in $v, w \in \mathbb{R}^2$ an.

82 (Umkreismittelpunkt). Zeige erneut, dass sich die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Verwende dazu ein kartesisches Koordinatensystem, beschreibe die Streckensymmetralen durch Normalvektordarstellungen und zeige (algebraisch), dass sie sich in einem Punkt schneiden.

83 (Längen in affinen Koordinatensystemen). Sei $x\colon g \to \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems (O, X) auf einer Geraden g. Zeige, dass der Abstand zweier Punkte A und B auf g durch

$$|AB| = |OX| \cdot \|x(B) - x(A)\|$$

gegeben ist. Hinweis: Betrachte ein kartesisches Koordinatensystem (O', X') auf g.

84 (Längen in affinen Koordinatensystemen). Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems (O, X_1, X_2) und

$$g_{11} := |OX_1|^2, \qquad g_{12} := |OX_1| \cdot |OX_2| \cdot \cos \sphericalangle X_1OX_2, \qquad g_{22} := |OX_2|^2.$$

Zeige, dass der Abstand zweier Punkte A und B durch

$$|AB| = \sqrt{g_{11}v_1^2 + 2g_{12}v_1v_2 + g_{22}v_2^2}$$

gegeben ist, wobei $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v := x(B) - x(A)$. Hinweis: Gehe analog zum Beweis der Abstandsformel in kartesischen Koordinaten vor und verwende die vorangehende Aufgabe.

85 (Tangens und Kotangens). Tangens und Kotangens werden durch

$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{und} \qquad \cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

definiert. Erkläre, welche Winkel von der Definitionsmenge ausgenommen werden müssen. Leite aus den in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften von Sinus und Kosinus her:

(a) $\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$ und $\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha$.
(b) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ und $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$.
(c) $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$ und $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.
(d) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ und $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$.
(e) In einem rechtwinkeligen Dreieck gilt $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ und $\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$.
(f) Für $-90° < \alpha < \beta < 90°$ gilt $\tan\alpha < \tan\beta$.
(g) Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existiert ein Winkel $-90° < \alpha < 90°$, sodass $\tan\alpha = t$.

Nach (f) und (g) ist die Einschränkung $\tan\colon (-90°, 90°) \to \mathbb{R}$ bijektiv, ihre Umkehrfunktion wird (Hauptzweig des) Arkustangens genannt und mit $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-90°, 90°)$ bezeichnet.

(h) Formuliere zu (f) und (g) analoge Eigenschaften des Kotangens und gib Definitions- sowie Wertebereich (des Hauptzweigs) des Arkuskotangens an.
(i) Zeige $\operatorname{arccot} x = 90° - \arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

86. Verifiziere folgende speziellen Werte der Winkelfunktionen:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

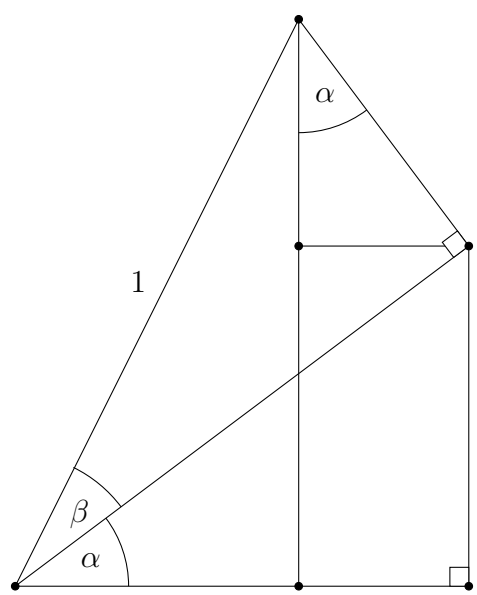
87. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Erkläre, wie mit Hilfe trigonometrischer Formeln aus drei der Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die restlichen berechnet werden können. Diskutiere dabei jeden der Fälle: SWS, WSW, SWW, SSS, SSW. In einem dieser Fälle ist das Dreieck i.A. nicht eindeutig bestimmt, wie spiegelt sich dies bei der Berechnung mit trigonometrischen Formeln wider? Im SSS-Fall dürfen die Seitenlängen nicht beliebig sein, wo geht dies bei der Berechnung der anderen Größen ein? Was kann im W:W:W Fall über die Seitenlängen ausgesagt (berechnet) werden?

88. Beweise mit Hilfe der Abbildung die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \tag{2}$$

für den Fall, dass die Winkel $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ alle zwischen $0°$ und $90°$ liegen. Hinweis: Drücke die



Längen der Strecken zwischen markierten Punkten mittels Winkelfunktionen aus.

89 (Halbwinkelformeln). Zeige

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \text{für } 0 \le \alpha \le 360^\circ,$$

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \text{für } -180^\circ \le \alpha \le 180^\circ,$$

$$\tan(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \text{für } 0 \le \alpha < 180^\circ,$$

$$\cot(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad \text{für } 0 < \alpha \le 180^\circ,$$

und verwende dies um folgende Werte der Winkelfunktionen zu überprüfen:

$$\sin 15^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \qquad \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3},$$

$$\cos 15^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}), \qquad \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}.$$

90. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Winkel α zeige:

$$\cos\big((n+1)\alpha\big) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big).$$

91. Zeige (etwa mit der Rekursionsformel in der vorangehenden Aufgabe)

$$\cos(5\alpha) = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

und schließe daraus

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Erkläre, wie sich damit die Funktionswerte in folgender Tabelle überprüfen lassen und führe dies für drei Eintragungen in verschiedenen Zeilen aus.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
36°	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
54°	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
72°	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

[3]

92 (Inkreisradius). In der Vorlesung wurde der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC durch

$$F(ABC) := \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ca\sin\beta$$

[3] Aus $0 = \cos(5\cdot 18^\circ)$ folgt durch Lösen die Gleichung $0 = 16z^4 - 20z^2 + 5$

$$\cos 18^\circ = \pm\frac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Da $\sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ < \cos 18^\circ$ muss $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ gelten.

definiert, wobei wie üblich $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ die Seitenlängen und $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ die Winkel bezeichnen. Zeige, dass der Flächeninhalt folgende beiden Eigenschaften besitzt:

(a) Ist X ein Punkt im Inneren der Seite AB dann gilt $F(ABC) = F(AXC) + F(BXC)$.
(b) Ist I im Inneren des Dreiecks ABC dann gilt $F(ABC) = F(ABI) + F(BCI) + F(CAI)$.

Verwende dies um zu zeigen, dass der Inkreisradius r eines Dreiecks mit Flächeninhalt A und Seitenlängen a, b, c durch

$$r = \frac{2A}{a+b+c} = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

berechnet werden kann, wobei $s = (a+b+c)/2$ den halben Umfang bezeichnet. Hinweis: (b) lässt sich durch mehrmaliges Anwenden von (a) herleiten.

93 (Umkreisradius). Zeige, dass der Umkreisradius R eines Dreiecks mit Seitenlängen a, b, c, gegenüberliegenden Winkel α, β, γ und Flächeninhalt A durch folgende Ausdrücke gegeben ist:

$$2R = \frac{abc}{2A} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Hinweis: Verwende den Peripheriewinkelsatz.

94. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems haben die Eckpunkte eines Dreiecks ABC die Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
(b) Gib die Koordinaten eines Punkts D an, sodass $F(ABD) = 17$.

95. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Weiters bezeichne I den Inkreismittelpunkt und W_c den Schnittpunkt der Winkelsymmetrale bei C mit der Trägergeraden der Seite AB. Zeige

$$\frac{AW_c}{W_cB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \text{und} \qquad \frac{W_cI}{IC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{c}{a+b}.$$

Hinweis: Um die zweite Gleichung herzuleiten, wende die erste auf die Winkelsymmetrale bei A des Dreiecks AW_cC an und verwende (beweise) die Formel

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta);$$

oder wende die erste Gleichung auf die Winkelsymmetralen bei A und B der Dreiecke AW_cC und BW_cC an und kombiniere die beiden resultierenden Ausdrücke für $\frac{W_cI}{IC}$ geschickt.

Erkläre auch, wie sich daraus folgende Formeln herleiten lassen:

$$-\frac{W_cA}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{b}{a+b}, \qquad -\frac{W_cB}{BA} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{a}{a+b},$$

$$-\frac{IW_c}{W_cC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{c}{a+b+c}, \quad -\frac{IC}{CW_c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

96. Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Weiters sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Für die Koordinaten des Inkreismittelpunkts I zeige

$$x(I) = p_A \cdot x(A) + p_B \cdot x(B) + p_C \cdot x(C),$$

wobei

$$\begin{aligned} p_A &:= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{a}{a+b+c}, \\ p_B &:= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{b}{a+b+c}, \\ p_C &:= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{c}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Berechne damit die Koordinaten des Inkreismittelpunktes eines Dreiecks mit Eckpunkten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ist W ein Punkt auf der Geraden $g(A,B)$ dann gilt $x(W) = -\frac{WB}{BA} \cdot x(A) - \frac{WA}{AB} \cdot x(B)$. Zeige, dass dies tatsächlich der Fall ist und verwende die Formeln im vorangehenden Beispiel.

97 (Matrizenprodukt). Berechne alle Matrizenprodukte der Form XY, sofern sie definiert sind, wobei X und Y zwei der folgenden Matrizen bezeichnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. berechne alle Produkte der Form $A^2, AB, AC, \ldots, BA, B^2, BC, \ldots, FD, FE, F^2$, sofern diese definiert sind.

98. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und bestimme reelle Zahlen α, β, γ, die nicht alle gleich Null sind und für die $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_2 = 0$ gilt.

99 (Kommutator). Unter dem Kommutator zweier quadratischer Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verstehen wir die quadratische Matrix $[A,B] := AB - BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, dass für den Kommutator folgende Rechenregeln gelten, wobei $A, A', B, B', C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $[A + A', B] = [A,B] + [A',B]$, $[\lambda A, B] = \lambda[A,B]$ (Linearität im ersten Argument)
(b) $[A, B + B'] = [A,B] + [A,B']$, $[A, \lambda B] = \lambda[A,B]$ (Linearität im zweiten Argument)
(c) $[A,B] = -[B,A]$ (Schiefsymmetrie)
(d) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$. (Jacobi Identität)

Für die Matrizen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeige weiters $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$.

100 (Spur). Unter der Spur einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verstehen wir die Summe ihrer Diagonaleinträge, d.h. die Zahl $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = A_{11} + \cdots + A_{nn}$. Zeige, dass die Spur folgende Eigenschaften hat:

(a) $\operatorname{tr}(A+A') = \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(A')$, $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$ für alle $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. (Linearität)

(b) $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Gib eine (2×2)-Matrix mit Determinante 20 und Spur 9 an.

101. Verifiziere durch eine direkte Rechnung, dass

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt. Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zeige weiters

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right)$$

wobei $\operatorname{tr}(A)$ die Spur aus dem vorangehenden Beispiel bezeichnet.

102. Zeige, dass die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 2x+5y \end{pmatrix}$, invertierbar ist und gib die Umkehrabbildung an. Gib eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die nicht invertierbar ist.

103. Gib für jedes $k = 3,4,5,6$ ein System von 3 homogenen linearen Gleichungen in sechs Variablen an, dessen Lösungsraum k-dimensional ist. Warum sind $k = 0,1,2$ nicht möglich?

104. Bestimme die Ränge folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar.

105. Welche der folgenden Systeme sind linear unabhängig, welche bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, und welche bilden eine Basis? Gib in jedem Fall die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Teilraums an.

(a) $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c) $n = 4$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(d) $n = 5$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\3\\6\\9\\12\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\6\\12\\18\\25\end{pmatrix}$$

106. Für jedes der folgenden beiden Systeme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & +10x_3 & +20x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & -x_2 & -9x_3 & -20x_4 & = & 0 \\ -4x_1 & -x_2 & -6x_3 & -20x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrcl} 5x_1 & -5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & & = & 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +2x_4 & -8x_5 & = & 0 \\ -7x_1 & +9x_2 & +13x_3 & -5x_4 & +20x_5 & = & 0 \end{array}$$

107. Für jedes der folgenden beiden Systeme bestimme die Dimension des Lösungsraums und gib eine Basis, ein minimales Gleichungssystem sowie eine Parameterdarstellung des Lösungsraums an.

(a)

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +5x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & +10x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & +9x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -3x_5 & +8x_6 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & -14x_2 & +12x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -9x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +24x_2 & -21x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & -19x_2 & +16x_3 & = & 0 \end{array}$$

108. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\6\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\\6\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\\8\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}6\\11\\0\\24\end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix}5\\6\\-4\\12\end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden und gib vier dieser Vektoren v_i an, die eine Basis bilden.

109. Bestimme alle Lösungen folgender Gleichungssysteme:
(a)

$$\begin{array}{rrrcr} -x & -2y & +5z & = & -2 \\ 2x & +6y & -16z & = & 2 \\ 3x & +9y & -23z & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & 8x_4 & = & 16 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -3x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & -6x_2 & -7x_3 & -2x_4 & = & -4 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & & +4x_3 & +15x_4 & = & 34 \end{array}$$

110. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

111. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & +z & = & 1 \\ x & -y & +2z & = & 0 \\ 4x & +2y & +3z & = & 1 \end{array}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

112. Sei A eine invertierbare (3×3)-Matrix mit Eintragungen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Zeige mit Hilfe der Cramer'schen Regel, dass die Lösung des Systems $Ax = e_1$ durch

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Gib analoge Formeln für die Lösungen von $Ax = e_2$ und $Ax = e_3$ an. Verwende dies um folgende explizite Formel für die Innverse einer (3×3)-Matrix herzuleiten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

113. Verwende das Eliminationsverfahren, um die Inversen folgender Matrizen zu bestimmen, falls diese invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inversen auch mit Hilfe der expliziten Formel für (2×2) und (3×3)-Matrizen und vergleiche den Rechenaufwand.

114. Bestimme die Inversen folgender Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

115. Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x+y-z-w \\ x-y+z-w \\ x-y-z+w \end{pmatrix},$$

invertierbar ist und bestimme die Umkehrabbildung.