Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2018

VO 250039 (Stefan Haller)

3. Termin am 29. November 2018

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

1. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einem rechten Winkel? Gib eine präzise Definition. **(1P)**
(b) Formuliere den Satz des Pythagoras. **(2P)**
(c) Beweise den Satz des Pythagoras. **(5P)**
(d) Warum ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks stets länger als jede der beiden Katheten? **(2P)**

2. Aufgabe (10P)

Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems der Ebene und ABC ein Dreieck in $\mathcal{E}$.

(a) Gib eine Formel an, die es erlaubt, den Kosinus des Winkels $\measuredangle BCA$ aus den Koordinaten $x(A)$, $x(B)$ und $x(C)$ zu berechnen. **(2P)**

(b) Beweise die Formel in (a). **(4P)**

(c) Gib eine Formel an, die es erlaubt, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC aus den Koordinaten $x(A)$, $x(B)$ und $x(C)$ zu berechnen. **(2P)**

(d) Bestimme den Winkel $\measuredangle BCA$ sowie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn

$$x(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2P)}$$

3. Aufgabe (10P)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Dreiecke in der Ebene.
(b) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
(c) Erkläre, wie die beiden Dreiecksungleichungen in (a) und (b) zusammenhängen. **(2P)**

4. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einem Kreis? Was verstehen wir unter den inneren Punkten eines Kreises? Gib präzise Definitionen. **(2P)**

(b) Zeige, dass jede Gerade, die einen inneren Punkt eines Kreises enthält, diesen Kreis in genau zwei Punkten schneidet. **(6P)**

(c) Gib hinreichende Bedingungen an, die sicherstellen, dass sich zwei Kreise in genau zwei Punkten schneiden. **(2P)**

5. Aufgabe (10P)

(a) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ drei Matrizen. Unter welchen Voraussetzungen and m, n, r, s, p, q sind die beiden Produkte $A(BC)$ und $(AB)C$ definiert? **(1P)**

(b) Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. **(3P)**

(c) Wann wird eine Matrix invertierbar genannt? **(1P)**

(d) Berechne die Inverse von **(3P)**

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(e) Gib zwei Matrizen E und F an, für die $EF = 0$ und $FE \neq 0$ gilt. **(2P)**

6. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter einem Teilraum von $\mathbb{R}^n$? **(2P)**

(b) Zeige, dass jeder Teilraum von $\mathbb{R}^n$ eine Basis besitzt. **(5P)**

(c) Für welche reellen Zahlen x bilden die Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ x \\ 16 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(3P)**

7. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

besteht. **(6P)**

(c) Gib zwei verschiedene (2×2)-Matrizen an, die beide die Eigenwerte 1 und 2 haben. **(2P)**

8. Aufgabe (10P)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & -2x_4 & & = & -12 \\ -2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +4x_4 & -x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & +6x_2 & -8x_3 & -7x_4 & +4x_5 & = & -4 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(7P)**

(b) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(c) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Variablen x, y, z an, das einen 1-dimensionalen Lösungsraum besitzt. **(2P)**

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
gesamt	

Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80