Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2018

VO 250039 (Stefan Haller)

2. Termin am 28. September 2018

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

1. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einem Winkel? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ zwei Kongruenzklassen von Winkeln. Wie und unter welchen Voraussetzungen ist die Summe $\alpha + \beta \in \mathcal{W}$ erklärt? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(c) Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ zwei Kongruenzklassen von Winkeln. Wie ist die Ordnungsrelation $\alpha < \beta$ erklärt? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(d) Formuliere den Satz vom Außenwinkel. **(2P)**

(e) Beweise den Satz vom Außenwinkel. **(5P)**

2. Aufgabe (10P)

Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Inverse der Matrix A. **(4P)**

(b) Bestimme eine Matrix X, für die $AX = B$ gilt. **(2P)**

(c) Gib eine quadratische Matrix $C \neq 0$ an, für die $C^2 = 0$ gilt. **(2P)**

(d) Gibt es (2×2)-Matrizen U und V mit $UV \neq VU$, oder gilt stets $UV = VU$? Begründe die Antwort? **(2P)**

3. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter den Schwerlinien eines Dreiecks? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(b) Zeige, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(6P)**

(c) Bezeichne S den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC und M den Mittelpunkt der Seite BC. Gib folgende Teilverhältnisse an: **(3P)**

$$\frac{AS}{SM} = \qquad\qquad \frac{AM}{MS} = \qquad\qquad \frac{SA}{AM} =$$

4. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter dem Normalabstand eines Punktes P von einer Geraden g in der Ebene? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(b) Was verstehen wir unter einem Richtungsvektor einer Geraden in $\mathbb{R}^2$? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(c) Was verstehen wir unter einem Normalvektor einer Geraden in $\mathbb{R}^2$? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(d) Gib eine Formel an, die es erlaubt den Normalabstand eines Punktes P von einer Geraden g mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems zu berechnen. Erkläre alle auftretenden Größen. **(2P)**

(e) Beweise die im vorangehenden Punkt formulierte Abstandsformel. **(5P)**

5. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für jedes $i = 1, \ldots, k$ sei $v_i \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i. Zeige, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind. **(5P)**

(c) Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ besteht. **(2P)**

(d) Gib eine reelle (2×2)-Matrix an, die keinen reellen Eigenwert besitzt. **(1P)**

6. Aufgabe (10P)

(a) Formuliere die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. **(2P)**
(b) Beweise die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. **(6P)**
(c) Drücke $\cos(2\alpha)$ und $\cos(4\alpha)$ durch $\cos(\alpha)$ aus. **(2P)**

7. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(1P)**

(b) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? **(1P)**

(c) Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{17}$ nach $\mathbb{R}^{19}$ hat einen 13-dimensionalen Kern. Gib die Dimension ihres Bildes an. **(1P)**

(d) Gibt es lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^9$ nach $\mathbb{R}^5$ mit 3-dimensionalen Kern? Begründe die Antwort. **(2P)**

(e) Beweise die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. **(5P)**

8. Aufgabe (10P)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^4$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -10 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & -3 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & -12 \\ -3x_1 & +x_2 & +x_3 & -9x_4 & = & 1 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(7P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Variablen x, y, z an, das keine einzige Lösung besitzt. **(1P)**

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
gesamt	

Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80