Proseminar zu "Analysis auf Mannigfaltigkeiten"

Sommersemester 2014, LVN 250076

Montag, 11^{00} – 11^{45}, SR11

Stefan Haller

1. Bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge der Bewegungen des Euklidischen Raums, dh. die Menge aller Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathcal{G}$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Ordnen wir jeder Bewegung f wie oben die Matrix A zu, so erhalten wir eine Abbildung $\mathcal{G} \to \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass dies ein wohldefinierter surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, und bestimme seinen Kern.

2. a) Bezeichne $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass ρ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\rho(x) = Ax + b$.

b) Bezeichne $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass σ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\sigma(x) = Ax + b$.

c) Seien g und $\tilde{g}$ zwei sich schneidende Geraden in $\mathbb{R}^2$. Weiters bezeichnen σ und $\tilde{\sigma}$ die Spiegelungen an g und $\tilde{g}$. Zeige, dass $\sigma \circ \tilde{\sigma}$ eine Drehung ist. Bestimme ihren Mittelpunkt und Drehwinkel. Diskutiere auch den Fall paralleler Geraden.

3. Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t^2}$, $f(0) := 0$, glatt (d.h. C^∞) ist und alle ihre Ableitungen bei 0 verschwinden.

4. Sei $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig parametrisierte Kurve, und

$$-L_b^a(\sigma) := L_a^b(\sigma) := \sup\Big\{\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} d\big(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})\big) \;\Big|\; {\scriptstyle n\in\mathbb{N},\, t_i \in I \atop a=t_0\leq t_1\leq\cdots\leq t_{n-1}\leq t_n=b}\Big\},$$

ihre Bogenlänge, falls $a, b \in I$ und $a \leq b$. Zeige:

(a) $L_a^c(\sigma) = L_a^b(\sigma) + L_b^c(\sigma)$, für alle $a, b, c \in I$.

(b) $L_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)}(\sigma \circ \phi) = L_a^b(\sigma)$, für mon. wachsende Homöomorphismen $\phi\colon J \xrightarrow{\cong} I$.

(c) $L_a^b(f \circ \sigma) = L_a^b(\sigma)$, für jede Bewegung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Gib im glatten Fall alternative Beweise mit Hilfe der Integralformel für die Bogenlänge.

5. Konstruiere eine stetige Parametrisierung der Schneeflockenkurve und zeige, dass diese unendliche Bogenlänge hat.

6. Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte Kurve, sodass:

$$c((-\infty, 0]) \subseteq \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad (x\text{-Achse})$$

$$c([0, \infty)) \subseteq \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \qquad (y\text{-Achse})$$

Zeige, dass c nicht regulär parametrisiert werden kann.

Anleitung zu Beispiel 5. Ist $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$, $n \geq 1$, eine Folge von Punkten $P_i \in \mathbb{R}^2$, dann bezeichne $c_{\mathcal{P}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ den stückweise affin parametrisierten Polygonzug durch die Punkte P_i, dh. für $t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, sei $c_{\mathcal{P}}(t) := P_i + (nt - i)(P_{i+1} - P_i)$. Beachte, dass $c_{\mathcal{P}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve ist. Definiere eine neue Folge von Punkten $\mathcal{P}'$ durch

$$\mathcal{P}' := (P_0, Q_0, R_0, S_0, P_1, Q_1, R_1, S_1, \dots, P_{n-1}, Q_{n-1}, R_{n-1}, S_{n-1}, P_n)$$

wobei:

$$Q_i := P_i + \tfrac{1}{3}(P_{i+1} - P_i), \qquad S_i := P_i + \tfrac{2}{3}(P_{i+1} - P_i)$$
$$R_i := \tfrac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (P_{i+1} - P_i)$$

Fertige eine Skizze an, und zeige

$$L_0^1(c_{\mathcal{P}'}) = \tfrac{4}{3} L_0^1(c_{\mathcal{P}}), \quad \sup_{t \in [0,1]} \|c_{\mathcal{P}'}(t) - c_{\mathcal{P}}(t)\| \leq d_{\mathcal{P}}, \quad d_{\mathcal{P}'} \leq \tfrac{1}{3} d_{\mathcal{P}},$$

wobei $d_{\mathcal{P}} := \max\{\|P_{i+1} - P_i\| : i = 0, \dots, n-1\}$. Definiere $\mathcal{P}_k$ rekursiv durch

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_1 := \mathcal{P}', \quad \mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}')', \dots \quad \mathcal{P}_{k+1} := (\mathcal{P}_k)', \dots$$

und zeige

$$\sup_{t \in [0,1]} \|c_{k+l}(t) - c_k(t)\| \leq \left(\tfrac{1}{3^{k+l-1}} + \dots + \tfrac{1}{3^k}\right) d_{\mathcal{P}}, \qquad k, l \in \mathbb{N}.$$

Schließe daraus, dass die Kurven $c_k := c_{\mathcal{P}_k}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen eine stetige Kurve $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, konvergieren.

7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t, f(t))$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her. Bestimme auch eine Formel für die Krümmung dieser Kurve und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

8. Betrachte die glatte Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t^2, t^3)$. Für $0 < a < b$ bestimme die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Bestimme eine Bogenlängenparametrisierung von $c|_{(0,\infty)}$. Besitzt die Kurve c eine reguläre Parametrisierung nahe $t = 0$?

9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r\colon I \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her. Bestimme auch eine Formel für die Krümmung dieser Kurve und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

10. Bestimme die Krümmung der *Archimedische Spirale* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t\cos t, t\sin t)$ sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an, und berechne die Tangente von c bei $c(0)$. Für $0 < a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$.

11. Bestimme die Krümmung der *logarithmische Spirale* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an. Für $a < b$ berechne die Bogenlänge $L_a^b(c)$ sowie eine Bogenlägenparametrisierung von c. Bestimme auch die Evolute von c.

12. Bestimme die Krümmung der *Kardioide (Herzkurve)* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Besitzt die Kurve nahe $t = \pi$ eine reguläre Parametrisierung? Für $a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Berechne auch eine Bogenlängenparametrisierung und die Evolute der Einschränkung $c|_{(-\pi,\pi)}$.

13. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve und $t_0 \in I$ mit $c''(t_0) \neq 0$. Weiters sei $M \in \mathbb{R}^2$ der Mittelpunk des Krümmungskreises bei $c(t_0)$ und $r > 0$ sein Radius. Zeige nun: Sind t_1, t_2, t_3 paarweise verschieden und hinreichend nahe bei t_0, dann liegen $c(t_1)$, $c(t_2)$ und $c(t_3)$ nicht auf einer Geraden, und es gibt daher genau einen Kreis der durch diese drei Punkte geht. Bezeichnen $M(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^2$ den Mittelpunkt diese Kreises und $r(t_1, t_2, t_3) > 0$ seinen Radius, dann gilt

$$M = \lim_{(t_1,t_2,t_3)\to t_0} M(t_1, t_2, t_3) \qquad \text{und} \qquad r = \lim_{(t_1,t_2,t_3)\to t_0} r(t_1, t_2, t_3).$$

14. Betrachte die glatte geschlossene reguläre Kurve $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t) = (\cos t, \sin t \cos t)$. Fertige eine Skizze an. Verwende die Integralformel (Abschnitt 1.12)

$$U(c) = w_0(c') = \frac{1}{2\pi}\int_{c'} \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta(c'(t), c''(t))dt, \quad \eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

um $U(c) = 0$ zu zeigen. (Hinweis: Es ist nicht notwendig tatsächlich eine Stammfunktion zu bestimmen.)

15. Zeichne eine orientierte glatte geschlossene Kurve in der Ebene deren Komplement mindestens sieben Zusammenhangskomponenten besitzt. Für jede dieser Zusammenhangskomponenten bestimme (heuristisch mit Hilfe der Homotopieinvarianz) die Windungszahl der Kurve um die Punkte dieser Komponente. (Die Windungszahl ist ja auf diesen Komponenten konstant, siehe Abschnitt 1.12.)

16. a) Zeige, dass Homotopie stetiger geschlossener Kurven in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Zeige, dass Isotopie regulärer glatter geschlossener Kurven in $\mathbb{R}^2$ eine Äquivalenzrelation definiert.

17. Leite eine Formel für die totale Krümmung einer glatten geschlossenen regulären, aber nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisierten Kurve her. Zeige, dass diese invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist, und im bogenlängenparametrisierten Fall mit der Formel $\int_a^b \kappa(t)dt$ aus der Vorlesung übereinstimmt (Abschnitt 1.14).

18. Zeige, dass $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ tatsächlich ein kompakter metrisierbarer und separabler topologischer Raum ist, vgl. Abschnitt 2.5 im Skriptum.

19 (Torus)**.** Es seien $0 < r < R$. Zeige, dass

$$M := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \big(\sqrt{x^2 + y^2} - R\big)^2 + z^2 = r^2\Big\}$$

eine kompakte, 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Fertige eine Skizze an! Zeige weiters, dass M diffeomorph zu der 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ ist.

20. Zeige, dass

$$U_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^*A = I\}$$

und $SU_n = \{A \in U_n : \det(A) = 1\}$ glatte Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ bilden, und bestimme ihre Dimension.

21 (Klein'sche Flasche)**.** Betrachte die beiden glatten Abbildungen $\rho : S^1 \to S^1$, $\rho(x, y) := (-x, -y)$, und $\sigma : S^1 \to S^1$, $\sigma(x, y) := (x, -y)$. Betrachte weiters die Mannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1$ und zeige, dass $\nu : T \to T$, $\nu(z_1, z_2) := (\rho(z_1), \sigma(z_2))$ eine glatte Abbildung definiert, die $\nu \circ \nu = \mathrm{id}_T$ erfüllt. Zeige, dass

$$z \sim z' \quad :\Leftrightarrow \quad z = z' \text{ oder } \nu(z) = z'$$

eine Äquivalenzrelation auf T definiert. Es bezeichne $K := T/\sim$ den Quotientenraum und $p : T \to K$ die kanonische Projektion. Zeige, dass K mit der Struktur einer abstrakten Mannigfaltigkeit versehen werden kann, die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht.

22. Zeige, dass

$$f : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \qquad f(x, y, u, w) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^u & w \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus ist.

23. Zeige, dass jedes $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ einen Diffeomorphismus

$$\rho_A \colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n, \qquad \rho_A([x]) = [Ax],$$

induziert, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. Für welche A gilt $\rho_A = \mathrm{id}_{\mathbb{RP}^n}$?

24. Konstruiere einen Diffeomorphismus zwischen dem Möbiusband aus Beispiel 2.3(3) und $\mathbb{RP}^2 \setminus \{P\}$, wobei $P \in \mathbb{RP}^2$ einen beliebigen Punkt bezeichnet.

25. Zeige, dass die Ableitung der Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) := \det(A)$, durch folgende Formel gegeben ist:

$$Df(A)(B) = \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}B), \qquad A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgere, $T_A\,\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A^{-1}B) = 0\}$, $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

26. Zeige, dass $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\langle x, x\rangle - 1)^2 = 0\}$ keine Darstellung von S^n als reguläre Nullstellenmenge ist.

27. Bestimme die Tangentialräume des Torus $M \subseteq \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 19.

28. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $y \in N$ ein regulärer Punkt, d.h. für alle $x \in S := f^{-1}(y)$ sei $T_x f\colon T_x M \to T_y N$ surjektiv. Zeige, dass S eine Teilmannigfaltigkeit ist und bestimme ihre Dimension. Zeige auch $T_x S = \ker(T_x f)$, für alle $x \in S$.

29. Seien M und N kompakte glatte Mannigfaltigkeit. Für $x \in M$ bezeichne

$$I_x := \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f(x) = 0\}.$$

Zeige:

(a) I_x ist ein maximales Ideal in $C^\infty(M, \mathbb{R})$.
(b) Jedes maximale Ideal von $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist von der Form I_x, für einen eindeutig bestimmten Punkt $x \in M$.
(c) Ist $\varphi\colon C^\infty(N, \mathbb{R}) \to C^\infty(M; \mathbb{R})$ ein Isomorphismus von Algebren, dann existiert eine eindeutige Bijektion $g\colon M \to N$, sodass $\varphi = g^*$, d.h. für alle $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ gilt $\varphi(f) = f \circ g$.
(d) Zeige, dass g stetig ist und schließe, dass g ein Homöomorphismus ist.
(e) Zeige, dass g glatt ist und schließe, dass g ein Diffeomorphismus ist.

30. Sei Λ ein diskreter Raum mit mindestens zwei aber höchstens abzählbar vielen Punkten. Auf dem topologischen Raum $\tilde{M} := \mathbb{R} \times \Lambda$ betrachte die von

$$(x, \lambda) \sim (x', \lambda') \quad :\Leftrightarrow \quad x = x' \neq 0$$

erzeugte Äquivalenzrelation. Bezeichne $p\colon \tilde{M} \to M := \tilde{M}/\sim$ die kanonische Projektion auf den Quotientenraum. Zeige, dass M nicht Hausdorff ist.

Für $\lambda \in \Lambda$ betrachte die Abbildungen

$$\varphi_\lambda\colon \mathbb{R} \to M, \quad \varphi_\lambda(x) := p(x, \lambda).$$

Zeige, dass das Bild von φ_λ offen in M ist, und dass φ_λ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Zeige weiters, dass für je zwei $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ die Kartenwechselabbildungen $\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ \varphi_\lambda$ auf ihrem (offenen) Definitionsbereich glatt sind. Schließe daraus, dass die Abbildungen $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ einen glatten Atlas von M bilden.

31. Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix und $X(x) := Ax$ das entsprechende lineare Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Bestimme den Fluss von X.

32. Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei reelle $(n \times n)$-Matrizen und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die beiden Vektorfelder $X(x) := Ax + a$ und $Y(x) := Bx + b$ auf $\mathbb{R}^n$ und bestimme ihre Lieklammer $[X, Y]$.

33. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Zeige

$$[X, Y] = \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} (\mathrm{Fl}_t^X)^* Y.$$

Folgere: $[X, Y] = 0$ genau dann wenn $\mathrm{Fl}_t^X \circ \mathrm{Fl}_s^Y = \mathrm{Fl}_s^Y \circ \mathrm{Fl}_t^X$ wann immer beide seiten definiert sind.

34. Zeige, dass auf dem Möbiusband kein globales Einheitsnormalenfeld existiert.

35. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatt. Betrachte den Graph von f als Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$,

$$M = \Big\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\Big\}$$

und die (globale) Parametrisierung $v(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Mit der Notation der Vorlesung zeige:

$$\begin{aligned}
[g] &= \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix} \\
[II] &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \\
[L] &= \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} f_{xx}(1 + f_y^2) - f_{xy} f_x f_y & f_{xy}(1 + f_x^2) - f_{xx} f_x f_y \\ f_{xy}(1 + f_y^2) - f_{yy} f_x f_y & f_{yy}(1 + f_x^2) - f_{xy} f_x f_y \end{pmatrix} \\
2H &= \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2 f_{xy} f_x f_y}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\
K &= \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}
\end{aligned}$$

36 (Minimalflächen)**.** Mit der Notation von Aufgabe 35 definiere den Flächeninhalt des Graphen von $f\colon U \to \mathbb{R}$ durch

$$A := \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy.$$

Sei nun $f^t\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte 1-parameter Familie von Funktionen, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von U konstant in t ist. Bezeichnen A^t ihren Flächeninhalt und H^t ihre mittlere Krümmung, dann gilt:

$$\tfrac{\partial}{\partial t} A^t = -2 \int_U H^t(x, y) \dot{f}^t(x, y) dx dy,$$

wobei $\dot{f}^t = \frac{\partial}{\partial t} f^t$. Schließe daraus, dass $H \equiv 0$ genau dann gilt, wenn $\frac{\partial}{\partial t}|_0 A^t = 0$, für alle Variationen von $f = f^0$ mit kompakten Träger.

37. Sei $c = (r, h) : I \to (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte glatte Kurve. Betrachte die Rotationsfläche

$$M := \Big\{ \big(r(t) \cos \phi, r(t) \sin \phi, h(t)\big) \;\Big|\; t \in I, \phi \in \mathbb{R} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

und die lokale Parametrisierung $v(t,\phi) = (r(t)\cos\phi, r(t)\sin\phi, h(t))$. Mit der Notation der Vorlesung zeige:

$$[g] = \begin{pmatrix} (r')^2 + (h')^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{II}] = \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}} \begin{pmatrix} r'h'' - r''h' & 0 \\ 0 & h'r \end{pmatrix}$$

$$[L] = \begin{pmatrix} \frac{r'h''-r''h'}{((h')^2+(r')^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{h'}{r((h')^2+(r')^2)^{1/2}} \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{r(r'h'' - r''h') + h'((r')^2 + (h')^2)}{2r((h')^2 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{1}{2rr'} \left(\frac{rh'}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \right)'$$

$$K = \frac{r'h'h'' - r''(h')^2}{r((r')^2 + (h')^2)^2} = \frac{-1}{r\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \left(\frac{r'}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \right)'$$

Bestimme weiters die Hauptkrümmungen, die Hauptkrümmungrichtungen sowie die Krümmungslinien. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, dann vereinfachen sich diese Formeln zu:

$$K = -\frac{r''}{r}, \quad H = \frac{rh'' + r'h'}{2rr'}, \quad \kappa_1 = \frac{h'}{r}, \quad \kappa_2 = h''r' - h'r''.$$

38. Finde eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gaußkrümmung, $K = -1$.

39. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, g die induzierte Riemannmetrik und ∇ die entsprechende kovariante Ableitung (Levi–Civita Konnexion) auf M. Ausgehend von der Definition der Riemannkrümmung

$$R(X,Y)(Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

zeige direkt aus den Eigenschaften von ∇ (siehe 3.6 im Skriptum), dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, dass

$$R(fX,Y)(Z) = R(X,fY)(Z) = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)(Z),$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt. Schließe daraus, dass R als Tensorfeld interpretiert werden kann, genauer $R \in \mathcal{T}^1_3(M)$.

40. Wie in Aufgabe 39, dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, verifiziere die folgenden algebraischen Symmetrien der Riemannkrümmung, wobei $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
(2) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

41. Seien M, g und ∇ wie oben. Weiters sei (U, u) eine Karte von M, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(U)$ die damit assoziierten Vektorfelder, und es bezeichnen $\Gamma^k_{i,j} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ die durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j}\partial_k$ eindeutig bestimmten Funktionen (Christoffel-Symbole). Weiters sei $c : I \to U$ eine glatte Kurve, und $(u \circ c)(t) = (u^1(t), \ldots, u^n(t))$ die Komponenten der Kartendarstellung von c. Zeige, dass die Geodätengleichung $\nabla_{c'}c' = 0$ äquivalent zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2}{dt^2}u^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma^k_{i,j} \circ u^{-1})(u^1(t), \ldots, u^n(t))\frac{d}{dt}u^i(t)\frac{d}{dt}u^j(t) = 0,$$

$k = 1, \ldots, n = \dim(M)$. Schließe daraus, dass es zu jedem $\xi \in T_xM$ genau eine Geodäte c mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$ gibt.

42. Ist (M, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, so lässt sich die Länge einer (stückweise) glatten Kurve $c\colon [a, b] \to M$ durch

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}dt$$

definieren. Zeige, dass dies Reparametrisierungs-invariant ist, genauer, zeige dass $L(c \circ \phi) = L(c)$ für jeden glatten Homöomorphismus, $\phi\colon [a', b'] \to [a, b]$, gilt. Zeige weiters, dass

$$d(x, y) := \inf_c L(c)$$

eine Metrik auf M definiert, wobei das Infimum über alle (stückweise) glatten Kurven $c\colon [a, b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ genommen wird. Zeige insbesondere, dass aus $d(x, y) = 0$ schon $x = y$ folgt! Zeige weiters, dass diese Metrik die Topologie von M induziert.

43. a) Betrachte $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ und

$$\omega := dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$$

Zeige, $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = n!\, dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

b) Betrachte $\mathbb{R}^{2n+1}$ mit Koordinaten $(z, x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ und

$$\alpha = dz + x^1dy^1 + \cdots + x^ndy^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Zeige $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha = n!\, dz \wedge dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

44 (Homogene Maxwell Gleichungen)**.** Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit Koordinaten t, x, y, z. Jede 2-Form $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ lässt sich in der Form

$$F = B^3dx \wedge dy - B^2dx \wedge dz + B^1dy \wedge dz + E^1dx \wedge dt + E^2dy \wedge dt + E^3dz \wedge dt$$

schreiben, für eindeutig bestimmte Funktionen $B^i, E^i \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Zeige,

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{div}(B_t) = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial}{\partial t}B_t + \operatorname{rot}(E_t) = 0.$$

Dabei bezeichnen $E_t, B_t \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ die von $t \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektorfelder

$$E_t(x,y,z) := \begin{pmatrix} E^1(t,x,y,z) \\ E^2(t,x,y,z) \\ E^3(t,x,y,z) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_t(x,y,z) := \begin{pmatrix} B^1(t,x,y,z) \\ B^2(t,x,y,z) \\ B^3(t,x,y,z) \end{pmatrix}.$$

45. Zeige, dass $d\colon \Omega^*(M) \to \Omega^{*+1}(M)$ durch folgende beiden Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

(a) $(df)(X) = X \cdot f$, für alle $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.
(b) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$.

In (b) genügt es dies für $k \in \{0,1\}$ zu verlangen.

46. Sei $0 < k \leq n$ und betrachte das Komplement eines linearen Teilraums von $\mathbb{R}^n$ mit Kodimension k. Genauer sei

$$M := \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}).$$

Konstruiere eine geschlossene Form $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $d\alpha = 0$, die nicht exakt ist, d.h. für die kein $\beta \in \Omega^{k-2}(M)$ mit $d\beta = \alpha$ existiert. Es gilt daher $H^{k-1}(M) \neq 0$, siehe Bsp. 47 unten.

Hinweis: Es existieren glatte Abbildungen $\iota\colon S^{k-1} \to M$ und $\pi\colon M \to S^{k-1}$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{S^{k-1}}$. Für geeignetes $\omega \in \Omega^{k-1}(S^{k-1})$ hat dann $\alpha = \pi^*\omega$ die gewünschte Eigenschaft.

47. Unter der q-ten deRham Kohomologie einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir den Vektorraum

$$H^q(M) := \frac{\ker\bigl(\Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\bigr)}{\operatorname{img}\bigl(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\bigr)}.$$

Ist $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $d\alpha = 0$, dann schreiben wir $[\alpha] \in H^q(M)$ für die davon repräsentierte Äquivalenzklasse. Zeige, dass

$$H^k(M) \times H^l(M) \to H^{k+l}(M), \qquad [\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta],$$

wohldefiniert ist, und dadurch $H^*(M) := \bigoplus_q H^q(M)$ zu einer graduiert kommutativen und assoziativen Algebra wird. Ist $f\colon N \to M$ glatt, dann ist

$$f^*\colon H^q(M) \to H^q(N), \qquad f^*[\alpha] := [f^*\alpha],$$

wohldefiniert und funktoriell, d.h. für jede weitere glatte Abbildung $g\colon P \to N$ gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*\colon H^q(M) \to H^q(P)$ sowie $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^q(M)}$. Darüber hinaus gilt $f^*(a \cup b) = f^*a \cup f^*b$, für alle $a, b \in H^*(M)$.

Zeige, dass $\dim(H^0(M))$ mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M übereinstimmt. Zeige, dass für jede kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit M das Integral eine wohldefinierte surjektive lineare Abbildung $H^n(M) \to \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_M \alpha$, liefert, und daher $H^n(M) \neq 0$ gilt.

48. Unter einer kovarianten Ableitung auf Tensorfeldern vom Typ $\binom{l}{k}$ verstehen wir eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}^l_k(M) \to \mathcal{T}^l_k(M)$, sodass

$$\nabla_{fX} t = f \nabla_X t \qquad \text{und} \qquad \nabla_X(ft) = f\nabla_X t + (X \cdot f)t$$

für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $t \in \mathcal{T}^l_k(M)$ gilt. Zeige, dass eine kovariante Ableitung auf Vektorfeldern, $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, durch folgende Formel

$$(\nabla_X \phi)(Y_1, \dots, Y_k) := X \cdot (\phi(Y_1, \dots, Y_n)) - \sum_{i=1}^{k} \phi(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k)$$

eine kovariante Ableitung auf $\binom{0}{k}$-Tensorfeldern induziert, $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ und $\phi \in \mathcal{T}^0_k(M)$. Wir können wir dies als lineare Abbildung $D\colon \mathcal{T}^0_k(M) \to \mathcal{T}^0_{k+1}(M)$ auffassen, $(D\phi)(X, Y_1, \dots Y_k) = (\nabla_X \phi)(Y_1, \dots, Y_k)$. Zeige, dass die Komposition

$$\Omega^k(M) \subseteq \mathcal{T}^0_k(M) \xrightarrow{D} \mathcal{T}^0_{k+1}(M) \xrightarrow{\text{Alt}} \Omega^{k+1}(M)$$

mit dem deRham Differential $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ übereinstimmt, falls die ursprüngliche kovariante Ableitung torsionsfrei war, d.h. falls $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

49. Seien $f, g\colon M \to N$ zwei homotope glatte Abbildungen, d.h. es existiere eine glatte Abbildung $h\colon [0,1] \times M \to N$, sodass $f = h \circ \iota_0$ und $g = h \circ \iota_1$, wobei $\iota_t\colon M \to [0,1] \times M$, $\iota_t(x) := (t, x)$, die Inklusionen bezeichnen. Zeige, dass f und g die gleiche Abbildung in der deRham Kohomologie induzieren, d.h. es gilt $f^* = g^*\colon H^q(N) \to H^q(M)$, für jedes q.

50 (Poincaré Lemma)**.** Zeige $H^q(\mathbb{R}^n) = 0$, falls $q \geq 1$, d.h. jede geschlossene q-Form ist schon exakt. Allgemeiner, für jede kontrahierbare Mannigfaltigkeit M gilt $H^q(M) = 0$ für alle $q \geq 1$. Hinweis: Bezeichnet $P = \mathbb{R}^0$ die einpunktige Mannigfaltigkeit, dann existieren glatte Abbildungen $\iota\colon P \to M$ und $\pi\colon M \to P$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_P$ so, dass $\iota \circ \pi$ homotop zu id_M ist. Aus dem vorangehenden Beispiel folgt dann, dass ι und π zueinander inverse Isomorphismen $H^q(M) \cong H^q(P)$ induzieren.