Übungsbeispiele für das Proseminar Analysis für Physik und verwandte Fächer I

zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 1. Zeige $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Skizziere die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A := (-\infty, 17]$
b) $B := (-3, \infty)$
c) $A \cap B$
d) $A \cup B$
e) $A \setminus B$
f) $B \setminus A$

Aufgabe 3. Es seien A, B und C drei Mengen. Verifiziere die folgenden beiden *Distributivgesetze:*

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Aufgabe 4. Es seien A und B zwei endliche Mengen. Zeige

a) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, sowie
b) $|A \cup B| - |A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$.

Aufgabe 5. Skizziere die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

a) $\{4, 5, 6\} \times \{-1, 1\}$
b) $\mathbb{R} \times \{1, 2, 3\}$
c) $[1, 2] \times (3, 4]$
d) $\big([3, 6] \setminus [4, 5]\big)^2$
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$

Aufgabe 6. Es seien A, B und C drei Mengen. Zeige

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, sowie
b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Aufgabe 7. Es seien A und B zwei endliche Mengen. Zeige $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Für diese und weiter Beispiele siehe `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/APH.html`.

Aufgabe 8. Zeige, dass die folgenden Funktionen wohldefiniert sind. Welche sind injektiv, surjektiv, bijektiv. Gib im letzteren Fall die Umkehrabbildung an.

a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$
b) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$, $g(x) := (x-5)^2$
c) $h\colon \mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}$, $h(x) := \frac{1}{x+3} - 7$
d) $\varphi\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\varphi(n) := 2n$

Aufgabe 9. Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion und

$$\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \mid x\in\mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ihr Graph. Zeige:

a) f ist injektiv genau dann wenn für jedes $c\in\mathbb{R}$ die Menge $(\mathbb{R}\times\{c\})\cap\Gamma_f$ höchstens ein Element enthält.
b) f ist surjektiv genau dann wenn für jedes $c\in\mathbb{R}$ die Menge $(\mathbb{R}\times\{c\})\cap\Gamma_f$ mindestens ein Element enthält.

Interpretiere dies ‘geometrisch.’

Aufgabe 10. Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine bijektive Funktion, und es bezeichne $\Gamma_f\subseteq\mathbb{R}^2$ bzw. $\Gamma_{f^{-1}}\subseteq\mathbb{R}^2$ die Graphen, siehe Aufgabe 9, von f und ihrer Umkehrabbildung f^{-1}. Weiters betrachte die Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(y,x)$. Zeige $\Gamma_{f^{-1}} = \sigma(\Gamma_f)$ und interpretiere dies ‘geometrisch.’

Aufgabe 11. Gib eine Funktion $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 12.

a) Es sei $f\colon A\to B$ eine Surjektion und $g_1, g_2\colon B\to C$ zwei Abbildungen für die gilt $g_1\circ f = g_2\circ f$. Zeige $g_1 = g_2$.
b) Es seien $f_1, f_2\colon A\to B$ zwei Abbildungen und $g\colon B\to C$ eine Injektion für die gilt $g\circ f_1 = g\circ f_2$. Zeige $f_1 = f_2$.

Aufgabe 13. Es bezeichne $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}(\{1,2,3\})$ die Permutationsgruppe der Menge $\{1,2,3\}$. Wieviele Elemente hat $\mathfrak{S}_3$? Gibt zwei Permutationen $f_1, f_2\in\mathfrak{S}_3$ an, für die $f_1\circ f_2\neq f_2\circ f_1$ gilt.

Aufgabe 14. Es seien A und B zwei endliche Mengen mit $|A|\leq|B|$. Zeige, dass es genau $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ verschiedene injektive Abbildungen $A\to B$ gibt. Was erhalten wir für $A = B$?

Aufgabe 15. In einem Verein mit 58 Mitgliedern soll ein vier-köpfiger Vorstand bestehend aus einem Präsidenten, einem Vizepräsidenten, einem Kassier und einem Schriftführer bestimmt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es aus den 58 Mitgliedern einen solchen Vorstand zu bilden? Was hat dies mit Aufgabe 14 zu tun?

Aufgabe 16. In einem Gremium bestehend aus 58 Personen soll ein vierköpfiger Unterausschuss gebildet werden. Wieviel Möglichkeiten gibt es einen solchen zu beschicken?

Aufgabe 17. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq k \leq n$ zeige:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Aufgabe 18. Für $n \in \mathbb{N}_0$ zeige mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 19. Für $n \in \mathbb{N}_0$ zeige mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 20. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeige durch Angabe expliziter Bijektion:

a) Die Intervalle $[0, 1]$ und $[a, b]$ sind gleichmächtig.
b) Die Intervalle $[0, \infty)$ und $[a, \infty)$ sind gleichmächtig.
c) Die Intervalle $[0, \infty)$ und $(-\infty, a]$ sind gleichmächtig.
d) Die Mengen $\mathbb{N}_{\text{gerade}}$ und $\mathbb{N}_{\text{ungerade}}$ sind gleichmächtig.

Aufgabe 21.

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.
b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $0 \leq a \leq \varepsilon$. Zeige, dass dann $a = 0$ gelten muss.

Aufgabe 22. Für $a, b \in \mathbb{R}$ zeige:

a) $a \leq |a|$.
b) $|-a| = |a|$.
c) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ falls $b \neq 0$.
d) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
e) $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$.

Aufgabe 23. Betrachte die Funktion $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $d(a, b) := |b - a|$. Erkläre warum $d(a, b)$ der Abstand der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ genannt wird, und zeige für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
b) $d(a, b) = d(b, a)$.
c) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.
d) $d(a + c, b + c) = d(a, b)$.
e) $d(-a, -b) = d(a, b)$.

Aufgabe 24. Für $a, b \in \mathbb{R}$ zeige

a) $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
b) $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$
c) $\max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b|$.

Aufgabe 25. Es seien $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $k, m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und $m' \leq n'$. Zeige

a) $\sum_{i=m}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=m}^{n} a_i$.
b) $\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$.
c) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$.
d) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$.
e) $\sum_{i=m}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_{m-1}$.
f) $\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m$.
g) $\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=m'}^{n'} b_j\right) = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=m'}^{n'} a_i b_j = \sum_{j=m'}^{n'} \sum_{i=m}^{n} a_i b_j$.

Aufgabe 26. Zeige $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ und damit dann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Folgere daraus auch $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Aufgabe 27. Zeige eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt wenn ein $r \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft existiert: für jedes $a \in A$ gilt $|a| \leq r$.

Aufgabe 28. Bestimme Maximum, Minimum, Supremum und Infimum (falls diese existieren) der folgenden Mengen:

a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
b) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
d) $(2,3) \cup (3,4]$.

Aufgabe 29. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte nichtleere Teilmenge. Zeige $\inf A \leq \sup A$. Gib ein Beispiel an, für das $\inf A = \sup A$ gilt.

Aufgabe 30. Seien $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Zeige:

a) Ist B nach oben beschränkt, dann ist auch A nach oben beschränkt und es gilt $\sup A \leq \sup B$.
b) Ist B nach unten beschränkt, dann ist auch A nach unten beschränkt und es gilt $\inf B \leq \inf A$.

Aufgabe 31. Es seien A und B zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodass gilt $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Zeige, dass A nach oben und B nach unten beschränkt ist, und darüber hinaus $\sup A \leq \inf B$ gilt. Gib ein Beispiel an, für das $\sup A = \inf B$ gilt. Was kann allgemein über $\inf A$ und $\sup B$ gesagt werden?

Aufgabe 32. Für zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Zeige nun:

a) Existieren $\max A$ und $\max B$, dann existiert auch $\max(A+B)$ und es gilt $\max(A + B) = \max A + \max B$.
b) Sind A und B beide nichtleer und nach oben beschränkt, dann ist auch $A+B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt weiters $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
c) Formuliere und beweise analoge Eigenschaften des Minimums und des Infimums.

Aufgabe 33. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Für $\lambda \geq 0$ zeige nun:

a) Existiert $\max A$, dann existiert auch $\max(\lambda A)$ und es gilt $\max(\lambda A) = \lambda \max A$.
b) Ist A nichtleer und nach oben beschränkt, dann ist auch λA nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.
c) Formuliere und beweise analoge Eigenschaften des Minimums und des Infimums.

Diskutiere auch den Fall $\lambda < 0$. Zeige insbesondere $\sup(-A) = -\inf A$ und $\inf(-A) = -\sup A$, wobei $-A := (-1)A = \{-a \mid a \in A\}$.

Aufgabe 34. Verifiziere die Körperaxiome für komplexe Zahlen, d.h. beweise Satz 1.10.1.

Aufgabe 35. Für $z_1 := 3 + 7\mathbf{i}$ und $z_2 := 5 - 2\mathbf{i}$ bestimme $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $z_1\mathbf{i}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\bar{z}_1$, $|z_1|$, $\frac{1}{z_1}$ sowie $(z_2)^{-1}$.

Aufgabe 36. Für komplexe Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zeige:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
c) $\bar{\bar{z}} = z$
d) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
e) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \bar{z})$

Aufgabe 37. Für komplexe Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zeige:

a) $|\bar{z}| = |z|$
b) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$
c) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, falls $z_2 \neq 0$.
e) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

f) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

Aufgabe 38. Zeige, dass die beiden Quadratwurzeln einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ wie folgt berechnet werden können:

$$\pm\sqrt{z} = \pm\frac{\operatorname{Re} z + |z| + \mathbf{i} \operatorname{Im} z}{\sqrt{2(\operatorname{Re} z + |z|)}} \qquad \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$$\pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{-z}\ \mathbf{i} \qquad \text{falls } z \in (-\infty, 0] \subseteq \mathbb{C}$$

Warum ist die Fallunterscheidung notwendig? Verwende dies um die beiden Quadratwurzeln von $-3 + 4\mathbf{i}$, $8 - 6\mathbf{i}$, $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$ und -9 zu bestimmen.

Aufgabe 39. Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

a) $(6 + 7\mathbf{i})z - 3 - 5\mathbf{i} = 0$
b) $z^2 - (4 - \mathbf{i})z + 5 + \mathbf{i} = 0$
c) $2z^3 + 18z = 0$

Aufgabe 40. Bestimme alle sechsten und achten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, d.h. gib sie in der Form $a + b\mathbf{i}$ an.

Aufgabe 41. Die Fibonacci Folge ist rekursiv durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} := a_n + a_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0$$

definiert. Sei $\alpha := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Zeige

$$a_n = \frac{\alpha^n - (1-\alpha)^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Hinweis: α und $1 - \alpha$ lösen beide die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Schließe daraus:

$$\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} - \alpha^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

$$(1-\alpha)^{n+2} - (1-\alpha)^{n+1} - (1-\alpha)^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Verwende dies um (1) mittels vollständiger Induktion nach n zu beweisen.

Aufgabe 42. Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Folge (a_n) konvergiert gegen a
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$
c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$
d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$
e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Aufgabe 43. Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeige, dass dann auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Zeige, dass dann auch die Folge $\big(|a_n|\big)$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \Big|\lim_{n\to\infty} a_n\Big|.$$

Aufgabe 45. Es sei (a_n) eine konvergente Folge und alle $a_n \geq 0$. Zeige, dass dann auch die Folge $\left(\sqrt{a_n}\right)$ konvergiert und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

Hinweis: Unterscheide zwei Fälle $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Der erste Fall ist leicht, für den zweiten beweise und verwende die Gleichung

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| = \frac{|a-b|}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \text{für alle } a, b > 0.$$

Aufgabe 46. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n+6}{5n^3+3n^2-n}$
b) $\lim_{n\to\infty} 3 + (-1)^n \left(\frac{4n^2-7n+1}{n^3+9}\right)$
c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt{3n^{-2}+7} - \frac{2}{n}}$
d) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n n^5}{7n^6+9} - 3\right|$

Aufgabe 47. Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Zeige a ist Häufungswert der Folge (a_n) genau dann wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ existiert.

Aufgabe 48. Bestimme alle Häufungswerte sowie Limes superior und Limes inferior der Folge:

$$a_n := \begin{cases} 1 + \frac{2}{n} & \text{falls } n \equiv 0 \mod 3 \\ 3 + \frac{4}{n} & \text{falls } n \equiv 1 \mod 3 \\ 5 + \frac{6}{n} & \text{falls } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Hierbei bedeuted $n \equiv 0 \mod 3$, dass die Zahl n ohne Rest durch 3 teilbar ist. Ebenso bedeuted $n \equiv 1 \mod 3$, dass $n-1$ ohne Rest durch 3 teilbar ist. Allgemeiner, $n \equiv k \mod p$ bedeuted, dass $n-k$ ohne Rest durch p teilbar ist. Der erste Fall in der Definition von (a_n) ist daher für $n = 3, 6, 9, 12, \ldots$ zuständig, der zweite für $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ und der dritte für $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$.

Aufgabe 49. Es seien (a_n) und (b_n) zwei beschränkte Folgen. Zeige, dass dann auch die Folge $(a_n + b_n)$ beschränkt ist und es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Gib zwei beschränkte Folgen (a_n) und (b_n) an bei denen in obiger Ungleichung tatsächlich *nicht* Gleichheit gilt.

Aufgabe 50. Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen reeller Zahlen. Zeige folgende Behauptungen aus Proposition 2.4.4:

a) Ist (a_n) nach oben beschränkt und $b_n \to -\infty$, dann auch $a_n + b_n \to -\infty$.
b) Existiert $\rho > 0$ mit $a_n \leq -\rho$ für fast alle n, $b_n \to \infty$, dann $a_n b_n \to -\infty$.
c) Sind fast alle $a_n < 0$ und $a_n \to 0$, dann auch $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

Aufgabe 51. Gibt jeweils zwei Folgen reeller Zahlen (a_n) und (b_n) an für die gilt: $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ und:

a) $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$.
b) $\frac{a_n}{b_n} \to a$, $a \in \mathbb{R}$.
c) $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$.
d) $\frac{a_n}{b_n}$ ist beschränkt und divergent.
e) $\frac{a_n}{b_n}$ ist unbeschränkt, divergent, aber divergiert nicht gegen ∞ oder $-\infty$.

Aufgabe 52. Es seien $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ und $q > 1$. Betrachte

$$p(n) := \sum_{i=0}^{k} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots + a_k n^k.$$

Zeige $\lim_{n\to\infty} q^{-n}\, p(n) = 0$. Verwende dies um den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\binom{n}{17}$ zu bestimmen.

Aufgabe 53. Zeige $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Aufgabe 54. Bestimme alle Häufungswerte der Folge $z_n := \mathbf{i}^n + 2^{-n}$.

Aufgabe 55. Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:

a) $\sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathbf{i}}{7}\right)^n$
c) $\sum_{n=2}^{\infty} (4+5\mathbf{i})^n$
d) $\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \Big((3+4\mathbf{i}) \cdot (-2)^{-n} + (5-6\mathbf{i}) \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n\Big)$

Aufgabe 56. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (3+4\mathbf{i})^{-2n}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{1-3n}$

Aufgabe 57. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit $\sigma(1) = 1$. Betrachte

$$b_n := \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} a_k = a_{\sigma(n)} + a_{\sigma(n)+1} + a_{\sigma(n)+2} + \cdots + a_{\sigma(n+1)-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass auch die 'geklammerte' Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Gib ein Beispiel, d.h. (a_n) und σ, an indem zwar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, nicht aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe 58. Warum konvergieren die folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^3+2n^2+n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r}$, für fixes $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Aufgabe 59. Zeige mit Hilfe des Minorantenkriteriums, dass für $s \in \mathbb{Q}$, $s \leq 1$, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ divergiert. Hinweis: Proposition 1.9.23, siehe auch Beispiel 2.8.4 für den Fall $s = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 60. Zeige mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass für $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ absolut konvergiert. Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1^s} + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{\leq 2\frac{1}{2^s}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{\leq 4\frac{1}{4^s}} + \underbrace{\frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots + \frac{1}{15^s}}_{\leq 8\frac{1}{8^s}} + \frac{1}{16^s} + \cdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^0 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \cdots$$

Aufgabe 61. Welche der folgenden Reihen konvergieren bzw. divergieren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\right)^n$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} 2^{-n}$

Aufgabe 62. Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} z^n$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} z^n$
f) $\sum_{n=0}^{\infty} (3n^5 - 7n^2 + 1) z^n$

Aufgabe 63. Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^{2n}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} z^{2n+1}$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} z^{2n+1}$

Hinweis: Alle diese Potenzreihen haben die Eigenschaft, dass unendlich viele $a_n = 0$ sind, Proposition 2.9.5 ist also nicht direkt anwendbar. Schreiben wir jedoch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \xi^n$ mit $\xi = z^2$, dann lässt sich der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ durch den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \xi^n$ bestimmen. Ähnlich lässt sich der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} (z^2)^n$ durch den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \xi^n$ bestimmen. Alternativ kann man auch das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium direkt anzuwenden und so die Konvergenzradien bestimmen.

Aufgabe 64. Berechne die Eulersche Zahl $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ bis auf die dritte Dezimalstelle *ohne* Taschenrechner. Sei dazu

$$R_n := e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Etabliere die Fehlerabschätzung $0 \leq R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$. Hinweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\Big)\\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+2}\Big)^k\end{aligned}$$

Wähle nun n so, dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und e bis auf die dritte Dezimalstelle übereinst.

Aufgabe 65. Für $z, w \in \mathbb{C}$ zeige die folgenden Identitäten:

a) $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$
b) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
c) $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$
d) $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$

Hinweis zu (c): Wende das Additionstheorem des Cosinus auf $\frac{1}{2}(z+w)+\frac{1}{2}(z-w)$ sowie auf $\frac{1}{2}(z + w) + \frac{1}{2}(w - z)$ an.

Aufgabe 66. Beweise Proposition 2.10.6. Zeige also, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sinh(z) = -\mathbf{i} \sin(\mathbf{i}z)$, $\cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z)$
b) $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$
c) $\sinh(z + w) = \sinh(z) \cosh(w) + \cosh(z) \sinh(w)$ (Additionstheorem)
d) $\cosh(z + w) = \cosh(z) \cosh(w) + \sinh(z) \sinh(w)$ (Additionstheorem)
e) $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$
f) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
g) $\cosh(x) \geq 1$

Aufgabe 67. Wo und warum sind die folgenden Funktionen stetig?

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) := \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 2x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) := \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \geq 1 \\ 3-x & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$

$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x) := \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$$f_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_5(x) := \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \\ 3 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 68. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, stetig ist. Gib nun zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Hinweis: $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$.

Aufgabe 69. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $L \geq 0$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in D. \tag{2}$$

Zeige, dass f stetig ist.[1] Zeige weiters, dass für $k, d \in \mathbb{R}$ die lineare (oder besser affine) Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := kx + d$$

Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 70. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} \max\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad \max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\} \\ \min\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad \min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\} \\ f^+\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \\ f^-\colon D \to \mathbb{R}, &\qquad f^-(x) := \min\{f(x), 0\} \end{aligned}$$

[1] Funktionen f für die $L \geq 0$ existiert, sodass (2) gilt heißen *Lipschitz-stetig*, und L wird eine Lipschitz Konstante von f genannt. Die Aufgabe zeigt also, dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

Zeige, vgl. Übungsaufgabe 24,
$$\max\{f,g\}=\frac{f+g+|f-g|}{2},\qquad \min\{f,g\}=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$
Seien nun f und g stetig. Zeige, dass dann auch $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, f^+ sowie f^- stetig sind.

Aufgabe 71. Bestimme die folgenden Grenzwerte:
$$\lim_{n\to\infty}\exp\Big(\sin\Big(\frac{n^2-3n+1}{n^3+2n-5}\Big)\Big)\qquad \lim_{n\to\infty}\cos\Big(\Big|\frac{-n^5+2}{n^5+9}\Big|-1\Big)$$

Aufgabe 72. Es seien $f=\sum_{n=1}^\infty f_n$ und $g=\sum_{n=1}^\infty g_n$ zwei gleichmäßig konvergente Reihen von Funktionen $f_n,g_n\colon D\to\mathbb{R}$, und sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch die Funktionenreihen $\sum_{n=1}^\infty(f_n+g_n)$ und $\sum_{n=1}^\infty\lambda f_n$ gleichmäßig gegen $f+g$ bzw. λf konvergieren.

Aufgabe 73. Es seien $\sum_{n=1}^\infty f_n$ und $\sum_{n=1}^\infty g_n$ zwei normal konvergente Reihen von Funktionen $f_n,g_n\colon D\to\mathbb{R}$, und sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch die Funktionenreihen $\sum_{n=1}^\infty(f_n+g_n)$ sowie $\sum_{n=1}^\infty\lambda f_n$ normal konvergieren.

Aufgabe 74. Betrachte die Folge von Funktionen
$$f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f_n(x):=\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.$$
Weiters sei $r>0$. Zeige, dass f_n auf dem Intervall $(-r,r)$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergiert. Hinweis: Verwende die Abschätzung (67) aus Proposition 2.10.7 und die Tatsache, dass die Funktionenfolge der Partialsummen $s_n(x):=\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}$ auf $(-r,r)$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergiert.

Aufgabe 75. Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ und $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x)>0$ für alle $x\in[a,b]$. Zeige, es existiert $\varepsilon>0$, sodass für alle $x\in[a,b]$ gilt $f(x)>\varepsilon$. Gib ein Beispiel einer stetigen Funktion $g\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ an, sodass für alle $x\in(a,b)$ zwar $g(x)>0$ gilt, für die aber kein $\varepsilon>0$ existiert, sodass $g(x)>\varepsilon$ für alle $x\in(a,b)$.

Aufgabe 76. Beweise Proposition 3.6.8, d.h. zeige, dass Tangens und Cotanges die folgenden Eigenschaften haben:

a) $\cot(z)=-\tan(z+\pi/2)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
b) $\tan(z+\pi)=\tan(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)$.
c) $\cot(z+\pi)=\cot(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
d) $\tan(-z)=-\tan(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)$.
e) $\cot(-z)=-\cot(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
f) Es gilt das Additionstheorem
$$\tan(z+w)=\frac{\tan(z)+\tan(w)}{1-\tan(z)\tan(w)}$$

wann immer beide Seiten definiert sind, $z, w \in \mathbb{C}$.

g) Es gilt das Additionstheorem

$$\cot(z+w) = \frac{\cot(z)\cot(w) - 1}{\cot(z) + \cot(w)}$$

wann immer beide Seiten definiert sind, $z, w \in \mathbb{C}$.

h) Für die Nullstellenmenge des Tangens gilt

$$\big\{z \in \mathbb{C} \setminus \big(\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big) \;\big|\; \tan(z) = 0\big\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z}.$$

i) Für die Nullstellenmenge des Cotangens gilt

$$\big\{z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \;\big|\; \cot(z) = 0\big\} = \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 77. Bestimme alle Maximal- und Minimalstellen der Funktionen:

a) $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
b) $\tan \mathbb{R} \setminus \big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big) \to \mathbb{R}$, $\cot\colon \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
c) $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$
d) $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$
e) $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\coth\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
g) $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$
h) $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcoth}\colon \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R}$

Aufgabe 78. Zeige:

a) $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$, $x \in [-1,1]$.
b) $\operatorname{arccot}(x) = \pi/2 - \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
c) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, $x \in [-1,1]$
d) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$, $x \in [-1,1]$.
e) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
f) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
g) $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$, $x > 0$.
h) $\arctan(1/x) = -\pi/2 - \arctan(x)$, $x < 0$.

Aufgabe 79. Es sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass $r \in [0,\infty)$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt.

$$(x,y) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big) \tag{3}$$

Diskutiere die Eindeutig dieser sogenannten *Polarkoordinatendarstellung,* d.h. bestimme alle $r \in [0,\infty)$ und alle $\varphi \in \mathbb{R}$ für die (3) gilt. Hinweis: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ falls $x \neq 0$, und $\varphi = \operatorname{arccot}\frac{x}{y}$ falls $y \neq 0$.

Aufgabe 80. Zeige

$$\cos(x/2) = \frac{\sqrt{2 + 2\cos(x)}}{2} \qquad |x| < \pi$$

und verwende dies um folgende speziellen Werte des Cosinus zu verifizieren:

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \cos(\pi/16) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\cos(\pi/32) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \qquad \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos(\pi/24) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \qquad \cos(\pi/48) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

Aufgabe 81. Verifiziere die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \\
\sin(4x) &= 8\sin(x)\cos^3(x) - 4\sin(x)\cos(x) \\
\sin(5x) &= 5\sin(x) - 20\sin^3(x) + 16\sin^5(x)
\end{aligned}$$

Verwende letztere um zu zeigen:

$$\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

Aufgabe 82. Zeige:

a) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)$, $x \geq 1$.
c) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$.
d) $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Aufgabe 83. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f,g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von D, sodass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ beide existieren. Weiters sei $f \leq g$, d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Zeige, dass dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Aufgabe 84. Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}.$$

Aufgabe 85. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}.$$

Hinweis: Polynomdivision

Aufgabe 86. Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}.$$

Diskutiere auch die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to 0\pm}$ dieser Funktionen.

Aufgabe 87. Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+2x-1}-3x$$

Hinweis: $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Aufgabe 88. Bestimme die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to-\infty} \sin(x), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-1}{2x^3+x-9}\arctan(x)$$

Aufgabe 89. Skizziere den Graphen der sogenannte *Gausklammer-Funktion*

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto \lfloor x\rfloor := \max\{k\in\mathbb{Z} \mid k\le x\} \tag{4}$$

und bestimme für $x_0\in\mathbb{R}$ die beiden einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0-} \lfloor x\rfloor \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0+} \lfloor x\rfloor$$

sowie $\lim_{x\to x_0}\lfloor x\rfloor$, sofern diese existieren. Wo ist die Funktion (4) stetig?

Aufgabe 90. Zeige, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt. Genauer sei $n\in\mathbb{N}$ ungerade und

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad a_i\in\mathbb{R},\ a_n\neq 0$$

ein reelles Polynom. Zeige es existiert $\xi\in\mathbb{R}$ mit $p(\xi)=0$. Hinweis: O.B.d.A. $a_n = 1$, bestimme $\lim_{x\to\infty} p(x)$ sowie $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ und wende den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 91. Bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

Hinweis: Beispiel 3.8.19.

Aufgabe 92. Beweise den sogenannten verallgemeinerten Mittelwertsatz, vgl. Satz 4.2.6. Sind $f, g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen die beide auf (a,b) differenzierbar sind, dann existiert $\xi\in(a,b)$ mit

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$

Gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und daher

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Hinweis: betrachte die Funktion

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

Aufgabe 93. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $K \in \mathbb{R}$ und $|f'(x)| \leq K$ für alle $x \in I$. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist, d.h. zeige es existiert $L \geq 0$, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

Aufgabe 94. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in U$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist bei x_0 differenzierbar, d.h. es existiert $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
b) Es existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
c) Es existiert eine lineare Abbildung[2] $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h)|}{|h|} = 0.$$

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \varphi(1)$.

Aufgabe 95. Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) := \frac{4x+1}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.
b) $f_2(x) := x^x$, $x > 0$.
c) $f_3(x) := \cos(x)^{\sin(x)}$, $|x| < \pi/2$.
d) $f_4(x) := \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $x > 0$.
e) $f_5(x) := e^{x^2}\cos(\ln(x))$, $x > 0$.

Aufgabe 96. Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^a e^{bx}$$

a) Bestimme $\lim_{x\to 0+} f(x)$ sowie $\lim_{x\to\infty} f(x)$, falls diese vorhanden sind.
b) Bestimme alle lokalen Maxima und Minima von f.
c) Bestimme das globale Maximum und Minimum falls diese angenommen werden, andernfalls bestimme Supremum und Infimum.
d) Wo ist die Funktion monoton wachsend und wo monoton fallend?
e) Skizziere den Graphen von f.

Hinweis: Führe eine entsprechende Fallunterscheidung für die Werte von a und b durch.

---

[2]Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit der Eigenschaft $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$, d.h. eine Funktion von der Gestalt $\varphi(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 97. Löse folgende Extremwertaufgaben:

a) Unter allen Rechtecken mit fixem Umfang $U > 0$ ist jenes mit größtem Flächeninhalt zu bestimmen.
b) Unter allen Zylindern mit kreisförmiger Basis und fixem Volumen $V > 0$ ist jener mit kleinster Oberfäche zu bestimmen.

Aufgabe 98. Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}}.$$

a) Zeige, dass (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, und bestimme diese Funktion f.
b) Zeige, dass jede der Funktionen f_n differenzierbar ist und bestimme f_n'.
c) Zeige, dass die Folge der Ableitungen (f_n') punktweise gegen eine Funktion g konvergiert, und bestimme diese Funktion g.
d) Zeige, dass g nicht differenzierbar ist.
e) Warum widerspricht dies nicht Satz 4.3.1 aus der Vorlesung?

Aufgabe 99. Bestimme die Ableitungen der Funktionen:

$$\operatorname{arsinh}, \quad \operatorname{arcosh}, \quad \operatorname{artanh} \quad \text{und} \quad \operatorname{arcoth}.$$

Aufgabe 100. Zeige

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k k! k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Hinweis: Differenziere die zur Diskussion stehenden Gleichungen, siehe auch Beispiel 4.3.13 und Beispiel 4.3.15 aus der Vorlesung.

Aufgabe 101. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar, oder C^n, falls sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)} : U \to \mathbb{R}$ stetig ist, $n \in \mathbb{N}$. Unter einer C^0-Funktion versteht man einfach eine stetige Funktion. Zeige:

a) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, dann ist f C^n.
b) Sind $f, g : U \to \mathbb{R}$ beide C^n und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g$, λf, fg und $\frac{f}{g}$ alle C^n, wobei im letzten Fall $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ vorausgesetzt sei.
c) Sind $f : V \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ beide C^n mit $g(U) \subseteq V$, dann ist auch $f \circ g : U \to \mathbb{R}$ wieder C^n.

Hinweis: Induktion nach n.

Aufgabe 102. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar, aber nicht C^1 ist.

Aufgabe 103. Es sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $x_0 \in I$, und es bezeichne

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f um x_0. Zeige, dass es eine stetige Funktion $r_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = T_n(x) + (x - x_0)^{n+1} r_{n+1}(x) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Zeige auch $r_{n+1}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$. Hinweis: Taylorsche Satz.

Aufgabe 104. Es sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $x_0 \in I$ und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{sowie} \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Zeige:

a) f hat bei x_0 ist lokales Extremum genau dann, wenn n ungerade ist.
b) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
c) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

Hinweis: Aufgabe 103

Aufgabe 105. Es sei $a > 0$ fix. Diskutiere die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} (x - a)e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Zeige f ist (insbesondere bei $x = 0$) stetig. Bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Bestimme alle lokalen Minima und Maxima. Falls vorhanden, bestimme das globale Maximum und das globale Minimum und bestimme auch wo diese angenommen werden. Wo wächst und wo fällt f (streng) monoton. Wo ist f (strikt) konvex bzw. konkav. Bestimme alle Wendepunkte von f.

Aufgabe 106. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und bestimme alle Ableitungen bei $x_0 = 0$. Bestimme die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$. Welchen Konvergenzradius hat diese, welche Fuktion stellt sie dar, und wo stimmt diese mit f überein? Bestimme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Bestimme alle lokalen Minima und Maxima. Falls vorhanden, bestimme das globale Maximum und Minimum, und alle Stellen wo diese angenommen werden. Wo ist f (streng) monoton wachsend bzw. fallend? Wo ist f (strikt) konvex bzw. konkav? Bestimme alle Wendepunkte.

Aufgabe 107. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\tan(x)}$
c) $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x)$
d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$
e) $\lim_{x\to 1-} \ln(x)\cdot\ln(1-x)$

Hinweis: Regel von de l'Hospital. (a) und (c) können ohne Probleme auch ohne der Regel von de l'Hospital bestimmt werden. Wie?

Aufgabe 108. Bestimme für jede der folgenden Funktionen deren Taylorentwicklung um x_0 und kläre wo und gegen welche Funktion die Taylorreihe konvergiert.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ um $x_0 = 1$. Hinweis: geometrische Reihe.
b) $f(x) = \frac{1}{x^3+27}$ um $x_0 = 0$. Hinweis: geometrische Reihe.
c) $p(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ um $x_0 = 2$.
d) $f(x) = \cosh(x)$ um beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.
Hinweis: $\cosh(x) = \cosh(x_0)\cosh(x-x_0) + \sinh(x_0)\sinh(x-x_0)$.

Aufgabe 109. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $f \geq 0$, $x_0 \in [a,b]$, f bei x_0 stetig und $f(x_0) > 0$. Zeige $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Aufgabe 110. Zeige, dass jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Hinweis: O.B.d.A. (Warum?) sei f monoton wachsend. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Zerlegungen $Z^n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n\}$ von $[a,b]$ mit $x_i^n = a + \frac{(b-a)}{n} i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. In dieser Situation lässt sich $O_{f,Z^n} - U_{f,Z^n}$ durch eine einfache Formel ausdrücken, aus der dann die Riemannintegrierbarkeit von f folgt.

Aufgabe 111. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Weiters sei $m := \inf f([a,b])$ und $M := \sup f([a,b])$. Zeige es existiert $\mu \in [m,M]$ mit $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Diskutiere den Zusammenhang mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Hinweis: Verwende $m \leq f \leq M$ und Proposition 5.2.5.

Aufgabe 112. Es seien $p \geq 1$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die Minkowsi Ungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Hinweis: Verwende die Höldersche Ungleichung aus Proposition 5.3.15 und gehe wie im Beweis von Proposition 4.5.24 vor.

Aufgabe 113. Für das Gaußsche Wahrscheinlichkeitsintegral zeige

$$W(x) := \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)},$$

und bestimme damit $W(1)$ bis auf die vierte Nachkommastelle. Hinweis: Verwende die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion, Korollar 5.3.11 und etabliere eine geeignete Abschätzung für den Fehler $\left|W(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)}\right|$.

Aufgabe 114. Zeige mittels partieller Integration

$$\int \sin^k(x) dx = -\frac{\cos(x)\sin^{k-1}(x)}{k} + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2}(x) dx, \qquad k \neq 0,$$

und verwende dies um $\int \sin^k(x) dx$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ zu bestimmen. Weiters berechne $\int_0^{\pi/2} \sin^k(x) dx$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 115. Zeige mittels partieller Integration

$$\int x^k \sin(x) dx = -x^k \cos(x) + k \int x^{k-1} \cos(x) dx$$

und

$$\int x^k \cos(x) dx = x^k \sin(x) - k \int x^{k-1} \sin(x) dx$$

Verwende dies um $\int x^k \sin(x) dx$ und $\int x^k \cos(x) dx$ für $k = 0, 1, 2, 3$ zu bestimmen. Für die bestimmten Integrale, $k \in \mathbb{N}$,

$$s_k := \int_0^{\pi/2} x^k \sin(x) dx \qquad \text{und} \qquad c_k := \int_0^{\pi/2} x^k \cos(x) dx.$$

leite die folgenden Rekursionsformeln her, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 & c_0 &= 1 \\ s_k &= k c_{k-1} & c_k &= (\pi/2)^k - k s_{k-1} \\ s_k &= k(\pi/2)^{k-1} - k(k-1) s_{k-2} & c_k &= (\pi/2)^k - k(k-1) c_{k-2} \end{aligned}$$

Berechne damit $\int_0^{\pi/2} x^8 \cos(x) dx$.

Aufgabe 116. Zeige mittels partieller Integration

$$\int \ln(x)^k dx = x \ln(x)^k - k \int \ln(x)^{k-1} dx$$

und verwende dies um $\int \ln(x)^k dx$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ zu bestimmen. Für die bestimmten Integrale $l_k := \int_1^e \ln(x)^k dx$ leite die Rekursionsformel

$$l_k = e - k l_{k-1}$$

her, und verwende dies um $\int_1^e \ln(x)^8 dx$ zu berechnen.

Aufgabe 117. Bestimme die folgenden Integrale:

$$\int \sqrt{2x+3}dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{5x+6}}, \qquad \int \sin^2(3x+4)dx, \qquad \int x^2 e^{4x+5}dx$$

Hinweis: Substitution

Aufgabe 118. Bestimme

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx \qquad \text{sowie} \qquad \int \frac{x^2e^x + 2xe^x + 2e^{2x}}{x^2e^x + e^{2x} + 7}dx$$

Hinweis: Beispiel 5.7.12

Aufgabe 119. Verifiziere die Folgenden Integrale die beim Integrieren mittels Partialbruchzerlegung aufgetreten sind, $e, f \in \mathbb{R}$, $e^2 - 4f < 0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+ex+f} &= \frac{2}{\sqrt{4f-e^2}} \arctan \frac{2x+e}{\sqrt{4f-e^2}} \\
\int \frac{xdx}{x^2+ex+f} &= \frac{\ln(x^2+ex+f)}{2} - \frac{e}{2}\int \frac{dx}{x^2+ex+f} \\
\int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^k} &= \frac{2x+e}{(k-1)(4f-e^2)(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
&\quad + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4f-e^2)} \int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
\int \frac{xdx}{(x^2+ex+f)^k} &= -\frac{1}{2(k-1)(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
&\quad - \frac{e}{2}\int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^k} \qquad k \geq 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 120. Mit Hilfe der Formeln in Aufgabe 119 bestimme

$$\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2}$$

und verifiziere das Ergebnis durch Differenzieren.

Aufgabe 121. Bestimme

$$\int \frac{9e^{3x} - e^{2x} - 2}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}dx$$

und verifiziere das Ergebnis durch Differenzieren. Hinweis: Beispiel 5.8.2

Aufgabe 122. Bestimme:

$$\int \frac{x - \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}}dx$$

und verifiziere das Ergebnis durch Differenzieren. Hinweis: Beispiel 5.8.4

Aufgabe 123. Bestimme das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

Aufgabe 124. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$ konvergiert, und folgende Indentität gilt:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx \tag{5}$$

Hinweis: Die Konvergenz des Integrals lässt sich mit Hilfe einer konvergenten Majorante beweisen. Für (5) verwende eine Substitution.

Aufgabe 125. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[3]

$$y' = (y-1)(y-2).$$

Fertige eine Skizze der Lösungskurven an. Bestimme auch jene maximale Lösung y die der Anfangsbedingung $y(5) = 7$ genügt.

Aufgabe 126. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[4]

$$y' = \frac{4x^3}{e^y}$$

Fertige eine Skizze der Lösungeskurven an. Bestimme auch jene maximale Lösung die der Anfangsbedingung $y(0) = e$ genügt.

Aufgabe 127. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[5]

$$y' = xy + 5x$$

Aufgabe 128. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[6]

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2\cos(x), \qquad x > 0$$

Aufgabe 129. Bestimme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung[7]

$$y''' - 5y'' + 11y' - 15y = 0$$

[3]Es gibt zwei konstante Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 1$, und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 2$. Darüber hinaus existieren drei Familien maximaler Lösungen: $y : (C, \infty) \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{2-e^{x-C}}{1-e^{x-C}}$, $C \in \mathbb{R}$; $y : (-\infty, C) \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{2-e^{x-C}}{1-e^{x-C}}$, $C \in \mathbb{R}$; und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{2+e^{x-C}}{1+e^{x-C}}$, $C \in \mathbb{R}$.

[4]Für $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = \ln(x^4 + C)$ eine maximale Lösung. Für $C \in \mathbb{R}$, $C \leq 0$, sind $y : (\sqrt[4]{-C}, \infty) \to \mathbb{R}$, $y(x) = \ln(x^4 + C)$ und $y : (-\infty, -\sqrt[4]{-C}) \to \mathbb{R}$, $y(x) = \ln(x^4 + C)$ eine maximale Lösung.

[5]Jede maximale Lösung ist von der Form $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = -5 + Ce^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

[6]Jede maximale Lösung ist von der Form $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y(x) = x^2\sin(x) + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

[7]Lösung: $e^x\sin(2x)$, $e^x\cos(2x)$, e^{3x}

Aufgabe 130. Bestimme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung[8]

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$$

Aufgabe 131. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[9]

$$y'' + y = \cos(x)$$

Zeige $\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$ für jede Lösung y (Resonanzkatastrophe!)

Aufgabe 132. Bestimme alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung[10]

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(x)$$

Was kann über das Langzeitverhalten ($x \to \infty$) der Lösungen gesagt werden?

---

[8] Lösung: 1, x, x^2, $e^x \sin(x)$, $e^x \cos(x)$

[9] Jede Lösung lässt sich eindeutig in der Form $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \frac{x}{2} \sin(x)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, schreiben.

[10] Jede Lösung lässt sich eindeutig in der Form $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 e^{-x} \sin(x) + \lambda_2 e^{-x} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(x + \varphi)$, mit $\varphi = \arcsin(-2/\sqrt{5})$, und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, schreiben. Für große x sind die exponentiell abklingenden Terme sehr klein, und die Lösung nahe bei der periodischen Lösung $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(x + \varphi)$.