

Prüfung zur Vorlesung
Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt
Sommersemester 2018
VO 250039 (Stefan Haller)

5. Termin am 22. März 2019, 9:45 Uhr (HS 14)

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt

☐ 2. Antritt

☐ 3. Antritt

☐ 4. Antritt

1. Aufgabe (10P)

- (a) Formuliere den Seiten-Seiten-Seiten (SSS) Kongruenzsatz. **(2P)**
- (b) Beweise den Seiten-Seiten-Seiten Kongruenzsatz. **(8P)**

2. Aufgabe (10P)

- (a) Wann werden zwei Geraden parallel genannt? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
- (b) Formuliere das Parallelenaxiom. **(2P)**
- (c) Zeige, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck $2R$ (zwei Rechte, 180°) beträgt. **(6P)**

3. Aufgabe (10P)

- (a) Formuliere (**1P**) und beweise (**3P**) die Dreiecksungleichung für Dreiecke in der Ebene.
- (b) Formuliere (**1P**) und beweise (**3P**) die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
- (c) Erkläre, wie die beiden Dreiecksungleichungen in (a) und (b) zusammenhängen. (**2P**)

4. Aufgabe (10P)

- (a) Gib eine Definition der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus. **(2P)**
- (b) Formuliere den Kosinussatz. **(2P)**
- (c) Beweise den Kosinussatz. **(6P)**

5. Aufgabe (10P)

Bezeichne $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(v) := Av$ die lineare Abbildung zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne A^2 . **(2P)**
- (b) Bestimme reelle Zahlen $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $c \neq 0$, sodass

$$aI + bA + cA^2 = 0.$$

Dabei bezeichnet I die 2×2 Einheitsmatrix. **(2P)**

- (c) Bestimme $\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **(2P)**
- (d) Erkläre, warum φ invertierbar ist. **(2P)**
- (e) Bestimme $\varphi^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. **(2P)**

6. Aufgabe (10P)

- (a) Was verstehen wir unter dem Rang einer Matrix? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
- (b) Warum kann es keine 5×7 Matrix mit Rang 6 geben? **(1P)**
- (c) Bestimme den Rang folgender Matrix **(3P)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

- (d) Wann wird ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig genannt? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
- (e) Sind die Spalten von A linear unabhängig? **(1P)**
- (f) Ist A invertierbar? **(1P)**

7. Aufgabe (10P)

- (a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
- (b) Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

besteht. **(6P)**

- (c) Gib zwei verschiedene (2×2) -Matrizen an, die beide die Eigenwerte 5 und 6 haben. **(2P)**

8. Aufgabe (10P)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & -x_5 & = & -5 \\ -x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & & = & -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & -2x_4 & & = & -2 \end{array}$$

- (a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**
- (b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**
- (c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assoziierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**
- (d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Variablen x, y, z an, dessen Lösungsraum nur aus dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ besteht. **(2P)**

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
gesamt	

Note:	5	4	3	2	1
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

