Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2018

VO 250039 (Stefan Haller)

1. Termin am 21. Juni 2018

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

1. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einem rechten Winkel? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
(b) Formuliere den Satz von Thales. **(2P)**
(c) Beweise den Satz von Thales. **(6P)**

2. Aufgabe (10P)

Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M.

(a) Was verstehen wir unter einer Tangente an Γ? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Durch welche Punkte der Ebene läuft wenigstens eine Tangente an Γ? **(2P)**

(c) Sei A ein Punkt auf Γ und sei g eine Tangente an Γ durch A. Zeige, dass g normal auf die Gerade durch M und A steht. **(6P)**

3. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einer Höhe eines Dreiecks? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Zeige, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(6P)**

(c) Gibt es stumpfwinkelige Dreiecke, deren Höhenschnittpunkt im Inneren des Dreiecks liegt? **(2P)**

4. Aufgabe (10P)

Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems der Ebene. Weiters seien P, Q, R drei Punkte der Ebene mit Koordinaten

$$x(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad x(Q) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x(R) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass P, Q und R auf einer Gerade liegen. **(2P)**

(b) Berechne das Teilverhältnis $\frac{PQ}{QR}$. **(2P)**

(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes S auf der Geraden durch P und R, für den $\frac{PS}{SR} = -4$ gilt. **(3P)**

(d) Zeichne auf untenstehender Linie fünf Punkte A, B, X, Y, Z so ein, dass die Teilverhältnisse (annähernd) folgende Werte annehmen: $\frac{AX}{XB} = 1$, $\frac{AY}{YB} = -2$ und $\frac{AZ}{ZB} = -\frac{1}{3}$. **(3P)**

---

5. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^2$? **(1P)**
(b) Was verstehen wir unter der Norm eines Vektors in $\mathbb{R}^2$? **(1P)**
(c) Formuliere die Cauchy–Schwartz Ungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$. **(2P)**
(d) Beweise die Cauchy–Schwartz Ungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$. **(6P)**

6. Aufgabe (10P)

(a) Warum kann es keinen Winkel α mit $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ geben? **(2P)**
(b) Formuliere den Kosinussatz. **(2P)**
(c) Beweise den Kosinussatz. **(6P)**

7. Aufgabe (10P)

(a) Wann wird ein System von Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig genannt? **(2P)**

(b) Wann wird ein System von Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig genannt? **(2P)**

(c) Gib ein System von drei linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$ an. **(2P)**

(d) Ist das System $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^5$? **(4P)**

8. Aufgabe (10P)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcl} -3x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 & -3x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & & -2x_4 & +4x_5 & = & 0 \end{array}$$

(a) Bestimme $\dim(L)$. **(2P)**

(b) Gib eine Basis von L an. **(6P)**

(c) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(1P)**

(d) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
gesamt	

Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80