Vorlesungsskriptum zu
Analysis für Physik und verwandte Fächer I

Stefan Haller

Inhaltsverzeichnis

Die aktuelle Version findet sich auf `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/APH.html`.

1. Vorbemerkungen

Einige der unzähligen Lehrbücher für Analysis sind [**J1, M1, H1, K1**]. Die jeweiligen zweiten Bände [**J2, M2, H2, K2**] decken in etwa den Stoff der Vorlesung "Analysis für Physik und verwandte Fächer 2"ab. [**J1, M1**] sind für PhysikstudentInnen bzw. angehende Igenieure geschrieben, [**H1, K1**] richten sich eher an MathematikstudentInnen. Grundlegendes zur Mengenlehre findet sich etwa in [**H1**], [**M1**], siehe aber auch [**C**].

1.1. Mengen.

1.1.1. Definition (Cantor[1]). Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.[2]

Die "wohlunterschiedenen Objekte unserer Anschauung oder unseres Denken" einer Menge werden ihre *Elemente* genannt. Ist A eine Menge und x ein Element von A dann schreiben wir $x \in A$. Ist x kein Element von A, so wird dies durch $x \notin A$ notiert. Zwei Mengen sind gleich wenn sie dieselben Elemente haben. Mengen die nur endlich viele Elemente besitzen werden *endliche Mengen* genannt. Ist A eine endliche Menge so bezeichnet $|A|$ die Anzahl ihrer Elemente.[3]

Mengen können durch explizite Auflistung ihrer Elemente angegeben werden, hierfür verwenden wir die geschungenen sogenannten *Mengenklammern.* Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge oder etwaige Wiederholungen an, etwa[4]

$$A := \{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} \quad \text{oder} \quad B := \{2, 3, 4, \dots, 42\}.$$

In diesem Fall gilt $1 \in A$, $1 \notin B$, $|A| = 3$ und $|B| = 41$.

Die folgenden Mengen werden uns oft begegnen, sie haben standardisierte Bezeichnungen:

$\emptyset = \{\}$	die leere Menge (keine Elemente)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen plus Null
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Sind A und B zwei Mengen, und ist jedes Element von A auch Element von B dann nennen wir A eine *Teilmenge* von B und schreiben $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$.

[1] Georg Cantor, 1845–1918.

[2] Dies wird als *naiver Mengenbegriff* bezeichnet, im Gegensatz zu axiomatischen Zugängen wie etwa der Zermelo–Fraenkel Mengenlehre.

[3] Für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A wird manchmal auch $\sharp A$ geschrieben.

[4] Das Zeichen ":=" in der Schreibweise $X := Y$ bedeuted Gleichheit nach Definition, X wird durch Y definiert.

Ist A keine Teilmenge von B so schreiben wir $A \not\subseteq B$ oder $A \not\supseteq B$.[5] Offensichtlich gilt $A = B$ genau dann wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$. Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$ dann wird A eine *echte Teilmenge* von B genannt und dies durch $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$ notiert.[6] Beispielsweise gilt

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wir mit der Menge der Punkte der *Zahlengerade* identifizieren. Dabei entspricht einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ jener Punkt auf der Zahlengerade mit x-Koordinate a. Wegen (1) können wir also auch die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, usw. als Teilmengen der Zahlengerade interpretieren. Malen wir mit Kreide oder Tinte einen Strich, gewinnen wir ein Bild der reellen Zahlen und ihrer Teilmengen. Der (gewaltige) Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist in diesem Bild allerdings nicht zu sehen.

Folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden als *allgemeine Intervalle* bezeichnet:[7]

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{kompaktes Intervall, } a < b \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall, } a < b \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall, } a < b \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall, } a < b \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} && \text{abgeschlossener Halbstrahl} \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} && \text{abgeschlossener Halbstrahl} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \text{offener Halbstrahl} \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \text{offener Halbstrahl} \\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R} && \text{Menge der reellen Zahlen}
\end{aligned}$$

Auch die folgenden Schreibweisen werden oft verwendet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &:= (0,\infty) && \mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\} \\
\mathbb{R}^+_0 &:= [0,\infty) && \mathbb{Q}^+_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\} \\
\mathbb{R}^- &:= (-\infty,0) && \mathbb{Q}^- := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} \\
\mathbb{R}^-_0 &:= (-\infty,0] && \mathbb{Q}^-_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \\
\mathbb{R}^\times &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} && \mathbb{Q}^\times := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}
\end{aligned}$$

1.1.2. Satz. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

---

[5] Beachte, dass aus $A \not\subseteq B$ nicht $B \subseteq A$ folgt.

[6] Manche Autoren verwenden $A \subset B$ synonym mit $A \subseteq B$. Die Schreibweise $A \subsetneq B$ macht jedenfalls unmissverständlich klar, dass eine echte Teilmenge gemeint ist.

[7] Manche Autoren verwenden die Bezeichnungen $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $[a,\infty[$, $]-\infty,b]$, $]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ und $]-\infty,\infty[$ für (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, (a,∞), $(-\infty,b)$ und $(-\infty,\infty)$. Die runden Klammern werden also durch umgekehrte eckige ersetzt.

Beweis. Der Beweis geht auf die griechische Antike zurück. Er bildet ein klassisches Beispiel eines *indirekten Beweises* und geht wie folgt. Zwei Fälle sind möglich, entweder $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oder $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Angenommen der erste Fall tritt ein, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Wir werden unten durch logisches Schlussfolgern daraus einen Widerspruch herleiten. Der erste Fall kann daher nicht eintreten. Bleibt nur der zweite, und daher muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gelten.

Nun aber zum Herzstück des Beweises. Indirekt angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \tag{2}$$

Durch Kürzen des Bruchs können wir auch erreichen:

$$p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd, d.h. haben größten gemeinsamen Teiler 1.} \tag{3}$$

Durch Quadrieren von (2) erhalten wir $2q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade. Daher muss auch p gerade sein, also existiert eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Durch Quadrieren folgt $p^2 = 4r^2$ und wegen $2q^2 = p^2$ daher $2q^2 = 4r^2$. Division durch 2 gibt $q^2 = 2r^2$, also ist q^2 gerade. Daher ist auch q gerade. Da p und q beide gerade sind, sind sie nicht teilerfremd, ein Widerspruch zu (3).

Die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ führt uns also auf einen Widerspruch. Wir schließen daraus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

1.1.3. Bemerkung. Die Methode die wir im Beweis von Satz 1.1.2 kennen gelernt haben, kann allgemeiner wie folgt beschrieben werden. Es sei P eine Aussage von der wir zeigen möchten, dass sie wahr ist.[8] Indirekt angenommen das Gegenteil $\neg P$, d.h. die Verneinung von P, wäre wahr.[9] Gelingt es aus dieser indirekten Annahme einen Widerspruch herzuleiten,[10] dann müssen wir diese Annahme verwerfen, $\neg P$ kann nicht wahr sein. Wir schließen daraus, dass P wahr ist.[11] Diese Beweismethode wird als *indirekter Beweis* bezeichnet, wir werden sie noch oft antreffen.

1.2. Einfache Konstruktionen mit Mengen. Für zwei Mengen A und B sind *Durchschnitt, Vereinigung* und *Mengendifferenz*[12] wie folgt definiert:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Zwei Mengen werden *disjunkt* genannt wenn sie leeren Durchschnitt haben.

[8] Im obigen Fall ist dies die Aussage: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
[9] Im obigen Fall ist dies die Aussage: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
[10] Dies bildet den Hauptteil des Beweises.
[11] Weil einer von zwei Fällen eintreten muss: entweder ist P wahr oder es ist $\neg P$ wahr.
[12] Für $A \setminus B$ wird manchmal auch $A - B$ geschrieben.

Für Mengen $A_1, \dots, A_n$ sind auch die folgenden Schreibweisen gebräuchlich:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Beachte $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{j=1}^n A_j$ sowie $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^n A_j$.

1.2.1. Beispiel. Bezeichne mit

$$\mathbb{N}_{\text{gerade}} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und mit

$$\mathbb{N}_{\text{ungerade}} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ungerade}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Dann gilt offensichtlich

$$\mathbb{N}_{\text{gerade}} \cap \mathbb{N}_{\text{ungerade}} = \emptyset \qquad \mathbb{N}_{\text{gerade}} \cup \mathbb{N}_{\text{ungerade}} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{gerade}} = \mathbb{N}_{\text{ungerade}} \qquad \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{ungerade}} = \mathbb{N}_{\text{gerade}}$$

Insbesondere sind die beiden Mengen $\mathbb{N}_{\text{gerade}}$ und $\mathbb{N}_{\text{ungerade}}$ disjunkt.

Sind A, B und C drei Mengen, dann gelten die beiden *Distributivgesetze:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Sind A und B zwei endliche Mengen dann gilt:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

$$|A \cup B| - |A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$$

Für zwei Mengen A und B ist ihr *kartesisches Produkt* als die Menge der geordneten Paare

$$A \times B := \big\{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\big\}$$

definiert.[13] Beachte, dass es bei den Paaren (a, b) sehr wohl auf die Reihenfolge ankommt, denn es gilt $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ genau dann wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Analog ist für Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ ihr kartesisches Produkt als die Menge der geordeten n-Tupel definiert:

$$\prod_{i=0}^n A_i := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \big\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \bigm| a_i \in A_i\big\}$$

Beachte, dass wieder $\prod_{i=1}^n A_i = \prod_{j=1}^n A_j$. Auch die Notation

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}} = \big\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A\big\}$$

[13]Hier ist mit (a, b) ein Zahlenpaar und nicht ein offenes Intervall gemeint!

wird oft verwendet.

1.2.2. Beispiel. Nach Descartes[14] können wir die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Menge der Punkte der Ebene identifizieren. Dabei entspricht einem Element $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ der Punkt der Ebene mit x-Koordinate a und y-Koordinate b. Analog entsprechen die Elemente von $\mathbb{R}^3$ den Punkten im 3-dimensionalen Raum.

1.2.3. Beispiel. Die Teilmenge $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ von $\mathbb{R}^2$ entspricht dem Einheitsquadrat in der Ebene, inklusive Randpunkte.

1.2.4. Beispiel. Die Teilmenge $\{0, 1\}^3 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ von $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entspricht den Ecken des Einheitswürfels im 3-dimensionalen Raum.

Für drei Mengen A, B und C gilt:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Sind A und B zwei endliche Mengen, dann ist

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

1.3. Abbildungen.

1.3.1. Definition. Seien A und B zwei Mengen. Unter einer *Funktion* oder einer *Abbildung* von A nach B verstehen wir eine Vorschrift die jedem Element von A ein eindeutiges Element in B zuordnet.[15]

Ist f eine Abbildung von A nach B dann notieren wir dies durch

$$f\colon\ A \to B.$$

Dabei wird A der *Definitionsbereich* und B der *Wertebereich* der Abbildung genannt. Ist $x \in A$ dann wird das durch die Abbildung f zugeordnete Element in B durch $f(x)$ bezeichnet und der *Funktionswert der Funktion f bei x* oder *das Bild von x unter f* genannt. Im Ausdruck $f(x)$ wird x auch als das *Argument* der Funktion bezeichnet. Zwei Abbildungen $f\colon\ A \to B$ und $g\colon\ C \to D$ sind gleich, genau dann wenn $A = C$, $B = D$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

1.3.2. Beispiel. Einfache Beispiele von Funktionen sind:

$$f_1\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := 17 \qquad \text{(konstante Funktion)}$$
$$f_2\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f_2(n) := 3n + 4$$
$$f_3\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad f_3(x) := x^2$$
$$f_4\colon\ \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) := \frac{1}{x^2 - 4}$$

---

[14] René Descartes, 1596–1650, auch unter dem Namen Renatus Cartesius bekannt, daher der Name *kartesisches* Produkt.

[15] Wir verwenden hier die Begriffe Funktion und Abbildung synonym. Es ist jedoch üblich nur reell- oder komplexwertige Abbildungen als Funktionen zu bezeichnen.

1.3.3. Beispiel. Beachte, dass der Ausdruck

$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad g(n) := \frac{n}{2} \tag{4}$$

keine Funktion definiert, da $\frac{n}{2}$ i.A. keine ganze Zahl ist, also nicht im angegebenen Wertebereich $\mathbb{Z}$ liegt.[16] Ebenso definiert der Ausdruck

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := \frac{1}{x} \tag{5}$$

keine Funktion, da nicht klar ist welchen Wert diese bei $x = 0$ annehmen soll.[17] Man sagt: "die 'Funktionen' (4) und (5) sind *nicht wohldefiniert.*"

1.3.4. Beispiel. Für die Angabe einer Funktion sind unzählige Notationen gebräuchlich. Um nur einige an einem konkreten Beispiel zu nennen:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) := \frac{1}{x^2}$$

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto y := \frac{1}{x^2}$$

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) := \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

$$f(x) := \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

$$y := \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Beachte, dass in den letzten drei Beispielen der Wertebereich der Funktion nicht angegeben wird. Bei diesen Notationen ist daher unklar ob eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ oder z.B. eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gemeint ist. In den letzten beiden Beispiel wird sogar der Definitionsbereich nur mehr angedeutet. Wenn aus dem Zusammenhang hervor geht welche Funktion damit wirklich gemeint ist, oder wenn Definitions- bzw. Wertebereich für die Problemstellung irrelevant sind, dann

---

[16] Dies lässt sich leicht beheben, denn $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(n) := \frac{n}{2}$ stellt eine Funktion dar. Genauso gut könnten wir diesen Makel aber z.B. auch so los werden $g\colon \mathbb{N}_{\text{gerade}} \to \mathbb{Z}$, $g(n) := \frac{n}{2}$. Streng genommen sind dies zwei verschiedene Funktionen, da ja Definitions- und Wertebereich nicht übereinstimmen. Welche dieser Funktionen am geeignetsten ist, hängt vom Kontext.

[17] Auch dies lässt sich beheben, denn $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) := \frac{1}{x}$ stellt eine Funktion dar. Wir könnten aber z.B. auch so eine wohldefierte Funktion erhalten:

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 7 & \text{falls x=0} \end{cases}$$

Die Definition $h(0) := 7$ wirkt willkürlich, ob sie geeignet ist hängt vom Zusammenhang ab.

haben die sparsamen Notationen sicherlich ihrer Vorteile. Um unmissverständlich klar zu machen von welcher Funktion die Rede ist, sollten Definitions- und Wertebereich angegeben werden, siehe die Diskussion in [**J1**, Seite 7ff].

Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen dann ist ihre *Komposition* auch *Verknüpfung* oder *Hintereinanderschaltung* durch

$$g \circ f\colon A \to C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

definiert, und wird als "g ring f" oder "g nach f" gelesen.[18] Für drei Funktionen $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ gilt stets

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{6}$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, die identische Abbildung, $\mathrm{id}_A(x) := x$. Für jede Funktion $f\colon A \to B$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_B \circ f = f. \tag{7}$$

1.3.5. Beispiel. Betrachte die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + 1$, und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Dann ist $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(g \circ f)(x) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ gegeben. Beachte, dass $g \circ f$ nicht mit $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$ überein stimmt.

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $S \subseteq A$ eine Teilmenge, dann verstehen wir unter der *Einschränkung von f auf S* die Abbildung

$$f|_S\colon S \to B, \quad (f|_S)(x) := f(x). \tag{8}$$

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $S \subseteq A$ eine Teilmenge, dann heißt

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\} \tag{9}$$

das *Bild der Teilmenge S unter f*. Beachte, dass für $x \in A$ gilt $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $T \subseteq B$ eine Teilmenge, dann heißt

$$f^{-1}(T) := \{x \in A \mid f(x) \in T\} \tag{10}$$

das *Urbild der Teilmenge T unter f*.

1.3.6. Proposition. *Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Weiters seien S_1, S_2 zwei Teilmengen von A, und T_1, T_2 zwei Teilmengen von B. Dann gilt:*

a) $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$
b) $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$
c) $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow f^{-1}(T_1) \subseteq f^{-1}(T_2)$.
d) $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$
e) $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$.
f) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow f(S_1) \subseteq f(S_2)$.

[18] Dabei ist es wesentlich, dass der Wertebereich von f mit dem Definitionsbereich von g übereinstimmt, da ja sonst der Ausdruck $g(f(x))$ keinen Sinn macht.

Beweis. Ad (a): Für $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(T_1 \cap T_2) &\Leftrightarrow f(x) \in T_1 \cap T_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in T_1 \quad \text{und} \quad f(x) \in T_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(T_1) \quad \text{und} \quad x \in f^{-1}(T_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2) \end{aligned}$$

Es folgt $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$. Genauso lässt sich (b) zeigen. Ad (c): Es sei $T_1 \subseteq T_2$. Ist $x \in f^{-1}(T_1)$, dann $f(x) \in T_1$ und wegen $T_1 \subseteq T_2$ daher $f(x) \in T_2$, also $x \in f^{-1}(T_2)$. Wir schließen $f^{-1}(T_1) \subseteq f^{-1}(T_2)$. Ad (d): Ist $y \in f(S_1 \cap S_2)$, dann existiert $x \in S_1 \cap S_2$ mit $f(x) = y$. Wegen $x \in S_1$ folgt $f(x) \in f(S_1)$, und aus $x \in S_2$ folgt $f(x) \in f(S_2)$. Daher gilt $y = f(x) \in f(S_1) \cap f(S_2)$. Damit ist $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$ gezeigt. Ad (e): Für $y \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(S_1 \cup S_2) &\Leftrightarrow \text{es existiert } x \in S_1 \cup S_2 \text{ mit } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{entweder existiert } x_1 \in S_1 \text{ mit } f(x_1) = y \\ &\qquad \text{oder es existiert } x_2 \in S_2 \text{ mit } f(x_2) = y \\ &\Leftrightarrow \text{entweder } y \in f(S_1) \text{ oder } y \in f(S_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(S_1) \cup f(S_2) \end{aligned}$$

Daher folgt $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$. Ad (f): Sei $S_1 \subseteq S_2$. Ist $y \in f(S_1)$, dann existiert $x \in S_1$ mit $f(x) = y$. Wegen $S_1 \subseteq S_2$ gilt auch $x \in S_2$, und wir erhalten $y = f(x) \in f(S_2)$. Damit ist $f(S_1) \subseteq f(S_2)$ gezeigt. □

1.3.7. Beispiel. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Dann gilt

$$f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-) = f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{und} \quad f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+.$$

Wir sehen daher, dass in Proposition 1.3.6(d) i.A. keine Gleichheit gilt.

1.3.8. Bemerkung. Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann können wir ihren *Graphen*

$$\Gamma_f := \big\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

betrachten. Identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene erhalten wir die vertrauten Bilder (der Graphen) von Funktionen.

1.4. Injektivität und Surjektivität.

1.4.1. Definition. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt *surjektiv* oder eine *Surjektion* falls gilt: Für jedes $b \in B$ existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = b$.[19] In Zeichen:

$$\forall b \in B\ \exists x \in A : f(x) = b$$

[19] Hierbei wird nicht ausgeschlossen, dass möglicherweise viele weitere Element $y \in A$, $y \neq x$, mit $f(y) = b$ existieren.

Die Abbildung $f\colon A \to B$ ist surjektiv, genau dann wenn für jedes fixe $b \in B$ die Gleichung $f(x) = b$ *zumindest eine* Lösung $x \in A$ besitzt. Mit Hilfe von (9) können wir dies auch so formulieren: Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist surjektiv genau dann wenn $f(A) = B$.

1.4.2. Beispiel. Die Funktion

$$f\colon \{1,2,3,4\} \to \{7,8,9\}, \quad f(1) := 9,\ f(2) := 7,\ f(3) := 9,\ f(4) := 8$$

ist surjektiv. Die Funktion

$$g\colon \{1,2,3,4\} \to \{7,8,9\}, \quad g(1) := 7,\ g(2) := 9,\ g(3) := 7,\ g(4) := 9$$

ist nicht surjektiv, da 8 nicht als Funktionswert von g auftritt.

1.4.3. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) := 2x$, ist surjektiv, denn ist $b \in \mathbb{Q}$ dann gilt $f(x) = b$ für $x = \frac{b}{2}$. Beachte jedoch, dass ihre Einschränkung $f|_{\mathbb{Q}^+}\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x$, nicht surjektiv ist, da sie ja nur positive Werte annimmt.

1.4.4. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht surjektiv, da sie nur positive Werte annimmt. Beachte aber, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) := x^2$, sehr wohl surjektiv ist, da jede nicht negative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt.

1.4.5. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_0^+$, $f(x) := x^2$, ist nicht surjektiv, denn z.B. $2 \in \mathbb{Q}_0^+$ ist nicht das Quadrat einer rationalen Zahl, siehe Satz 1.1.2.

Ob eine Abbildung surjektiv ist oder nicht hängt stark von ihrem Definitions- und Wertebereich ab, nicht bloß von ihrem "Bildungsgesetz." Ist $f\colon A \to B$ eine beliebige Abbildung, dann ist $\tilde{f}\colon A \to f(A)$, $\tilde{f}(x) := f(x)$, stets surjektiv. Jede Abbildung kann also durch geeignete Verkleinerung ihres Wertebereichs "surjektiv gemacht werden."

1.4.6. Proposition. *Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei surjektive Abbildungen, dann ist auch ihre Komposition $g \circ f\colon A \to C$ surjektiv.*

Beweis. Sei $c \in C$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv ist, existiert $a \in A$ mit $f(a) = b$. Wir erhalten dann $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Damit ist gezeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist. $\square$

1.4.7. Proposition. *Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen sodass $g \circ f\colon A \to C$ surjektiv ist. Dann ist auch g surjektiv.*

Beweis. Sei $c \in C$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = c$. Setzen wir $b := f(a)$ so folgt $g(b) = g(f(a)) = c$. Also ist g surjektiv. $\square$

1.4.8. Beispiel. Betrachte die Funktionen $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) := x^2$. Dann ist $g \circ f$ surjektiv, aber f ist nicht surjektiv. Aus der Surjektivität von $g \circ f$ kann also i.A. nicht auf die Surjektivität von f geschlossen werden, vgl. Proposition 1.4.7

1.4.9. Proposition. *Ist $f\colon A \to B$ eine surjektive Abbildung zwischen endlichen Mengen dann gilt $|A| \geq |B|$.*

Beweis. Sei $n := |B|$ und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Da f surjektiv ist, existieren $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ mit $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$. Die Elemente $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ müssen alle verschieden sein, denn ihre Funktionswerte unter f sind alle verschieden. Es folgt $|A| \geq n = |B|$. □

1.4.10. Definition. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt *injektiv* oder eine *Injektion* falls gilt: Für jedes $x \in A$ und jedes $y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gilt $x = y$. In Zeichen:

$$\forall x \in A\ \forall y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Etwas anders formuliert: Die Abbildung $f\colon A \to B$ ist injektiv genau dann wenn gilt: Für jedes $x \in A$ und jedes $y \in B$ mit $x \neq y$ gilt $f(x) \neq f(y)$. In Zeichen

$$\forall x \in A\ \forall y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

In anderen Worten, eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist injektiv genau dann wenn verschiedene Argumente auch verschiedene Bilder unter f haben. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist injektiv, genau dann wenn für jedes fixe $b \in B$ die Gleichung $f(x) = b$ *höchstens eine*[20] Lösung $x \in A$ besitzt. Noch etwas anders ausgedrückt, siehe (10), eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist injektiv genau dann wenn für jedes $b \in B$ die Teilmenge $f^{-1}(\{b\})$ von A aus höchstens einem Element besteht.[21]

1.4.11. Beispiel. Die Funktion

$$f\colon \{1,2,3\} \to \{6,7,8,9\}, \quad f(1) := 9,\ f(2) := 8,\ f(3) := 6$$

ist injektiv. Die Funktion

$$g\colon \{1,2,3\} \to \{6,7,8,9\}, \quad g(1) := 6,\ g(2) := 8,\ g(3) := 6$$

ist nicht injektiv, denn 1 und 3 werden unter g beide auf 6 abgebildet.

1.4.12. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) := 3n$, ist injektiv, denn aus $3n = 3m$ folgt $n = m$.

1.4.13. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nicht injektiv, da stets $f(x) = f(-x)$ gilt. Beachte jedoch, dass $f|_{\mathbb{R}^+}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, sehr wohl injektiv ist, denn eine relle Zahl hat höchstens eine positive Quadratwurzel. Ob eine Funktion injektiv ist oder nicht hängt daher nicht nur von ihrem "Bildungsgesetz," sondern auch von ihrem Definitionsbereich ab.

1.4.14. Proposition. *Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei injektive Abbildungen, dann ist auch ihre Komposition $g \circ f\colon A \to C$ injektiv.*

[20]möglicherweise gar keine

[21]d.h. ein oder kein Element besitzt.

Beweis. Seien $x, y \in A$ mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Aus der Definitions der Komposition erhalten wir $g(f(x)) = g(f(y))$. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = f(y)$, und wegen der Injektivität von f gilt daher $x = y$. Also ist $g \circ f$ injektiv. □

1.4.15. Proposition. *Es sein $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen sodass $g \circ f\colon A \to C$ injektiv ist. Dann ist auch f injektiv.*

Beweis. Seien $x, y \in A$ und $f(x) = f(y)$. Dann folgt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$. Da $g \circ f$ injektiv ist, erhalten wir $x = y$. Daher ist f injektiv. □

1.4.16. Beispiel. Betrachte die Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) := n$, und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) := n^2$. Dann ist $g \circ f$ injektiv, aber g ist nicht injektiv. Aus der Injektivität von $g \circ f$ kann daher i.A. nicht auf die Injektivität von g geschlossen werden, vgl. Proposition 1.4.15.

1.4.17. Proposition. *Ist $f\colon A \to B$ eine injektive Abbildung zwischen endlichen Mengen, dann gilt $|A| \leq |B|$.*

Beweis. Sei $n = |A|$ und $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Da f injektiv ist sind die Elemente $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in B$ alle verschieden. Es folgt $|B| \geq n = |A|$. □

1.4.18. Bemerkung. Die Begriffe "injektiv" und "surjektiv" sind unabhängig von einander: Es gibt Funktionen die injektiv aber nicht surjektiv sind, es gibt Funktionen die surjektiv aber nicht injektiv sind, es gibt Funktionen die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, und es gibt Funktionen die weder injektiv noch surjektiv sind.

1.5. Bijektivität und Umkehrabbildung.

1.5.1. Definition. Eine Abbildung heißt *bijektiv* oder eine *Bijektion* falls sie injektiv und surjektiv ist.

Die Abbildung $f\colon A \to B$ ist also bijektiv genau dann wenn zu jedem $b \in B$ genau ein[22] Element $x \in A$ existiert, für das gilt $f(x) = b$. D.h. für jedes fixe $b \in B$ hat die Gleichung $f(x) = b$ eine eindeutige Lösung $x \in A$.

Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon B \to A$ heißt *eine Umkehrabbildung* von f falls gilt

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B\,.$$

1.5.2. Proposition. *Eine Abbildung ist bijektiv genau dann wenn sie eine Umkehrabbildung besitzt. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung eindeutig bestimmt.*[23]

[22]d.h. ein und nur ein

[23]D.h. sind $g_1\colon B \to A$ und $g_2\colon B \to A$ zwei Umkehrabbildungen von f, dann gilt $g_1 = g_2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede Bijektion $f\colon A \to B$ eine Umkehrabbildung besitzt: Wir erinnern uns, dass auf Grund der Bijektivität von f, für jedes $b \in B$ ein eindeutiges $x \in A$ mit $f(x) = b$ existiert. Dies definiert eine Funktion $g\colon B \to A$ wobei $b \in B$ eben jenes $x \in A$ mit $f(x) = b$ zugeordnet wird. Offensichtlich gilt dann $f(g(b)) = b$ für jedes $b \in B$, sowie $g(f(x)) = x$ für jedes $x \in A$. Also ist g eine Umkehrabbildung zu f.

Als nächstes zeigen wir, dass wenn f eine Umkehrabbildung zulässt, f auch bijektiv sein muss: Sei dazu $g\colon B \to A$ eine Umkehrabbildung von f. Da $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und weil id_A injektiv ist, folgt aus Proposition 1.4.15, dass f injektiv ist. Da $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und weil id_B surjektiv ist, folgt aus Proposition 1.4.7, dass auch f surjektiv ist. Also ist f bijektiv.

Verbleibt noch die Eindeutigkeit der Umkehrabbildung nachzuweisen: Seien dazu $g_1\colon B \to A$ und $g_2\colon B \to A$ zwei Umkehrabbildungen von f. Insbesondere gilt $f \circ g_1 = \mathrm{id}_B$ und $g_2 \circ f = \mathrm{id}_A$. Zusammen mit (6) und (7) erhalten wir

$$g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2.$$

Damit ist $g_1 = g_2$, und der Beweis ist vollständig. □

Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 1.5.2 sprechen wir im Folgenden von *der* Umkehrabbildung einer Bijektion $f\colon A \to B$ und bezeichnen sie mit $f^{-1}\colon B \to A$. Klarerweise gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,. \tag{11}$$

Beachte, dass $f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$ für jede Bijektion $f\colon A \to B$ und $b \in B$.

1.5.3. Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) := \frac{1}{x-2}.$$

Die Umkehrabbildung von f kann wie folgt berechnet werden. Wir schreiben $y = \frac{1}{x-2}$, lösen diese Gleichung nach x, und erhalten $x = \frac{1}{y} + 2$. Wir vermuten daher, dass die Umkehrabbildung durch $f^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 2$ gegeben ist. Durch eine einfache Rechnung lässt sich dies sofort bestätigen.[24]

1.5.4. Proposition.

a) *Die identische Abbildung* $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ *ist eine Bijektion, und es gilt* $(\mathrm{id}_A)^{-1} = \mathrm{id}_A$.
b) *Ist* $f\colon A \to B$ *eine Bijektion, dann ist auch* $f^{-1}\colon B \to A$ *eine Bijektion, und es gilt* $(f^{-1})^{-1} = f$.

[24] Bei etwas komplizierteren Funktionen ist es oft völlig unklar ob sie bijektiv sind (eine Umkehrabbildung besitzen) oder nicht. Selbst wenn schon bekannt ist, dass eine Umkehrfunktion existiert, kann es sehr schwierig (oft unmöglich) sein diese explizit zu berechnen, d.h. durch uns vertraute Funktionen auszudrücken. Die Analysis stellt Methoden zur Verfügung mit denen diese Fragen behandelt werden können.

c) *Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Bijektionen, dann ist auch ihre Komposition $g\circ f\colon A \to C$ eine Bijektion, und es gilt $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.*

Beweis. Ad (a): Dies ist offensichtlich. Ad (b): Sei also f eine Bijektion und f^{-1} ihre Umkehrabbildung. Dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Diese Gleichungen besagen aber auch, dass f eine Umkehrabbildung zu f^{-1} ist. Daher ist f^{-1} bijektiv, siehe Proposition 1.5.2, und $(f^{-1})^{-1} = f$. Ad (c): Seien also $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Bijektionen mit Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1}. Dann gilt

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

und

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C .$$

Diese beiden Gleichungen besagen, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ eine Umkehrabbildung von $g \circ f$ ist. Daher ist $g \circ f$ bijektiv, siehe Proposition 1.5.2, und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

1.5.5. Proposition. *Ist $f\colon A \to B$ eine Bijektion zwischen zwei endlichen Mengen, dann gilt $|A| = |B|$.*

Beweis. Nach Proposition 1.4.9 gilt $|A| \geq |B|$. Aus Proposition 1.4.17 erhalten wir $|A| \leq |B|$. Es muss daher $|A| = |B|$ gelten. □

1.5.6. Proposition. *Es sei A eine endliche Menge und $f\colon A \to A$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

a) *f ist injektiv.*
b) *f ist surjektiv.*
c) *f ist bijektiv.*

Beweis. Sei $n := |A|$ und $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Dann gilt

$$f(A) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\} \subseteq A.$$

Ad (a)⇒(b): Sei also f injektiv. Dann sind $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n) \in A$ alle verschieden. Also hat die Teilmenge $f(A)$ genau n Elemente. Da A ebenso aus n Elementen besteht, muss $f(A) = A$ gelten. Also ist f surjektiv. Ad (b)⇒(a): Sei also f surjektiv. Indirekt angenommen f wäre nicht injektiv. Dann stimmen mindestens zwei der Elemente $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n) \in A$ überein. Also besteht die Menge $f(A)$ aus höchstens $n-1$ Elementen. Da A aus n Elemente besteht, folgt $f(A) \neq A$. Daher ist f nicht surjektiv, ein Widerspruch. Also muss f injektiv sein, siehe Bemerkung 1.1.3. Ad (b)⇒(c): Sei also f surjektiv. Wir haben bereits gezeigt, dass dann f auch injektiv ist. Also ist f bijektiv. Ad (c)⇒(a): Dies ist trivial. □

1.5.7. Bemerkung. Die Aussage von Proposition 1.5.6 bleibt für Mengen mit unendlich vielen Elementen nicht richtig. Etwa ist $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$, eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung.

1.5.8. Bemerkung. Unter einer *Permutation* einer Menge A verstehen wir eine Bijektion von A nach A. Die Menge aller Permutationen einer Menge A wird die *Permutationsgruppe* von A genannt und mit $\mathfrak{S}(A)$ bezeichnet. Sind $f_1, f_2 \in \mathfrak{S}(A)$, so ist auch $f_1 \circ f_2 \in \mathfrak{S}(A)$, siehe Proposition 1.5.4(c). Wir können die Komposition von Permutationen daher als Abbildung

$$\mathfrak{S}(A) \times \mathfrak{S}(A) \to \mathfrak{S}(A), \quad (f_1, f_2) \mapsto f_1 \circ f_2$$

auffassen. Weiters ist $\mathrm{id}_A \in \mathfrak{S}(A)$, und für $f \in \mathfrak{S}(A)$ auch $f^{-1} \in \mathfrak{S}(A)$, siehe Proposition 1.5.4. Für $f, f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{S}(A)$ gilt, siehe (6), (7) und (11):

a) $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$
b) $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_A \circ f$
c) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A = f \circ f^{-1}$

Diese Relationen werden *Gruppenaxiome* genannt.

1.5.9. Bemerkung. Unter einer *Gruppe* verstehen wir ein Paar $(G, \otimes)$ wobei G eine Menge und $\otimes\colon G \times G \to G$ eine Abbildung ist, die die unten aufgelisteten Bedingungen (die Gruppenaxiome) erfüllt. Es ist üblich $g_1 \otimes g_2$ statt $\otimes(g_1, g_2)$ zu schreiben, $g_1, g_2 \in G$.

a) Für $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt $g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3) = (g_1 \otimes g_2) \otimes g_3$. (Assoziativität)
b) Es existiert $e \in G$, sodass für alle $g \in G$ gilt $g \otimes e = g = e \otimes g$. (neutrales Element.[25])
c) Für jedes $g \in G$ existiert $h \in G$, sodass gilt $g \otimes h = e = h \otimes g$. (Inverses von g[26])

Gilt darüber hinaus $g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$ so wird $(G, \otimes)$ eine *Abelsche*[27] oder *kommutative* Gruppe genannt. Mehr Details finden sich z.B. in [**J1**, Kapitel 18.1].

1.5.10. Beispiel. Es sei A eine Menge. Nach Bemerkung 1.5.8 ist $(\mathfrak{S}(A), \circ)$ eine Gruppe. Dabei ist id_A das neutrale Element. Das Inverse ist durch die Umkehrabbildung gegeben. Die Gruppe $\mathfrak{S}(A)$ ist für $|A| > 2$ nicht kommutative, d.h. es gilt i.A. $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

1.5.11. Beispiel. Die nicht verschwindenden rationalen Zahlen zusammen mit der üblichen Multiplikation $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ bilden eine kommutative Gruppe. Dabei ist $1 \in \mathbb{Q}^\times$ das neutrale Element. Das Inverse zu $a \in \mathbb{Q}^\times$ ist durch $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^\times$ gegeben. Auch die positiven rationalen Zahlen zusammen mit der Multiplikation $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ bilden eine kommutative Gruppe.

---

[25]Es kann nur ein neutrales Element geben, denn sind $e, e' \in G$ zwei neutrale Elemente dann folgt $e = e \otimes e' = e'$.

[26]Es kann nur ein solches h geben, denn sind h und h' zwei Inverse von $g \in G$, dann gilt $h = e \otimes h = (h' \otimes g) \otimes h = h' \otimes (g \otimes h) = h' \otimes e = h'$, vgl. den Beweis von Proposition 1.5.2. Wir sprechen daher von *dem* Inversen von g und bezeichnen es mit g^{-1}.

[27]Niels Henrik Abel, 1802– 1829.

1.5.12. Beispiel. Die nicht verschwindenden reellen Zahlen zusammen mit der üblichen Multiplikation $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ bilden eine kommutative Gruppe. Dabei ist $1 \in \mathbb{R}^\times$ das neutrale Element, und das Inverse zu $a \in \mathbb{R}^\times$ ist durch $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^\times$ gegeben. Auch die positiven reellen Zahlen zusammen mit der Multiplikation $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ bilden eine kommutative Gruppe.

1.5.13. Beispiel. Die ganzen Zahlen zusammen mit der üblichen Addition $(\mathbb{Z}, +)$ bilden eine kommutative Gruppe. Dabei ist $0 \in \mathbb{Z}$ das neutrale Element. Das Inverse zu $a \in \mathbb{Z}$ ist durch $-a$ gegeben. Auch die rationalen Zahlen zusammen mit der üblichen Addition $(\mathbb{Q}, +)$ bilden eine kommutative Gruppe. Ebenso bilden die reellen Zahlen zusammen mit der üblichen Addition $(\mathbb{R}, +)$ eine kommutative Gruppe.

1.5.14. Beispiel. Die invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation bilden eine i.A. nicht kommutative Gruppe, siehe die Lineare Algebra Vorlesung.

1.6. Einfache kombinatorische Tatsachen. Sind A und B zwei Mengen, dann bezeichnet B^A die Menge aller Funktionen von A nach B.

1.6.1. Proposition. *Für zwei endliche Mengen A und B gilt $|B^A| = |B|^{|A|}$.*

Beweis. Sei $n := |A|$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Weiters sei $m := |B|$. Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist durch ihre Funktionswerte $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in B$ eindeutig bestimmt. Da B aus m Elementen besteht, gibt es genau m Möglichkeiten den Funktionswert $f(a_1) \in B$ festzulegen. Unabhängig davon gibt es m Möglichkeiten für $f(a_2) \in B$. Ganz allgemein, haben wir für den Funktionswert $f(a_i)$ genau m Möglichkeiten, unabhängig von den bereits gewählten Funktionswerten $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{i-1})$. Insgesamt erhalten wir also

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{n \text{ mal}} = m^n = |B|^{|A|}$$

Möglichkeiten eine Funktion von A nach B festzulegen. □

1.6.2. Beispiel. Es sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B := \{5, 6, 7, 8\}$. Dann gibt es genau $|B|^{|A|} = 4^6 = 4096$ verschiedene Funktionen von A nach B, und genau $|A|^{|B|} = 6^4 = 1296$ verschiedene Funktionen von B nach A.

1.6.3. Beispiel. Im Toto wird auf den Ausgang von zwölf ausgewählten Fußballspielen gewettet. Bei jedem dieser Spiele ist anzukreuzen ob Team 1 gewinnt, Team 2 gewinnt oder Unentschieden gespielt wird. Bezeichne

$$A := \{1, 2, 3, \dots, 12\} \quad \text{und} \quad B := \{1, 2, X\}.$$

Bei der Abgabe eines Tipps im Toto muss also eine Funktion $f\colon A \to B$ festgelegt werden. Nach Proposition 1.6.1 hat man sich also für eine von $|B|^{|A|} = 3^{12} = 531441$ verschiedenen Möglichkeiten zu entscheiden.

Ist A eine Menge, dann wird die Menge aller Teilmengen von A die *Potenzmenge* von A genannt und mit $P(A)$ bezeichnet.

1.6.4. Proposition. *Für eine endliche Menge A gilt $|P(A)| = 2^{|A|}$.*

Beweis. Es sei $n := |A|$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Eine Teilmenge von A ist dadurch eindeutig bestimmt, dass wir zu jedem Element $a_i \in A$ angeben ob es Element dieser Teilmenge ist oder nicht. Dies sind zwei Möglichkeiten für jedes a_i. Insgesamt erhalten wir also

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ mal}} = 2^n = 2^{|A|}$$

Möglichkeiten eine Telmenge von A festzulegen. □

1.6.5. Bemerkung. Beachte, dass die Formel in Proposition 1.6.4 der in Proposition 1.6.1 sehr ähnlich sieht ($|B| = 2$.) Dies ist kein Zufall, ein alternativer Beweis von Proposition 1.6.4 kann auch durch Rückführung auf Proposition 1.6.1 wie folgt geführt werden. Betrachte die Abbildung

$$\phi\colon \{0,1\}^A \to P(A), \quad f \mapsto \{x \in A \mid f(x) = 1\}. \tag{12}$$

Es ist leicht einzusehen, dass (12) eine Bijektion ist. Nach Proposition 1.5.5 gilt daher $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$. Wegen Proposition 1.6.1 wissen wir $|\{0,1\}^A| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$. Daher folgt $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Wir erinnern uns an die Definition der Fakultäten,

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Definition $0! := 1$ erscheint geeignet, denn

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

1.6.6. Proposition. *Für eine endliche Menge A gilt $|\mathfrak{S}(A)| = |A|!$.*

Beweis. Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.6.1 vor. Da die Menge der Permutationen von A mit der Menge der injektiven Abbildungen $A \to A$ überein stimmt, siehe Proposition 1.5.6, genügt es die Anzahl der injektiven Abbildungen $A \to A$ zu bestimmen. Sei $n := |A|$ und $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Eine Funktion $f\colon A \to A$ ist durch ihre Funktionswerte $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in A$ eindeutig bestimmt. Wir haben n Möglichkeiten $f(a_1) \in A$ festzulegen. Da die Funktion injektiv werden soll, verbleiben für den Funktionswert $f(a_2) \in A$ nur $n-1$ Möglichkeiten, es muss ja $f(a_2) \neq f(a_1)$ gelten. Aus dem selben Grund haben wir bloß $n-2$ Möglichkeiten $f(a_3) \in A$ vorzuschreiben, denn es muss $f(a_3) \neq f(a_1)$ und $f(a_3) \neq f(a_2)$ gelten. Ganz allgemein verbleiben uns $n-k$ Möglichkeiten $f(a_k)$ festzulegen, $1 \leq k \leq n$. Insgesamt erhalten wir

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Möglichkeiten eine injektive Fuktion $A \to A$ festzulegen. Daher gilt $|\mathfrak{S}(A)| = n! = |A|!$. □

1.6.7. Beispiel. Die Permutationsgruppe der Menge $\{1,2,3,\dots,n\}$ wird mit

$$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}\big(\{1,2,3,\dots,n\}\big)$$

bezeichnet. Nach Proposition 1.6.6 gilt $|\mathfrak{S}_n| = n!$. Z.B. gibt es genau $7! = 5040$ Permutationen der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

1.6.8. Beispiel. Adele plant eine Österreichrundreise. Sie startet in München und will jede der neun Landeshauptstädte genau einmal besuchen, ist sich aber über die Reihenfolge noch unklar. Nach Proposition 1.6.6 kann sie aus $9! = 362880$ möglichen Rundreisen wählen.

Für die Formulierung des nächsten Resultats, siehe Proposition 1.6.12 unten, erinnern wir uns an die Definition der *Binomialkoeffizienten*. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ sind sie durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{14}$$

definiert, und werden als "n über k" gelesen. Auch folgende rekursive Beziehung werden wir verwenden.

1.6.9. Lemma. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

1.6.10. Bemerkung. Wegen Lemma 1.6.9 lassen sich die Binomialkoeffzienten rekursiv berechnen (Pascal'sches Dreieck.) Auch sehen wir aus dieser Formel, dass die Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind.

1.6.11. Bemerkung. Im Beweis von Proposition 1.6.12 unten werden wir eine neue Beweismethode verwenden, den *Beweis durch vollständige Induktion.* Angenommen $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ sind Aussagen von denen wir zeigen wollen, dass sie alle wahr sind. Im Induktionsbeweis sind zwei Dinge zu verifizieren:

a) *Induktionsbeginn:* P_0 wahr ist.[28]
b) *Induktionsschritt:* Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und sind $P_0, P_1, \dots, P_n$ alle wahr, dann muss auch P_{n+1} wahr sein.[29]

Gelingt dies, dann müssen offensichtlich alle Aussagen $P_0, P_1, P_2, \dots$ wahr sein.

1.6.12. Proposition. *Es sei A eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$. Dann gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von A.*

[28]Dies ist meist sehr leicht.

[29]D.h. $P_0, P_1, \dots, P_n$ werden als bewiesen angenommen (dies wird als *Induktionsvoraussetzung* bezeichnet) und es ist daraus P_{n+1} abzuleiten.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n, siehe Bemerkung 1.6.11. Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachte die Aussage:

P_n: Ist A eine endliche Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$, dann gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von A.

Die Aussage P_0 ist offensichtlich wahr, denn es existiert nur eine Menge A mit 0 Elementen, nämlich die leere Menge $A = \emptyset$. Diese hat nur eine Teilmenge, die leere Menge. Wegen $0 \leq k \leq n = 0$ ist nur $k = 0$ zu berachten, und es gilt tatsächlich $\binom{0}{0} = 1$, siehe (14). Damit ist die Aussage P_0 bewiesen und der Induktionsbeginn erledigt.

Nun zum Induktionsschritt von n auf $n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung dürfen wir P_n als wahr annehmen und müssen zeigen, dass dann auch P_{n+1} gilt. Sei also A eine Menge mit $n+1$ Elementen,

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} = \underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}_{A'} \cup \{a_{n+1}\}$$

O.B.d.A.[30] sei $k \neq 0$.[31] Jede k-elementigen Teilmengen von A ist entweder von der Form S_1 wobei S_1 eine k-elementige Teilmenge von A' ist, oder sie ist von der Form $S_2 \cup \{a_{n+1}\}$ wobei S_2 eine $(k-1)$-elementige Teilmenge von A' ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementigen Teilmengen von A', und genau $\binom{n}{k-1}$ verschiedene $(k-1)$-elementige Teilmengen von A'. Daraus folgt, dass genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von A existieren. Nach Lemma 1.6.9 sind dies genau $\binom{n+1}{k}$ viele. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Wir schließen, siehe Bemerkung 1.6.11, dass die Aussage P_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Damit ist die Proposition bewiesen. □

1.6.13. Beispiel. Beim österreichischen Lotto wird auf den Ausgang einer Ziehung von 6 aus 45 Zahlen gewettet. Beim Ausfüllen des Lottoscheins sind 6 von 45 Zahlen anzukreuzen, d.h. es ist eine 6-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 45\}$ festzulegen. Nach Proposition 1.6.12 muss man sich daher für eine von

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{6!39!} = \frac{40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8145060$$

Möglichkeiten entscheiden.

[30]d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

[31]Damit ist gemeint, dass im Fall $k = 0$ die Behauptung offensichtlich richtig ist, und wir im Folgenden daher nur den Fall $k \neq 0$ betrachten müssen. (Im Fall $k = 0$ ist die Anzahl der 0-elementigen Teilmengen von A zu bestimmen, davon gibt es aber bloß eine, die leere Menge. Wegen $\binom{n+1}{0} = 1$ ist die Behauptung für $k = 0$ daher richtig.)

Wir wollen hier noch eine typische Anwendung der vollständigen Induktion besprechen. Für Zahlen a_i schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Beachte, $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

1.6.14. Proposition. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist die Formel trivialerweise gültig. Damit ist der Induktionsbeginn erledigt. Nun zum Induktionsschritt von n auf $n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir erhalten daraus

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, und die Proposition bewiesen. □

1.7. Mächtigkeit von Mengen. Zwei Mengen A und B werden als *gleichmächtig* bezeichnet, falls eine Bijektion $f\colon A \to B$ existiert. Sind A und B endliche Mengen so ist dies genau dann der Fall, wenn A und B gleich viele Elemente besitzen. Der Begriff der Gleichmächtigkeit verallgemeinert daher den Begriff "gleich viele Elemente" auf beliebige Mengen. Ist eine Menge gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, dann wird sie *abzählbar* genannt. Eine Menge A ist also abzählbar falls

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

wobei $a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ falls $i \neq j$.

1.7.1. Beispiel. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, \dots\}.$$

1.7.2. Beispiel. Die Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, denn

$$\mathbb{N}^2 = \Big\{(1,1), \underbrace{(1,2),(2,1)}_{\text{Summe 3}}, \underbrace{(1,3),(2,2),(3,1)}_{\text{Summe 4}}, \underbrace{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}_{\text{Summe 5}}, \dots\Big\}.$$

Eine etwas verfeinerte Version dieses Arguments zeigt, dass auch die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

1.7.3. Satz (Cantor). *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Der Beweis geht auf Georg Cantor zurück und ist unter dem Namen *Cantorsches Diagonalverfahren* bekannt. Er stellt ein weiters Beispiel eines indirekten Beises dar, siehe Bemerkung 1.1.3.

Indirekt angenommen $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann gilt

$$\mathbb{R} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \tag{15}$$

für gewisse reelle Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$. Bezeichne mit

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1.c_1^1 c_1^2 c_1^3 c_1^4 \cdots \\ a_2 &= b_2.c_2^1 c_2^2 c_2^3 c_2^4 \cdots \\ &\vdots \\ a_i &= b_i.c_i^1 c_i^2 c_i^3 c_i^4 \cdots \qquad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

die Dezimalentwicklung der a_i. Hier bildet $b_i \in \mathbb{Z}$ die Vorkommestellen von a_i und $c_i^j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ist die j-te Nachkommastelle von a_i. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wähle $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$, sodass $c_i^i \neq d_i$. Betrachte nun die reelle Zahl:

$$x := 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots$$

Die erste Nachkommastelle von a_1 ist c_1^1, die erste Nachkommastelle von x ist d_1. Nach Konstruktion ist $c_1^1 \neq d_1$, also haben a_1 und x verschiedene erste Nachkommastellen, und es gilt daher $x \neq a_1$. Ebenso unterscheiden sich a_2 und x in der zweiten Nachkommastelle, und daher $x \neq a_2$. Ganz allgemein, unterscheiden sich a_i und x in der i-ten Nachkommastelle. Wir schließen, dass keine der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ mit x übereinstimmt. Es gilt also $x \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$. Dies liefert nun einen Widerspruch zu (15), denn $x \in \mathbb{R}$. □

1.7.4. Bemerkung. Die folgende Aussage wird als *Kontinuumshypothese* bezeichnet: Ist $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, dann tritt einer der folgenden drei Fälle ein: S ist endlich, oder S ist abzählbar, oder S ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$. Gödel[32] hat gezeigt, dass die Kontinuumshypothese aus den gängigen Axiomensystem der Mengenlehre nicht widerlegt werden kann. Cohen[33] hat gezeigt, dass sie aus ihnen auch nicht hergeleitet werden kann. Sie ist daher unabhängig von den gängigen Axiomensystemen der Mengenlehre, vgl. etwa die Rolle des Parallelenaxioms in der Euklidischen Geometrie.

1.8. Die reellen Zahlen. Wir wollen uns hier auf einen axiomatischen Standpunkt stellen und eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften (Axiome) der reellen Zahlen auflisten, die wir als gegeben hinnehmen. Alle uns vetrauten Rechenregeln der reellen Zahlen lassen sich aus ihnen herleiten, wir werden dies hier aber nicht in aller Ausführlichkeit tun. Es lässt sich zeigen, dass dieses Axiomensytem die reellen Zahlen eindeutig festlegt. Auch ist es möglich (mit etwas

[32] Kurt Gödel, 1906–1978.

[33] Paul Joseph Cohen, 1934–

Mühe) die reellen Zahlen aus den natürlichen zu konstruieren, darauf können wir hier aber auch nicht eingehen.

Die Axiome der reellen Zahlen können in drei Gruppen eingeteilt werden: die Körperaxiome, die Ordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die rationalen Zahlen erfüllen ebenfalls die Körperaxiome sowie die Ordnungsaxiome, nicht aber das Vollständigkeitsaxiom, siehe Abschnitt 1.9.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden sogenannten *Körperaxiome:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{Assoziativität der Addition} \tag{16}$$

$$a + b = b + a \qquad \text{Kommutativität der Addition} \tag{17}$$

$$0 + a = a \qquad \text{neutrales Element der Addition} \tag{18}$$

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{Inverses bzgl. der Addition} \tag{19}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \text{Assotiativität der Multiplikation} \tag{20}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{Kommutativität der Multiplikation} \tag{21}$$

$$1 \cdot a = a \qquad \text{neutrales Element der Multiplikation} \tag{22}$$

$$1 \neq 0 \tag{23}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad \text{Inverses bzgl. der Multiplikation } (a \neq 0) \tag{24}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{Distributivgesetz} \tag{25}$$

1.8.1. Bemerkung. Die ersten vier Axiome besagen, dass die reellen Zahlen zusammen mit der Addition $(\mathbb{R}, +)$ eine kommutative Gruppe bilden, siehe Bemerkung 1.5.9. Die nächsten fünf Axiome besagen, dass die nicht verschwindenden reellen Zahlen $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ eine kommutative Gruppe bilden.[34] Addition und Multiplikation sind im Sinne des Distributivgesetzes verträglich.

1.8.2. Bemerkung. Unter einem Körper verstehen wir ein Trippel $(K, \oplus, \otimes)$ wo K eine Menge und $\oplus\colon K \times K \to K$ sowie $\otimes\colon K \times K \to K$ zwei Abbildung sind, die die unten aufgelisteten Körperaxiome erfüllt. Wir schreiben $a \oplus b := \oplus(a, b)$ und $a \otimes b := \otimes(a, b)$.

a) $(K, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe. Das neutrale Element wird mit 0 bezeichnet, siehe Bemerkung 1.5.9.
b) $(K \setminus \{0\}, \otimes)$ ist eine kommutative Gruppe. Das neutrale Element wird mit 1 bezeichnet, siehe Bemerkung 1.5.9.
c) $k_1 \otimes (k_2 \oplus k_3) = (k_1 \otimes k_2) \oplus (k_1 \otimes k_3)$ (Distributivgesetz, $k_1, k_2, k_3 \in K$.)

Beispiele sind: der Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; der Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, siehe Abschnitt 1.10. Auch $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ist ein Körper, wobei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Der

[34] Beachte, dass 0 kein Inverses bzgl. der Muliplikation hat, d.h. es existiert kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 0 = 1$. Daher ist $(\mathbb{R}, \cdot)$ keine Gruppe.

kleinste Körper hat übrigens nur zwei Elemente, 0 und 1, und wird üblichweise mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet. In ihm gilt $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$, $0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0$ und $1\cdot 1=1$. Mehr über Körper findet sich z.B. in [**J1**, Kapitel 18.2] oder [**H1**, Kapitel I.3].

1.8.3. Bemerkung. Alle uns vertrauten Rechengesetze der reellen Zahlen lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten. Etwa folgt aus (18) $0+0=0$, wegen (25) daher $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$ und durch Addition von $-(a\cdot 0)$ erhalten wir

$$a\cdot 0=0, \qquad a\in\mathbb{R}.$$

Unter Verwendung von (19) und (25) folgt daraus $0=a\cdot 0=a\cdot(b+(-b))=a\cdot b+a\cdot(-b)$ woraus wir durch Addition von $-(a\cdot b)$

$$-(a\cdot b)=a\cdot(-b), \qquad a,b\in\mathbb{R},$$

erhalten. Mehr Details finden sich in [**H1**, Kapitel I.4] oder [**J1**, Kapitel 18.2].

Die ganzahligen Potenzen reeller Zahlen sind wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} a^n &:= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ mal}} && a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \\ a^{-n} &:= \frac{1}{a^n}=\frac{1}{a\cdot a\cdot a\cdots a} && a\neq 0,\ n\in\mathbb{N}. \\ a^0 &:= 1 && a\in\mathbb{R} \text{ (also auch } 0^0=1) \end{aligned}$$

Für $a\neq 0$ sind daher alle ganzzahligen Potenzen a^n erklärt, $n\in\mathbb{Z}$, und es gilt:

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m, \quad (a^n)^m=a^{nm}, \quad (ab)^n=a^n\cdot b^n, \qquad a,b\neq 0,\ n,m\in\mathbb{Z} \tag{26}$$

Für $a=0$ ist a^n nur für $n\in\mathbb{N}_0$ definiert, und es gilt:

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m, \quad (a^n)^m=a^{nm}, \quad (ab)^n=a^n\cdot b^n, \qquad a,b\in\mathbb{R},\ n,m\in\mathbb{N}_0 \tag{27}$$

1.8.4. Proposition (Geometrische Summenformel). *Für $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 1$, und $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\sum_{i=0}^n a^i=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Beweis. Für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt

$$(1-a)\sum_{i=0}^n a^i=\sum_{i=0}^n a^i-a\sum_{i=0}^n a^i=\sum_{i=0}^n a^i-\sum_{i=1}^{n+1} a^i=a^0-a^{n+1}=1-a^{n+1}.$$

Division durch $1-a$ liefert nun die gewünschte Formel. □

1.8.5. Proposition (Binomischer Lehrsatz). *Seien $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Beweis. Multiplizieren wir

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ mal}}$$

aus, so erhalten wir Terme der Form

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2, \dots, a^{n-k}b^k, \dots, a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n.$$

Der Term $a^{n-k}b^k$ tritt auf, wenn wir aus k der n Faktoren b wählen und in den restlichen a. Nach Proposition 1.6.12 gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus den n Faktoren k auszuwählen. Daher tritt der Term $a^{n-k}b^k$ beim Ausmultiplizieren genau $\binom{n}{k}$ mal auf. Damit ist die Proposition bewiesen. □

1.8.6. Korollar. *Es gilt:*[35]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wenden wir Proposition 1.8.5 mit $a = b = 1$ an so erhalten wir die erste Formel. Die zweite Formel folgt mit $a = 1$ und $b = -1$ ebenfalls aus Proposition 1.8.5. □

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist a *strikt*[36] kleiner als b so schreiben wir $a < b$ und $b > a$. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die sogenannten *Ordnungsaxiome:*

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c \qquad \text{(Transitivität)} \tag{28}$$

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad \text{(Translationsinvarianz)} \tag{29}$$

$$a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc \qquad \text{(Streckungsinvarianz)} \tag{30}$$

Darüber hinaus tritt für $a, b \in \mathbb{R}$ einer und nur einer der folgenden drei Fälle ein:

$$a < b, \quad b < a \quad \text{oder} \quad a = b. \tag{31}$$

Wir schreiben $a \leq b$ und sagen “a ist kleiner oder gleich b” falls gilt: $a < b$ oder $a = b$. Analog schreiben wir $a \geq b$ und sagen “a ist größer oder gleich b” falls gilt: $a > b$ oder $a = b$.

1.8.7. Bemerkung. Alle vertrauten Rechenregeln für Ungleichungen reeller Zahlen folgen aus den Ordnungsaxiomen und den Körperaxiomen. Ist etwa $a < b$

[35] Die erste Gleichung kann auch wie folgt interpretiert werden. Sei $A := \{1, 2, \dots, n\}$. Nach Proposition 1.6.12 gibt es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von A. Also stimmt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ mit der Anzahl der Teilmengen von A überein. Nach Proposition 1.6.4 hat A genau 2^n Teilmengen, also $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

[36] d.h. insbesondere $a \neq b$

und $c < d$ dann folgt aus (29) $a + c < b + c$ sowie $c + b < d + b$, mit Hilfe von (17) und (28) erhalten wir also

$$a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ganz ähnlich lässt sich zeigen

$$0 < a < b,\ 0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd.$$

Daraus folgt nun

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^k < b^k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Auch lässt sich leicht zeigen, dass

$$a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

sowie

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \tfrac{1}{b} < \tfrac{1}{a}. \tag{33}$$

Weiters gilt $ab > 0$ genau dann wenn entweder beide Faktoren positive oder beide Faktoren negativ sind. Mittels (31) folgt daraus $a^2 > 0$ für alle $a \neq 0$, also auch $a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Mehr Details können in [**H1**, Kapitel I.5] oder [**K1**, Kapitel 2.2] gefunden werden.

1.8.8. Proposition (Bernoulli Ungleichung). *Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*[37]

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n, siehe Bemerkung 1.6.11. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Damit ist der Induktionsbeginn gezeigt. Nun zum Induktionsschritt von n auf $n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) &\geq (1 + na)(1 + a) \\ &= 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.\end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung haben wir die Induktionsvoraussetzung und $1 + a \geq 0$ verwendet, in der zweiten $na^2 \geq 0$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. □

Der *Absolutbetrag* einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird wie folgt definiert:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

1.8.9. Proposition. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $|a| \geq 0$, *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$. *(Definitheit)*
b) $|ab| = |a| \cdot |b|$. *(Multiplikativität)*
c) $|a + b| \leq |a| + |b|$. *(Dreiecksungleichung)*

[37] Jakob Bernoulli, 1655–1705.

Beweis. (a) ist offensichtlich, denn für $a < 0$ ist $-a > 0$. Ad (b): Wir unterscheiden vier Fälle: Ist $a \geq 0$ und $b \geq 0$ dann ist auch $ab \geq 0$, daher $|ab| = ab$, $|a| = a$, $|b| = b$, also $|ab| = |a| \cdot |b|$. Ist $a < 0$ und $b < 0$ dann $ab > 0$, daher $|ab| = ab$, $|a| = -a$, $|b| = -b$, also wieder $|ab| = |a| \cdot |b|$. Ist $a \geq 0$ und $b < 0$ dann $ab \leq 0$, daher $|ab| = -ab$, $|a| = a$, $|b| = -b$, also $|ab| = |a| \cdot |b|$. Genauso lässt sich der letzte Fall $a < 0$ und $b \geq 0$ behandeln. Ad (c): Beachte, dass stets $a \leq |a|$ und $|-a| = a$ gilt. Daher $a + b \leq |a| + |b|$ sowie $-(a+b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$. In jedem Fall[38] erhalten wir daher $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \quad \text{sowie} \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|. \tag{34}$$

Aus Proposition 1.8.9(b) erhalten wir auch

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad \text{falls } b \neq 0.$$

Mittels Induktion folgt aus der Dreiecksungleichung auch

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i\Big| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \qquad a_i \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

1.9. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen.

1.9.1. Definition. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Zahl $m \in A$ heißt *Maximum von* A falls gilt $a \leq m$ für alle $a \in A$. Besitzt A ein Maximum, dann ist dieses eindeutig bestimmt, wir sprechen daher von *dem* Maximum von A und bezeichnen es mit $\max A$. Eine Zahl $m \in A$ heißt *Minimum von* A falls gilt $m \leq a$ für alle $a \in A$. Besitzt A ein Minimum, dann ist dieses eindeutig bestimmt, wir sprechen von *dem* Minimum von A und bezeichnen es mit $\min A$.

1.9.2. Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\max\big((-\infty, a]\big) = a$. Beachte jedoch, dass das Intervall $(-\infty, a)$ kein Maximum besitzt. Denn wäre $m \in (-\infty, a)$ das Maximum dann gilt $m < a$. Für $x := \frac{1}{2}(m + a)$ ist dann $m < x < a$, also $x \in (-\infty, a)$, aber auch $m < x$, ein Widerspruch zur Maximalität von m. Offensichtlich besitzen auch die Intervalle $[a, \infty)$ und (a, ∞) kein Maximum.

1.9.3. Beispiel. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$\max\big((-\infty, b]\big) = \max\big([a, b]\big) = \max\big((a, b]\big) = b$$
$$\min\big([a, \infty)\big) = \min\big([a, b]\big) = \min\big([a, b)\big) = a.$$

Beachte jedoch, dass weder $\max\big((a, b)\big)$, $\max\big([a, b)\big)$, $\min\big((a, b)\big)$, $\min\big((a, b]\big)$, $\max\big((-\infty, a)\big)$, $\min\big((a, \infty)\big)$, $\min\big((-\infty, a)\big)$, $\min\big((-\infty, a]\big)$, $\max\big([a, \infty)\big)$ noch $\max\big((a, \infty)\big)$ existieren.

[38] $a + b \geq 0$ oder $a + b < 0$

1.9.4. Beispiel. Jede nichtleere endliche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt sowohl Minimum als auch Maximum. Die leere Menge hat weder Minimum noch Maximum. Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Minimum, nämlich 1, aber sicherlich kein Maximum.

1.9.5. Bemerkung. Es gilt das sogenannte *Wohlordnungsprinzip der natürlichen Zahlen:* Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum. Dies kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden, siehe [**H1**, Kapitel I.6]. Ebenso besitzt jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ein Minimum.

1.9.6. Definition. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere Schranke von A* falls für jedes $a \in A$ gilt $a \leq s$. Die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt,* falls sie eine obere Schranke besitzt. Analog heißt $s \in \mathbb{R}$ eine *untere Schranke von A* falls für jedes $a \in A$ gilt $s \leq a$. Die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt,* falls sie eine untere Schranke besitzt. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

1.9.7. Beispiel. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Jedes der Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$ ist nach oben beschränkt, eine obere Schranke ist durch b gegeben.[39] Alle diese Intervalle sind auch nach unten beschränkt, etwa ist a eine untere Schranke.[40]

1.9.8. Beispiel. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Intervalle $(-\infty, a)$ und $(-\infty, a]$ sind beide nach oben beschränkt, jede Zahl $s \geq a$ ist obere Schranke. Diese beiden Intervalle sind nicht nach unten beschränkt. Analog sind die beiden Intervalle (a, ∞) und $[a, \infty)$ beide nach unten aber nicht nach oben beschränkt. Die Menge $\mathbb{R}$ selbst ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

1.9.9. Bemerkung. Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt, etwa ist 1 eine untere Schranke. Es scheint naheliegend, dass die Menge $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist, dies lässt sich aber aus den Körper- und Ordnungsaxiomen alleine *nicht* herleiten!

1.9.10. Bemerkung. Besitzt eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum, dann muss A nichtleer und nach oben beschränkt sein, denn dass Maximum ist eine obere Schranke und ein Element von A. Beachte jedoch, dass es nichtleere nach oben beschränkte Mengen gibt die kein Maximum besitzten, etwa das Intervall $[3, 4)$, siehe Beispiel 1.9.3. Analog kann $A \subseteq \mathbb{R}$ nur dann ein Minimum besitzten wenn es nichtleer und nach unten beschränkt ist. Wieder ist dies für die Existenz des Minimums nicht hinreichend, wie das Beispiel $A = (3, 4]$ zeigt.

1.9.11. Definition. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Besitzt die Menge

$$\bigl\{ s \in \mathbb{R} \bigm| s \text{ ist obere Schranke von } A \bigr\}$$

[39] Jede Zahl $s \geq b$ ist obere Schranke.

[40] Jede zahl $s \leq a$ ist untere Schranke.

der oberen Schranken von A ein Minimum, dann wird dieses das *Supremum von* A genannt und mit $\sup A$ bezeichnet. D.h. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum von A genau dann wenn s die *kleinste obere Schranke von* A ist, d.h. s ist obere Schranke und für jede weitere oberer Schranke s' von A gilt $s \leq s'$. Besitzt die Menge der unteren Schranken von A ein Maximum, dann wird dieses das *Infimum von A genannt* und mit $\inf A$ bezeichnet. D.h. $s \in \mathbb{R}$ ist das Infimum von A genau dann wenn *s die größte untere Schranke von* A ist, d.h. s ist untere Schranke von A und für jede weitere untere Schranke s' von A gilt $s' \leq s$.

1.9.12. Bemerkung. Besitzt eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum, dann muss sie offensichtlich nichtleer und nach oben beschränkt sein. Ebenso kann A nur dann ein Infimum besitzen wenn es nichtleer und nach unten beschränkt ist.

1.9.13. Bemerkung. Besitzt eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum, dann existiert auch ihr Supremum und es gilt $\sup A = \max A$. Analog gilt $\inf A = \min A$ falls A ein Minimum besitzt.

1.9.14. Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sup\bigl((-\infty, a]\bigr) = \max\bigl((-\infty, a]\bigr) = a$, siehe Beispiel 1.9.2 und Bemerkung 1.9.13.

1.9.15. Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sup\bigl((-\infty, a)\bigr) = a.$$

Offensichtlich ist a eine obere Schranke des Intervalls $(-\infty, a)$. Es ist zu zeigen, dass a die kleinste obere Schranke ist. Indirekt angenommen s' ist eine weitere obere Schranke von $(-\infty, a)$ mit $s' < a$. Für $x := \frac{1}{2}(s' + a)$ gilt dann $s' < x < a$. Wegen $x < a$ ist $x \in (-\infty, a)$, und aus $s' < x$ folgt, dass s' keine obere Schranke von $(-\infty, a)$ sein kann, ein Widerspruch. Wir schließen, siehe Bemerkung 1.1.3, dass a tatsächlich die kleinste obere Schranke von $(-\infty, a)$ ist. Beachte, dass das Intervall $(-\infty, a)$ ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

1.9.16. Beispiel. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sup\bigl([a,b]\bigr) = \sup\bigl((a,b)\bigr) = \sup\bigl((a,b]\bigr) = \sup\bigl([a,b)\bigr) &= b \\
\inf\bigl([a,b]\bigr) = \inf\bigl((a,b)\bigr) = \inf\bigl((a,b]\bigr) = \inf\bigl([a,b)\bigr) &= a \\
\sup\bigl((-\infty,a]\bigr) = \sup\bigl((-\infty,a)\bigr) &= a \\
\inf\bigl([a,\infty)\bigr) = \inf\bigl((a,\infty)\bigr) &= a
\end{aligned}$$

Alle nach oben beschränkten Intervalle besitzen daher ein Supremum, alle nach unten beschränkten Intervalle ein Infimum, vgl. Beispiel 1.9.3.

1.9.17. Definition (Dedekindsche Schitte). Ein *Dedekindscher*[41] *Schnitt* ist ein Paar (A, B) von Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
b) $A \cup B = \mathbb{R}$.

[41]Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831–1916.

c) $a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$.

Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt *Trennungszahl des Schnittes* (A, B) falls gilt

$$a \leq t \leq b \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } b \in B.$$

Existiert so eine Trennungszahl, dann ist sie eindeutig bestimmt.[42]

1.9.18. Proposition. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.*
b) *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*
c) *Jeder Dedekindsche Schnitt besitzt eine Trennungszahl.*

Beweis. Ad (a)⇒(b): Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Dann ist die Menge $B := \{-a \mid a \in A\}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Nach (a) existiert daher das Supremum $\sup B$ von B. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $-\sup B$ das Infimum von A ist.

Ad (b)⇒(c): Sei also (A, B) ein Dedekindscher Schnitt. Dann ist B nichtleer und nach unten beschränkt, siehe Definition 1.9.17(a) und (c). Nach Voraussetzung exsitiert daher das Infimum von B, $t := \inf B$. Wir zeigen nun, dass t eine Trennungszahl des Schnittes (A, B) ist. Ist $b \in B$, dann gilt klarerweise $t \leq b$, denn t ist eine untere Schranke von B. Ist $a \in A$, dann gilt $a \leq t$, denn nach Definition 1.9.17(c) ist a eine untere Schranke von B und t ist die größte untere Schranke von B. Daher ist t tatsächlich eine Trennungszahl des Schnittes (A, B).

Ad (c)⇒(a): Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Betrachte die Menge der oberen Schranken von A,

$$S := \big\{s \in \mathbb{R} \bigm| s \text{ ist obere Schranke von } A\big\}.$$

Dann ist $(\mathbb{R} \setminus S, S)$ ein Dedekindscher Schnitt. Nach Voraussetzung existiert eine Trennungszahl t dieses Schnittes. Wir zeigen nun, dass t das Supremum von A ist. Zunächst ist t eine obere Schranke von A, denn existierte $a \in A$ mit $t < a$, dann gilt $t < x < a$ mit $x := \frac{1}{2}(t+a)$, und wir erhielten einen Widerspruch, denn einderseits folgt daraus $x \in S$, aber andereseits auch: x ist keine obere Schranke von A. Wegen $t \leq s$ für alle $s \in S$, ist t tatsächlich die kleinste obere Schranke von A. Insgesamt sehen wir, dass t die kleinste obere Schranke von A ist, also existiert $\sup A = t$. □

Eine fundamentale Annahme über die reellen Zahlen ist die Gültigkeit des sogenannten *Vollständigkeitsaxioms:* Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum. Nach Proposition 1.9.18 besitzt dann auch jede nichtleere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen ein Infimum; und jeder Dedekindsche Schnitt besitzt eine Trennungszahl. Als erste Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms zeigen wir

[42]Indirek angenommen $t < t'$ sind zwei Trennungszahlen des Schnittes (A, B). Mit $x := \frac{1}{2}(t + t')$ gilt dann $t < x < t'$. Aus (c) folgt daher $x \notin A$ und $x \notin B$, ein Widerspruch zu (b). Also kann es nur eine Trennungszahl geben.

1.9.19. Proposition.

a) *Die Menge* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*
b) *Für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > a$.[43]
c) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
d) *Die Menge* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ *ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.*
e) *Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *hat ein Minimum.*
f) *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *hat ein Maximum.*
g) *Sind* $a < b \in \mathbb{R}$, *dann existiert eine rationale Zahl* $r \in \mathbb{Q}$ *mit* $a < r < b$.[44]

Beweis. Ad (a): Indirekt angenommen $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $s := \sup \mathbb{N}$. Da s die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, kann $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein. Es existiert daher $n \in \mathbb{N}$ mit $s-1 < n$. Es folgt $s < n+1$. Da $n+1 \in \mathbb{N}$ sehen wir, dass s keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein kann, ein Widerspruch. Wir schließen, siehe Bemerkung 1.1.3, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. (b) ist eine Umformulierung von (a). Ad (c): Sei also $\varepsilon > 0$. Nach (b) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Daher gilt auch $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ad (d): Zunächst kann $\mathbb{Z}$ nicht nach oben beschränkt sein, denn nach (a) ist nicht einmal $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt. Weiters kann $\mathbb{Z}$ auch nicht nach unten beschränkt sein, denn wäre $s \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von $\mathbb{Z}$, dann wäre $-s$ eine obere Schranke von $\mathbb{Z}$. Ad (e): Sei also $A \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere nach unten beschränkte Menge. Sei $s \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von A. Nach (d) existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq s$. Dann gilt $n \leq a$ für alle $a \in A$, also $B := \{a - n \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Nach Bemerkung 1.9.5 exsitiert $m := \min B$. Es ist dann $m+n$ das Minimum von A. Ad (f): Sei also $A \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Dann ist $B := \{-a \mid a \in A\}$ eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Nach (e) existiert daher $m := \min B$. Es ist dann $-m$ das Maximum von A. Ad (g): Nach (c) existiert $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} < b - a$. Nach (b) ist die Menge $S := \{n \in \mathbb{Z} \mid qa < n\}$ nicht leer. Auch ist S nach unten beschränkt, denn qa ist eine untere Schranke. Nach (e) existiert $p := \min S$. Da $p \in S$ gilt $qa < p$. Wegen $p - 1 \notin S$ gilt $p - 1 \leq qa$ und daher $p \leq qa + 1 < qb$. Insgesamt erhalten wir $qa < p < qb$. Division durch q liefert $a < \frac{p}{q} < b$, also ist $r := \frac{p}{q}$ die gesuchte rationale Zahl. □

1.9.20. Bemerkung. Die Körper- und Vollständigkeitsaxiome voraussetzend, sind alle Aussagen in Proposition 1.9.19 äquivalent. Sie sind jedoch schwächer als das Vollständigkeitsaxiom, d.h. aus den Körper- und Ordnungsaxiomen plus der Aussage von Proposition 1.9.19 kann das Vollständigkeitsaxiom *nicht* abgeleitet werden. Proposition 1.9.19 besagt bloß, dass es keine “unendlich großen bzw. unendlich kleinen reellen Zahlen gibt.” Dies ist z.B. auch in $\mathbb{Q}$ der Fall, aber $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom.

[43] Dies wird als Archimedisches Prinzip bezeichnet. Archimedes von Syrakus, 287–212 v.u.Z.

[44] Die rationalen Zahlen liegen dicht in den reellen Zahlen.

1.9.21. Satz (Existenz der Wurzeln). *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_0^+$. Dann hat die Gleichung $x^k = a$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}_0^+$. Diese wird mit $\sqrt[k]{a}$ oder $a^{1/k}$ bezeichnet, und heißt die k-*te Wurzel von a.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Lösung ist klar, denn wären $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ zwei verschiedene Lösungen $x < y$, dann auch $x^k < y^k$, was aber $x^k = a = y^k$ widerspräche. Nun aber zur Existenz der Lösung. Betrachte die Menge

$$A := \bigl\{y \in \mathbb{R}_0^+ \bigm| y^k \leq a\bigr\}.$$

Es ist $A \neq \emptyset$, denn $0 \in A$. Für jedes $y \in A$ gilt nach Proposition 1.8.8

$$a \geq y^k = \bigl(1 + (y-1)\bigr)^k \geq 1 + k(y-1)$$

und daher auch $y \leq \frac{a-1}{k} + 1$. Damit ist $\frac{a-1}{k} + 1$ eine obere Schranke, A also nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert daher $x := \sup A$. Wir werden nun zeigen, dass dieses x die gesuchte Lösung ist, d.h. $x^k = a$ gilt.

Wir zeigen zunächst $x^k \geq a$: Indirekt angenommen $x^k < a$. Für $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz, siehe Proposition 1.8.5,

$$\begin{aligned}(x+\varepsilon)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k-i}\varepsilon^i &= x^k + \varepsilon \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i}\varepsilon^{i-1} \\ &\leq x^k + \varepsilon \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i} = x^k + \varepsilon\alpha \qquad (36)\end{aligned}$$

wobei $\alpha := \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^{k-i} \geq \binom{k}{k} x^0 = 1$. Sei nun $\varepsilon := \min\{\frac{a-x^k}{\alpha}, 1\}$. Dann gilt $0 < \varepsilon \leq 1$ und wegen (36) daher

$$(x+\varepsilon)^k \leq x^k + \varepsilon\alpha \leq x^k + \frac{a - x^k}{\alpha}\alpha = a.$$

Also $x + \varepsilon \in A$, ein Widerspruch zu $x = \sup A$. Wir schließen $x^k \geq a$.

Als nächstes zeigen wir $x^k \leq a$: Indirekt angenommen es gilt $x^k > a$. Insbesondere ist $x > 0$. Für jedes $\varepsilon \leq x$ gilt nach Proposition 1.8.8

$$(x-\varepsilon)^k = x^k\bigl(1 - \tfrac{\varepsilon}{x}\bigr)^k \geq x^k\bigl(1 - \tfrac{k\varepsilon}{x}\bigr). \qquad (37)$$

Sei $\varepsilon := \min\bigl\{x, \frac{x}{k}(1 - \frac{a}{x^k})\bigr\} > 0$. Wegen $\varepsilon \leq \frac{x}{k}(1 - \frac{a}{x^k})$ gilt dann $x^k(1 - \frac{k\varepsilon}{x}) \geq a$. Aus (37) erhalten wir daher

$$(x-\varepsilon)^k \geq x^k\bigl(1 - \tfrac{k\varepsilon}{x}\bigr) \geq a. \qquad (38)$$

Da $x = \sup A$, kann $x - \varepsilon$ keine obere Schranke von A sein, also existiert $y \in A$ mit $x - \varepsilon < y$. Es folgt $(x-\varepsilon)^k < y^k \leq a$, ein Widerspruch zu (38). Wir schließen, dass $x^k \leq a$.

Aus $x^k \geq a$ und $x^k \leq a$ folgt nun $x^k = a$. Damit ist die Existenz der gesuchten Lösung bewiesen. $\square$

1.9.22. Bemerkung. Satz 1.9.21 besagt, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^k$$

bijektiv ist. Ihre Umkehrfunktion ist durch

$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

gegeben. Wir werden später mit Hilfe des Zwischenwertsatzes einen wesentlich übersichtlicheren Beweis für die Existenz der Wurzeln erhalten.

Ist $a > 0$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ dann sind die rationalen Potenzen von a durch

$$a^r := \sqrt[q]{a^p}.$$

definiert. Dies ist wohldefiniert, denn ist $\frac{p}{q} = a = \frac{p'}{q'}$ dann auch $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$. Es gelten die vertrauten Rechenregeln:

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{Q}, \tag{39}$$

und Variationen davon

$$a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \qquad a, b > 0,\ r, s \in \mathbb{Q}.$$

1.9.23. Proposition. *Es seien $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$.*

a) *Ist $r > 0$ dann gilt $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$.*
b) *Ist $r < 0$ dann gilt $a < b \Leftrightarrow a^r > b^r$.*
c) *Ist $a > 1$ dann gilt $r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$.*
d) *Ist $a < 1$ dann gilt $r < s \Leftrightarrow a^r > a^s$.*

Beweis. Ist $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen (32) und (39)

$$a < b \Leftrightarrow a^p < b^p \Leftrightarrow (a^{p/q})^q < (b^{p/q})^q \Leftrightarrow a^{p/q} < b^{p/q}.$$

Dies zeigt bereits (a). (b) folgt dann mittels (33). Da $a^r < a^s \Leftrightarrow 1 = 1^{s-r} < a^{s-r}$ erhalten wir (c) aus (a) und (b). (d) folgt dann wieder mittels (33). □

1.10. Die komplexen Zahlen. Mehr zu den komplexen Zahlen findet sich in [**K1**, Kapitel 3], [**J1**, Kapitel 18.3] oder [**M1**, Kapitel 1§8]. Wir werden zuerst die komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen konstruieren. Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ wie folgt. Sind $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ und $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ dann ist ihre Summe komponentenweise[45] definiert,

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{40}$$

und ihr Produkt ist

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{41}$$

1.10.1. Satz. *Für $(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt:*

a) $(a_1, b_1) + \big((a_2, b_2) + (a_3, b_3)\big) = \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) + (a_3, b_3)$.

[45] Vektoraddition

b) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$.
c) $(0, 0) + (a, b) = (a, b)$.
d) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.
e) $(a_1, b_1) \cdot \big((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)\big) = \big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) \cdot (a_3, b_3)$.
f) $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$.
g) $(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$.
h) $(1, 0) \neq (0, 0)$.
i) $(a, b) \cdot \big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\big) = (1, 0)$, *falls* $(a, b) \neq (0, 0)$.
j) $(a, b) \cdot \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) = (a, b) \cdot (a_1, b_1) + (a, b) \cdot (a_2, b_2)$.

Beweis. Alles außer vielleicht (e), (i) und (j) ist offensichtlich. Diese drei Aussagen können durch eine einfache direkte Rechnung verifiziert werden. □

Wir sehen daher, das (40) und (41) auf $\mathbb{R}^2$ eine Addition und eine Multiplikation definieren, die auch den Körperaxiomen (16)–(25) genügen. $\mathbb{R}^2$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation wird der *Körper der komplexen Zahlen* genannt und mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Da alle Rechenregeln für reelle Zahlen aus den Körperaxiomen (16)–(25) folgen, gelten dieselben Rechenregeln auch für komplexe Zahlen.

Die Abbildung

$$\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \iota(a) := (a, 0)$$

ist injektiv und sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation verträglich:

$$\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b), \qquad \iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b).$$

Daher können wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Wenn wir in Zukunft eine relle Zahl $a \in \mathbb{R}$ als komplexe Zahl $\iota(a) = (a, 0) \in \mathbb{C}$ betrachten werden wir ι weglassen und bloß $a \in \mathbb{C}$ schreiben.

Drei komplexe Zahlen bekommen eigene Zeichen:

$$0 := (0, 0) = \iota(0), \qquad 1 := (1, 0) = \iota(1), \qquad \mathbf{i} := (0, 1).$$

$0 \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element der Addition, $1 \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element der Multiplikation, und es gilt[46]

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1. \tag{42}$$

Wie auch beim Rechnen in $\mathbb{R}$, lassen wir den Multiplikationspunkt bei der Notation oft weg, und schreiben einfach $z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2$ für das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Auch schreiben wir z^{-1} oder $\frac{1}{z}$ für das multiplikative Inverse von $0 \neq z \in \mathbb{C}$, siehe Satz 1.10.1(i). Ebenso definieren wir die ganzzahligen

[46]Auf Grund der Relation (42) ist es nicht möglich auf $\mathbb{C}$ eine "kleiner Relation $z_1 < z_2$" zu definieren, die den vier Ordnungsaxiomen (28)–(31) genügt, denn aus diesen Axiomen würde ja $z^2 \geq 0$ für alle komplexen z folgen, insbesondere $\mathbf{i}^2 \geq 0$, was aber (42) widerspricht.

Potenzen z^n durch

$$
\begin{aligned}
z^n &:= \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ mal}} && z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\\
z^0 &:= 1 && z \in \mathbb{C},\\
z^{-n} &:= \frac{1}{z^n} && 0 \neq z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Es gilt dann wie auch in $\mathbb{R}$, siehe (26),

$$z^{n+m} = z^n z^m, \quad (z^n)^m = z^{nm}, \quad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n, \quad 0 \neq z, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ n, m \in \mathbb{Z},$$

als auch, vgl. (27)

$$z^{n+m} = z^n z^m, \quad (z^n)^m = z^{nm}, \quad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n, \quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ n, m \in \mathbb{N}_0,$$

Die geometrische Summenformel, siehe Proposition 1.8.4, und der binomische Lehrsatz, siehe Proposition 1.8.5, gelten ebenso für komplexe Zahlen. Die Beweise sind ident, es wurden ja nur die Körperaxiome verwendet, und diese gelten auch in $\mathbb{C}$, siehe Satz 1.10.1.

Jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ lässt sich eindeutig als

$$z = a + \mathbf{i}b, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

schreiben. Dabei heißt a der *Realteil von* z und wird mit $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ bezeichnet; b heißt der *Imaginärteil von* z und wird mit $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Es ist also stets

$$z = \operatorname{Re} z + \mathbf{i} \operatorname{Im} z, \qquad \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$. Es wird $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} = \{\mathbf{i}a \mid a \in \mathbb{R}\}$ die Menge der *rein imaginären* Zahlen genannt. In dieser Schreibweise sehen Addition und Multiplikation wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
(a_1 + \mathbf{i}b_1) + (a_2 + \mathbf{i}b_2) &= (a_1 + a_2) + \mathbf{i}(b_1 + b_2),\\
(a_1 + \mathbf{i}b_1) \cdot (a_2 + \mathbf{i}b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathbf{i}(a_1 b_2 + b_1 a_2).
\end{aligned}
$$

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen behandeln wird daher $\mathbf{i}$ als "formale Variable" und beachten dann noch die Relation (42).

1.10.2. Beispiel. Für $z_1 = 3 + 4\mathbf{i}$ und $z_2 = 5 + 6\mathbf{i}$ ist

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = (3 + 4\mathbf{i}) \cdot (5 + 6\mathbf{i}) &= 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6\mathbf{i} + 4\mathbf{i} \cdot 5 + 4\mathbf{i} \cdot 6\mathbf{i}\\
&= 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + (3 \cdot 6 + 4 \cdot 5)\mathbf{i} = -9 + 38\mathbf{i}
\end{aligned}
$$

und

$$z_1 + z_2 = (3 + 4\mathbf{i}) + (5 + 6\mathbf{i}) = 3 + 5 + (4 + 6)\mathbf{i} = 8 + 10\mathbf{i}.$$

Unter der *komplexen Konjugation* verstehen wir die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \bar{z} := \operatorname{Re} z - \mathbf{i} \operatorname{Im} z.$$

Sie ist sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation verträglich:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Es gilt

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathbf{i}}. \tag{43}$$

Daher ist $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$ und $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\}$. Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

Beachte, dass $z \cdot \bar{z}$ stets reell und positiv ist,

$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq 0.$$

Unter dem *Absolutbetrag* verstehen wir die folgende Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+, \qquad z \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Beachte, dass für reelle $z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ dieser Absolutbetrag mit dem der reellen Zahlen überein stimmt. Nach dem Satz von Pythagoras[47] enspricht der Absolutbetrag $|z|$ gerade dem Euklidischen Abstand der komplexen Zahl z von 0 in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z|^2 = z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \quad \text{und} \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{falls } z \neq 0.$$

Beachte auch

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \tag{44}$$

1.10.3. Beispiel. Diese Formeln helfen auch bei der Berechnung des Inversen. Für $z = 3 + 4\mathbf{i}$ erhalten wir $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{3-4\mathbf{i}}{3^2+4^2} = \frac{3-4\mathbf{i}}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathbf{i}$.

Analog zu Proposition 1.8.9 haben wir

1.10.4. Proposition. *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Beweis. (a) ist offensichtlich, denn aus $0 = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ folgt $\operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = 0$, also $z = 0$. (b) folgt aus:

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) \cdot (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = \big(|z_1||z_2|\big)^2$$

Ad (c): Wegen (43) gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_1 + z_2} \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2). \end{aligned} \tag{45}$$

Wegen (44) und (b) gilt $|\operatorname{Re} z_1 z_2| \leq |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Mit (45) folgt

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2$$

und damit ist (c) bewiesen. □

47

Aus Proposition 1.10.4(b) erhalten wir

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{falls } z_2 \neq 0. \tag{46}$$

Wie auch im reellen, folgt aus Proposition 1.10.4(c)

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \quad \text{sowie} \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|. \tag{47}$$

1.10.5. Bemerkung. Die Menge der komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1 wird als der Einheitskreis bezeichnet,

$$S^1 := \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\big\}.$$

Beachte, dass mit $z, z_1, z_2 \in S^1$ auch $z_1 z_2 \in S^1$ und $z^{-1} \in S^1$, siehe Proposition 1.10.4(b) und (46). Zusammen mit der komplexen Multiplikation bildet $(S^1, \cdot)$ eine kommutative Gruppe, siehe Bemerkung 1.5.9.

Die komplexe Multiplikation kann geometrisch wie folgt verstanden werden. Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form

$$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi), \quad r \in \mathbb{R}_0^+,$$

schreiben. Dabei ist $r = |z| \geq 0$ der Abstand von z zu 0, und θ der Winkel zwischen z und 1. Für $z \neq 0$ ist diese Darstellung auch eindeutig.[48] Für $z = 0$ ist $r = |z| = 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ beliebig, die Darstellung also nicht eindeutig. Aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus folgt:

$$\big(r_1(\cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1)\big) \cdot \big(r_2(\cos\theta_2 + \mathbf{i}\sin\theta_2)\big) = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathbf{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\big)$$

D.h. die Absolutbeträge multiplizieren sich, die Winkel addieren sich. Daraus können nun auch alle Wurzeln[49] einer komplexen Zahl $z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ bestimmt werden, diese sind

$$\xi_k = \sqrt[n]{r}\big(\cos(\theta/n + 2\pi k/n) + \mathbf{i}\sin(\theta/n + 2\pi k/n)\big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ist $z \neq 0$ dann sind alle diese Wurzeln verschieden, eine nicht verschwindende komplexe Zahl hat daher genau n verschiedene n-te Wurzeln. Der Fall $z = 0$ spielt eine Sonderrolle, denn 0 besitzt nur eine einzige n-te Wurzel, nämlich 0.

1.10.6. Beispiel. Unter einer n-ten *Einheitswurzeln* verstehen wir eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ für die $\zeta^n = 1$ gilt, d.h. eine Wurzeln von 1. Beachte, dass jede n-te Einheitswurzel $|\zeta| = 1$ erfüllt. Es gibt genau n n-ten Einheitswurzeln:

$$\zeta_k = \cos(2\pi k/n) + \mathbf{i}\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

---

[48] Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt $r\big(\cos(\theta+2\pi)+\mathbf{i}\sin(\theta+2\pi)\big) = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$. Die Wahl $\theta \in [0, 2\pi)$ ist daher eine künstliche, ebenso hätten wir etwa $\theta \in (-\pi, \pi]$ verlangen können.

[49] d.h. alle Zahlen $\xi \in \mathbb{C}$ für die $\xi^n = z$ gilt.

Die zweiten Einheitswurzeln sind 1 und -1, die dritten Einheitswurzeln sind:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 1\\ \zeta_2 &= \cos(2\pi/3) + \mathbf{i}\sin(2\pi/3) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\\ \zeta_3 &= \cos(4\pi/3) + \mathbf{i}\sin(4\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\end{aligned}$$

Die vierten Einheitswurzeln sind 1, $\mathbf{i}$, -1 und $-\mathbf{i}$.

1.10.7. Beispiel. Für $p, q \in \mathbb{C}$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $0 = z^2 + pz + q$ durch

$$z_\pm = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\pm\sqrt{p^2 - 4q}$ die beiden Quadratwurzeln von $p^2 - 4q$, die sich ja nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Z.B. sind die Lösungen von $z^2 + (3 - 2\mathbf{i})z - 6\mathbf{i}$

$$z_\pm = \frac{-3 + 2\mathbf{i} \pm \sqrt{(-3 + 2\mathbf{i})^2 + 4 \cdot 6\mathbf{i}}}{2} = \frac{-3 + 2\mathbf{i} \pm \sqrt{5 + 12\mathbf{i}}}{2}.$$

Wegen $\pm\sqrt{5 + 12\mathbf{i}} = \pm(3 + 2\mathbf{i})$ erhalten wir die beiden Lösungen

$$z_+ = \frac{-3 + 2\mathbf{i} + 3 + 2\mathbf{i}}{2} = 2\mathbf{i} \quad \text{und} \quad z_- = \frac{-3 + 2\mathbf{i} - 3 - 2\mathbf{i}}{2} = -3.$$

Unter einem komplexen Polynom verstehen wir eine Funktion der Form

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ fixe komplexe Zahlen sind. Ist $a_n \neq 0$ dann heißt p ein Polynom n-ten *Grades.* Unter einem konstanten Polynom verstehen wir ein Polynom der Form $p(z) = a_0$. Die außerordentliche Rolle der komplexen Zahlen spiegelt sich in folgendem Resultat wider. Einen Beweis können wir hier nicht geben.

1.10.8. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt dann mittels Polynomdivision, dass sich jedes komplexe Polynom $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ mit $a_n \neq 0$ in der Form

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i) = a_n(z - \lambda_1) \cdot (z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$$

schreiben lässt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gerade die *Nullstellen* von $p(z)$ sind, d.h. $p(\lambda_i) = 0$. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge[50] der Nullstellen eindeutig. Dabei müssen die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ nicht unbedingt verschieden sein. Tritt eine Nullstelle λ von p, k mal auf dann sprechen wir von einer k-fachen Nullstelle und sagen “λ

[50] Permutationen!

hat Vielfachheit k." Wir sehen daher, dass ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wobei diese Nullstellen aber ihrere Vielfachheit entsprechend oft gezählt werden müssen.

1.10.9. Beispiel. Das Polynom

$$p(z) = z^3(z-1)^2(z-\mathbf{i})^5(z+3\mathbf{i}) = z^{11} + \cdots$$

hat drei Nullstellen, 0, 1, $\mathbf{i}$ und $-3\mathbf{i}$. Dabei hat 0 die Vielfachheit 3, die Nullstelle 1 hat Vielfachheit 2, die Nullstelle $\mathbf{i}$ hat Vielfachheit 5, und $-3\mathbf{i}$ ist eine einfache Nullstelle. Zählen wir alle diese Vielfachheiten zusammen erhalten wir $3+2+5+1 = 11$, den Grad des Polynoms.

1.10.10. Bemerkung. Für $n > 2$ ist es nicht möglich auf $\mathbb{R}^n$ eine mit der Struktur der rellen Zahlen verträgliche Körperstruktur zu definieren. Dies ist nur für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ möglich! Auf $\mathbb{R}^4$ kann immerhin noch eine Multiplikation definiert werden, die, zusammen mit der üblich Vektoraddition, alle Körperaxiome bis auf (21) erfüllt. Dieser sogenannt *Schiefkörper der Hamiltonschen*[51] *Quaternionen* wird üblicherweise mit $\mathbb{H}$ bezeichnet. In $\mathbb{H}$ gibt es drei verschiedene Elemente $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die folgenden Relationen genügen:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

[51] Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

2. Folgen und Reihen

Folgen und Reihen werden in jedem Analysislehrbuch besprochen, siehe etwa [**H1**, Kapitel III], [**K1**, Kapitel 5], [**J2**, Kapitel 23] oder [**M1**, Kapitel 2§4].

2.1. Folgen reeller Zahlen.

2.1.1. Definition. Unter einer *Folge reeller Zahlen* verstehen wir eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sind $a_n \in \mathbb{R}$ dann bezeichnen wir die dadurch bestimmte Folge mit $a_1, a_2, a_3, \dots$, oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n) oder durch a_n, $n \in \mathbb{N}$. Die einzelnen Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ heißen die *Folgenglieder* der Folge (a_n), und n heißt der *Index* des Folgenglieds a_n.

Wir werden im Folgenden nicht darauf bestehen, dass die Nummerierung der Folgenglieder mit 1 beginnt, und auch $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ oder $(a_n)_{n\geq k}$ oder a_n, $n \geq k$, als Folge bezeichnen. Dabei lassen wir beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ zu, d.h. auch $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ ist eine Folge. Da wir uns meistens nur für das Verhalten für große n interessieren, sind die ersten Folgenglieder ohnehin unwesentlich. Durch Übergang von $(a_n)_{n\geq k}$ zu $b_n := a_{n+k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im strengen Sinn der Definition 2.1.1.

2.1.2. Beispiel. Einige Beispiele von Folgen:

$$a_n := c \qquad \text{(konstante Folge, } c \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \text{(alternierendes Vorzeichen)}$$

$$a_n := 3n^2 - 7n + 8$$

$$a_n := \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \ n \geq 3$$

2.1.3. Beispiel. Die Fibonacci[52] Folge wird rekursiv definiert:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Die ersten Folgenglieder lauten daher: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ Sie lassen sich auch in geschlossener Form angeben

$$a_n = \frac{\alpha^n - (1-\alpha)^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ den sogenannten *goldenen Schnitt* bezeichnet.

2.1.4. Definition. Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen die Folge (a_n) *konvergiert gegen* a falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

[52]Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, ca. 1170–1250.

In diesem Fall heißt a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n) und wir schreiben

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a.$$

Eine Folge heißt *konvergent* falls sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls heißt sie *divergent*. Konvergiert eine Folge gegen 0 so wird sie *Nullfolge* genannt.

2.1.5. Bemerkung. Die folgenden Aussagen über eine Folge (a_n) sind äquivalent. Jede einzelne besagt, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert.

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$.
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.
c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$.
d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.

2.1.6. Bemerkung. Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ heißt das Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\big\}$$

die *ε-Umgebung von a*. Wir führen noch folgende Sprechweise ein: Wir sagen "eine Eigenschaft gilt für *fast alle* Glieder einer Folge a_n," wenn es einen Index n_0 gibt, sodass diese Eigenschaft für alle a_n mit $n \geq n_0$ gilt. Damit können wir nun die Konvergenzbedingung wie folgt formulieren. Eine Folge (a_n) konvergiert gegen a, genau dann wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder zu liegen kommen.

2.1.7. Lemma. *Sind $a \neq a' \in \mathbb{R}$, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$.*

Beweis. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}|a' - a|$. Wäre $x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a')$ dann folgt aus der Dreiecksungleichung, siehe Porposition 1.8.9(c),

$$|a' - a| = |a' - x + x - a| \leq |a' - x| + |x - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a' - a|,$$

ein Widerspruch. Daher muss $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a')$ leer sein. □

2.1.8. Proposition. *Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.*[53]

Beweis. Indirekt angenommen $a \neq a'$ sind beides Limiten der Folge (a_n). Nach Lemma 2.1.7 finden wir $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$. Da $a_n \to a$, liegen fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$, und da $a_n \to a'$, liegen fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a')$. Damit müssen fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a')$ liegen, ein Widerspruch da dieser Durchschnitt ja leer ist. Daher kann die Folge (a_n) höchstens einen Grenzwert haben. □

2.1.9. Beispiel. Die konstante Folge $a_n := c$ konvergiert gegen c.

2.1.10. Beispiel. Die Folge $a_n := \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

[53] Wir sprechen daher von *dem* Grenzwert einer Folge, falls dieser existiert.

Denn ist $\varepsilon > 0$, dann existiert nach Proposition 1.9.19(c) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, und daher $|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Daher ist 0 der Grenzwert der Folge (a_n).

2.1.11. Bemerkung. Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert (a_n) gegen a genau dann wenn die Folge $\bigl(|a_n - a|\bigr)$ gegen 0 konvergiert. Dies folgt sofort aus $\bigl||a_n - a| - 0\bigr| = |a_n - a|$. Insbesondere ist (a_n) eine Nullfolge genau dann wenn $\bigl(|a_n|\bigr)$ eine Nullfolge ist.

2.1.12. Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *nach oben beschränkt* falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Sie heißt *nach unten beschränkt* falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt ist. Sie heißt *beschränkt* falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, siehe Definition 1.9.6. Sie heißt *nach oben unbeschränkt* falls sie nicht nach oben beschränkt ist. Sie heißt *nach unten unbeschränkt* falls sie nicht nach unten beschränkt ist. Sie heißt *unbeschränkt* falls sie nicht beschränkt ist.

2.1.13. Proposition. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n \to a$, existiert ein Index n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| \leq 1$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, siehe Proposition 1.8.9(c), folgt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|, \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Es sei $r := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq r$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge (a_n) beschränkt. □

2.1.14. Beispiel. Die Folge $a_n := n$, $n \in \mathbb{N}$, ist divergent, denn nach Proposition 1.9.19(b) ist sie unbeschränkt, also kann sie auch nicht konvergieren, siehe Proposition 2.1.13. Ebenso divergiert die Folge $b_n := -n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, denn auch sie ist unbeschränkt.

2.1.15. Definition. Unter einer *Teilfolge* einer Folge (a_n) verstehen wir jede Folge der Form $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \dots$ wobei $n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

2.1.16. Proposition. *Ist $a_n \to a$ eine konvergente Folge, und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, dann gilt auch $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Beweis. Da $a_n \to a$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Da $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt $n_k \geq n_0$. Wir erhalten $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Also konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a. □

2.1.17. Beispiel. Betrachte die Folge $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Teilfolge $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ ist konstant -1, also konvergiert sie gegen -1. Die Teilfolge $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$ ist konstant 1, also konvergiert sie gegen 1. Da die Grenzwerte dieser beiden Teilfolgen nicht überein stimmen, kann die ursprüngliche Folge (a_n)

nicht konvergieren, siehe Proposition 2.1.16. Wir sehen also, dass $a_n = (-1)^n$ eine beschränkte aber nicht konvergente Folge ist.

2.1.18. Beispiel. Sei $p \in \mathbb{N}$. Die Folge $a_n := \frac{1}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Teilfolge der Folge $b_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 2.1.16 und Beispiel 2.1.10 gilt daher auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

2.1.19. Proposition. *Es seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$ zwei konvergente Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $a_n + b_n \to a + b$.
b) $\lambda a_n \to \lambda a$.
c) $a_n b_n \to ab$.
d) *Ist $a \neq 0$, dann sind fast alle $a_n \neq 0$ und $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.*
e) *Ist $b \neq 0$, dann sind fast alle $b_n \neq 0$ und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Beweis. Ad (a): Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{48}$$

Da $b_n \to b$, existiert $n_0' \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0'. \tag{49}$$

Sei $m := \max\{n_0, n_0'\}$. Aus der Dreiecksungleichung, siehe Proposition 1.8.9(c), sowie (48) und (49) erhalten wir für $n \geq m$

$$\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daher konvergiert die Folge $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$. Ad (c): Sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge a_n konvergiert ist sie auch beschränkt, siehe Proposition 2.1.13, es existiert daher $r > 0$ mit

$$|a_n| \leq r, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Da $a_n \to a$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{51}$$

Da $b_n \to b$, existiert $n_0' \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2r}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0'. \tag{52}$$

Sei $m := \max\{n_0, n_0'\}$. Mit Hilfe von Proposition 1.8.9 sowie (50), (51) und (52) erhalten wir für $n \geq m$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < r\frac{\varepsilon}{2r} + \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}|b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(a_n b_n)$ gegen ab. (b) folgt aus (c) indem wir für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Folge λ wählen. Ad (d): Da $0 \neq a$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq \frac{|a|}{2}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mittels (34) erhalten wir

$$|a_n| = |a + a_n - a| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0, \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Insbesondere ist $a_n \neq 0$ falls $n \geq n_0$, also sind fast alle $a_n \neq 0$. Auch erhalten wir

$$\frac{1}{|a_n|} \leq \frac{2}{|a|}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{53}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$, existiert $n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{|a|^2\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } n \geq n_0'. \tag{54}$$

Sei $m := \max\{n_0, n_0'\}$. Mit Hilfe von Proposition 1.8.9(b) sowie (53) und (54) erhalten wir für $n \geq m$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} < \frac{2\frac{|a|^2\varepsilon}{2}}{|a|^2} = \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ gegen $\frac{1}{a}$. (e) folgt aus (c) und (d) indem wir $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ schreiben. $\square$

2.1.20. Beispiel. Wir wollen mit Hilfe von Proposition 2.1.19 den Grenzwert (falls dieser existiert) der Folge

$$a_n := \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} - 7, \quad n \in \mathbb{N},$$

bestimmen. Nach Beispiel 2.1.18 ist $\frac{1}{n^2}$ eine Nullfolge, nach Proposition 2.1.19(b) gilt daher auch $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$. Ebenso erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$. Mittels Proposition 2.1.19(a) folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} - 7 = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} - \lim_{n\to\infty} 7 = 0 + 0 - 7 = -7.$$

2.1.21. Beispiel. Wir wollen den Grenzwert (falls dieser existiert) der Folge

$$a_n := \frac{5n^3 - 7n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 + 2n + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

bestimmen. Wir erweitern diesen Bruch mit $\frac{1}{n^3}$ und erhalten die Darstellung

$$a_n = \frac{5 - \frac{7}{n} - \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}.$$

Wie in Beispiel 2.1.20 folgt

$$\lim_{n\to\infty} 5 - \frac{7}{n} - \frac{1}{n^3} = 5 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 3.$$

Aus Proposition 2.1.19(e) erhalten wir daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 7n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{7}{n} - \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{5}{3}.$$

2.1.22. Proposition. *Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.1.23. Proposition. *Ist $a_n \to a$ eine konvergente Folge, dann $|a_n| \to |a|$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.1.24. Proposition. *Sind $a_n \to a$ und $b_n \to b$ zwei konvergente Folgen, sodass $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $a \leq b$.*

Beweis. Indirekt angenommen es gilt $a > b$. Nach Lemma 2.1.7 existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. Da $a_n \to a$ liegen fast alle Folgenglieder von (a_n) in $U_\varepsilon(a)$. Wegen $a_n \leq b_n$ liegen daher fast alle Folgenglieder von (b_n) im Intervall $(a - \varepsilon, \infty)$. Wegen $a > b$ ist $U_\varepsilon(b) \cap (a - \varepsilon, \infty) = \emptyset$. Daher können nur endlich viele Folgenglieder von (b_n) in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Aber dies widerspicht $b_n \to b$. Wir schließen daher, dass $a \leq b$ gelten muss. □

2.1.25. Bemerkung. Betrachte die Folgen $a_n := 0$ und $b_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt $a_n < b_n$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. D.h. selbst wenn $a_n < b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt für die Limiten i.A. nur $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

2.1.26. Proposition. *Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) drei Folgen sodass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $a_n \to x$ und $c_n \to x$, dann auch $b_n \to x$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to x$, liegen fast alle Folgenglieder von (a_n) in $U_\varepsilon(x)$. Da $c_n \to x$ liegen auch fast alle Folgenglieder von (c_n) in $U_\varepsilon(x)$. Wegen $a_n \leq b_n \leq c_n$ liegen daher auch fast alle Folgenglieder von (b_n) in $U_\varepsilon(x)$. Also konvergiert (b_n) gegen x. □

2.2. Konvergenzkriterien für Folgen.

2.2.1. Definition. Eine Folge reellen Zahlen (a_n) heißt *monoton wachsend,* falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$. Sie heißt *streng monoton wachsend,* falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a_{n+1}$. Sie heißt *monoton fallend,* falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq a_{n+1}$. Sie heißt *streng monoton fallend,* falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > a_{n+1}$. Sie heißt *monoton,* falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Sie heißt *streng monoton,* falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

2.2.2. Proposition. *Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge* (a_n) *konvergiert und es ist*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ebenso gilt: Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge (b_n) *konvergiert und es ist*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage über eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge (a_n). Sei $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beachte, dass dieses Supremum existiert, da die Folge (a_n) nach oben beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums, ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Also liegt mindestens ein Folgenglied im Intervall $(a - \varepsilon, \infty)$. Da die Folge a_n monoton wachsend ist, liegen dann fast alle Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, \infty)$. Da a ober Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist, müssen daher fast alle Folgenglieder in $(a - \varepsilon, a] \subseteq U_\varepsilon(a)$ zu liegen kommen. Also konvergiert die Folge (a_n) gegen a. Die zweite Aussage folgt nun leicht aus der ersten, indem wir die Folge $(-b_n)$ betrachten. □

2.2.3. Beispiel. Interessant an Proposition 2.2.2 ist, dass wir die Konvergenz einer Folge zeigen können ohne den Grenzwert zu kennen. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden. Es sei $a > 0$ und $x_0 > 0$ beliebig. Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{55}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt aus (55):

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 - a &= \frac{1}{4}\Big(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\Big) - a \\ &= \frac{1}{4}\Big(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Damit ist $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge x_n nach unten beschränkt. Aus (55) und (56) erhalten wir, für $n \in \mathbb{N}$, auch

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0.$$

Damit ist $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, also ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend. Nach Proposition 2.2.2 existiert daher $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Aus (55) folgt

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \quad \text{und daher auch} \quad x = \sqrt{a}.$$

Wir sehen also, dass die Folge x_n gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, und zwar für beliebigen Startwert $x_0 > 0$. Mehr über diese Folge findet sich etwa in [**K1**, Kapitel 5.4].

2.2.4. Definition. Unter einer *Intervallschachtelung* verstehen wir eine Folge kompakter Intervalle

$$I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2],\ I_3 = [a_3, b_3],\ \dots \qquad (a_n < b_n)$$

mit folgenden beiden Eigenschaften:

a) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$
b) $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

Wir sagen eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird von der Intervallschachtelung erfasst, falls x in jedem Intervall liegt, d.h. $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl x wird also genau dann von der Intervallschachtelung erfasst, wenn gilt

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \big\{ y \in \mathbb{R} \bigm| y \in I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \big\}$$

2.2.5. Satz (Intervallschachtelungsprinzip). *Jede Intervallschachtelung erfasst genau eine reelle Zahl.*

Beweis. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Die Folge a_n ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, etwa ist b_1 eine obere Schranke, siehe Definition 2.2.4(a). Ebenso ist die Folge b_n monoton fallend und nach unten beschränkt. Nach Proposition 2.2.2 existieren daher die Limiten $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$a_n \leq a \quad \text{sowie} \quad b \leq b_n, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen Definition 2.2.4(b) gilt auch

$$b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0, \quad \text{also} \quad a = b.$$

Sei nun $x := a = b$. Dann gilt $a_n \leq x \leq b_n$ und daher $x \in I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl x wird daher von der Intervallschachtelung erfasst. Aus Proposition 2.1.26 folgt sofort, dass x die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft ist. □

2.2.6. Bemerkung. Aus der Aussage von Satz 2.2.5 und dem Archimedischen Prinzip, siehe Proposition 1.9.19(b), lässt sich das Vollständigkeitsaxiom herleiten, siehe [**K1**, Kapitel 5.6].

2.2.7. Lemma. *Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Es sei (a_n) eine Folge. Betrachte die Menge

$$S := \big\{ n \in \mathbb{N} \bigm| \text{für alle } k \text{ mit } n \leq k \text{ gilt } a_n \leq a_k \big\}$$

Besteht S aus unendlich vielen Elementen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ offensichtlich eine monoton wachsende Teilfolge von (a_n). Es bleibt daher nur der Fall endlichen S zu behandeln. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ größer als jedes Element in S. Dann ist $n_1 \notin S$, also existiert n_2 mit $n_1 < n_2$ und $a_{n_1} > a_{n_2}$. Auch $n_2 \notin S$, also existiert n_3 mit $n_2 < n_3$ und $a_{n_2} > a_{n_3}$. Induktiv fortfahrend erhalten wir eine monoton fallende Teilfolge $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ von (a_n). In jedem Fall, S unendlich oder nicht, haben wir eine monotone Teilfolge gefunden. $\square$

2.2.8. Satz (Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach Lemma 2.2.7 besitzt jede Folge eine monotone Teilfolge. Ist die ursprüngliche Folge beschränkt, dann ist diese Teilfolge sicherlich auch beschränkt. Nach Proposition 2.2.2 muss sie daher konvergieren. $\square$

2.2.9. Definition. Unter einer *Cauchyfolge* verstehen wir jede Folge (a_n) mit der folgen Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

2.2.10. Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium). *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann wenn sie ein Cauchyfolge ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist. Sei also $a_n \to a$ eine konvergente Folge. Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$ existiert ein Index n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist (a_n) tatsächlich eine Cauchyfolge. Es bleibt zu zeigen, dass jede Cauchyfolge konvergiert. Wir zeigen zuerst, dass eine Cauchyfolge beschränkt sein muss. Ist (a_n) eine Cauchyfolge, dann existiert ein Index n_0 sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a_{n_0}| \leq 1$. Daher auch

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}|, \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mit $r := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ folgt dann $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge (a_n) beschränkt. Nach Satz 2.2.8 besitzt (a_n) daher eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Wir werden nun zeigen, dass dann auch (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, existiert n_0 mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Da $a_{n_k} \to a$, existiert ein Index $n_0' \geq n_0$ mit $|a - a_{n_0'}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n \geq n_0'$ gilt dann

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_0'} + a_{n_0'} - a| \leq |a_n - a_{n_0'}| + |a_{n_0'} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daher konvergiert (a_n) gegen a, und der Beweis ist vollständig. $\square$

2.2.11. Bemerkung. Aus Satz 2.2.10 und dem Archimedischen Prinzip, siehe Proposition 1.9.19(b), kann das Vollständigkeitsaxiom hergeleitet werden, siehe [**K1**, Kapitel 5.6].

2.2.12. Bemerkung. Satz 2.2.10 liefert uns ein weiteres Kriterium für die Konvergenz einer Folge, für dessen Anwendbarkeit wir den Grenzwert noch nicht kennen müssen, vgl. Proposition 2.2.2 und Beispiel 2.2.3.

2.3. Häufungswerte von Folgen.

2.3.1. Definition. Unter einem *Häufungswert* einer reellen Folge verstehen wir jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgenglieder in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ von x.

2.3.2. Beispiel. Die Folge $(-1)^n$ hat zwei Häufungswerte, 1 und -1.

2.3.3. Proposition. *Es sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a Häufungswert von (a_n) genau dann wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ existiert.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.3.4. Beispiel. Die Folge $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungswerte, 1 und -1: 1 ist Häufungswert, da die Teilfolge $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gegen 1 konvergiert, siehe Proposition 2.3.3. Ebenso sehen wir, dass -1 Häufungswert ist, da die Teilfolge $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$ gegen -1 konvergiert. Angenommen, es wäre $a \neq \pm 1$ ein weiterer Häufungswert von (a_n). Wähle $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(1) = \emptyset = U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(-1)$. Für gerades $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist dann $a_n \in U_\varepsilon(1)$, und für ungerades $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(-1)$. Für alle $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ gilt jedenfalls $a_n \notin U_\varepsilon(a)$, ein Widerspruch zur Annhame a wäre Häufungswert von (a_n). Also besitzt diese Folge tatsächlich nur die beiden Häufugswerte 1 und -1.

2.3.5. Beispiel. Betrachte die Folge (a_n) die wie folgt gegeben ist:

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{1}, \dots$$

Mit Hilfe geeigneter Teilfolgen lässt sich leicht zeigen, dass jedes Element der Menge $H := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ein Häufungswert von (a_n) ist, wir haben also unendlich viele Häufungswerte vor uns. Andererseits sind dies bereits alle Häufungswerte von (a_n), denn ist $a \in \mathbb{R}$, $a \notin H$, dann finden wir $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(a) \cap H = \emptyset$, und es liegt dann kein einziges der Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$, da ja alle $a_n \in H$.

2.3.6. Lemma. *Ist $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $b \in U_\varepsilon(a)$ dann existiert $\varepsilon' > 0$ mit $U_{\varepsilon'}(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon' := \varepsilon - |a - b|$. Da $b \in U_\varepsilon(a)$ gilt $\varepsilon' > 0$. Ist nun $x \in U_{\varepsilon'}(b)$ dann gilt wegen der Dreiecksungleichung, siehe Proposition 1.8.9(c),

$$|x - a| = |x - b + b - a| \leq |x - b| + |b - a| < \varepsilon' + |b - a| = \varepsilon,$$

also $x \in U_\varepsilon(a)$. Damit liegt jedes Element von $U_{\varepsilon'}(b)$ auch in $U_\varepsilon(a)$, also haben wir gezeigt $U_{\varepsilon'}(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$. □

2.3.7. Proposition. *Die Menge der Häufungswerte einer beschränkten Folge reeller Zahlen besitzt sowohl Maximum als auch Minimum.*[54]

Beweis. Es bezeichne H die Menge der Häufungswerte einer beschränkten Folge (a_n). Nach Satz 2.2.8 ist $H \neq \emptyset$. Da die Folge (a_n) beschränkt ist, ist auch die Menge H beschränkt. Damit existiert $x := \sup H$. Es genügt zu zeigen, dass x ein Häufungswert von (a_n) ist, denn dann muss x das Maximum von H. Indirekt angenommen x wäre kein Häufungswert. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass nur endlich viele Folgenglieder von (a_n) in $U_\varepsilon(x)$ zu liegen kommen. Es folgt $H \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$, denn ist $y \in U_\varepsilon(x)$ dann kann y kein Häufungswert von (a_n) sein, da ja nach Lemma 2.3.6 $\varepsilon' > 0$ mit $U_{\varepsilon'}(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$ existiert und daher auch $U_{\varepsilon'}(y)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Aus $H \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ folgt nun, dass $x - \varepsilon$ eine obere Schranke von H ist, ein Widerspruch zu $x = \sup H$. Wir schließen, dass x tatsächlich ein Häufungswert ist, also besitzt H ein Maximum. Durch Übergang zur Folge $(-a_n)$ lässt sich die Aussage über das Minimum von H leicht auf die schon bewiesene Aussage über das Maximum zurück führen. □

2.3.8. Definition. Der größte bzw. kleinste Häufungswert einer beschränkten Folge (a_n) wird ihr *Limes superior* bzw. *Limes inferior* genannt und mit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

bezeichnet.

2.3.9. Bemerkung. Offensichtlich gilt für jede beschränkte Folge (a_n) stets

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Auch liegen alle Häufungswerte zwischen $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

2.3.10. Beispiel. Für die Folge (a_n) aus Beispiel 2.3.5 gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} = 1.$$

2.3.11. Proposition. *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist $x := \limsup_{n\to\infty} a_n$ die einzige Zahl mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in $(x + \varepsilon, \infty)$ aber unendlich viele Folgenglieder kommen in $(x - \varepsilon, \infty)$ zu liegen.*

Analog ist $y := \liminf_{n\to\infty} a_n$ die einzige Zahl mit der Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in $(-\infty, y - \varepsilon)$, aber unendlich viele kommen in $(-\infty, y + \varepsilon)$ zu liegen.

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage über x, die über y kann durch Übergang zu $(-a_n)$ leicht darauf zurück geführt werden. Sei $\varepsilon > 0$. Da x ein Häufungswert von (a_n) ist liegen unendlich viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(x) \subseteq (x - \varepsilon, \infty)$. Auch kann es höchstens endlich viele Folgenglieder in $(x+\varepsilon, \infty)$ geben, denn anderfalls

[54] D.h. beschränkte Folgen besitzen stets einen größten und einen kleinsten Häufungswert.

könnten wir eine Teilfolge (a_{n_k}) wählen die zur Gänze in $(x+\varepsilon,\infty)$ liegt, diese müsste aber nach Satz 2.2.8 und Proposition 2.1.24 einen Häufungswert in $[x+\varepsilon,\infty)$ haben, dieser wäre dann auch ein Häufungswert von (a_n), was aber $x = \limsup_{n\to\infty} a_n$ widerspricht. Es bleibt noch zu zeigen, dass x die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Ist $z > x$, dann ist $\varepsilon' := \frac{1}{2}(z-x) > 0$ und daher liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in $(x+\varepsilon',\infty) = (z-\varepsilon',\infty)$; also hat z nicht die gewünschte Eigenschaft. Ist $z < x$, dann ist $\varepsilon'' := \frac{1}{2}(x-z) > 0$ und daher liegen unendlich viele Folgenglieder in $(x-\varepsilon'',\infty) = (z+\varepsilon'',\infty)$; also hat z nicht die gewünschte Eigenschaft. Wir sehen daher, dass es nur eine einzige Zahl mit dieser Eigenschaft geben kann, nämlich $x = \limsup_{n\to\infty} a_n$. □

2.3.12. Proposition. *Für eine beschränkte Folge (a_n) gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid n \le k\}.$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid n \le k\}.$$

Beweis. Es sei $x_n := \sup\{a_k \mid k \ge n\}$. Beachte, dass diese Suprema existieren, da die Folge (a_n) nach oben beschränkt ist. Offensichtlich ist die Folge (x_n) monoton fallend. Da die Folge (a_n) nach unten beschränkt ist, gilt dies auch für (x_n). Daher existiert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, siehe Proposition 2.2.2. Um $x = \limsup_{n\to\infty} a_n$ zu zeigen werden wir die Beschreibung des Limes superiors in Proposition 2.3.11 verwenden. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Lägen unendlich viele Folgenglieder a_n in $(x+\varepsilon,\infty)$, dann wären alle $x_n > x+\varepsilon$ was aber $x_n \to x$ widerspräche; also können höchstens endlich viele der a_n in $(x+\varepsilon,\infty)$ liegen. Würden nur endlich viele der a_n in $(x-\varepsilon,\infty)$ zu liegen kommen, dann wären fast alle $a_n \le x-\varepsilon$ und damit auch fast alle $x_n \le x-\varepsilon$, was aber $x_n \to x$ widerspricht; also müssen unendlich viele der a_n in $(x-\varepsilon,\infty)$ enthalten sein. Damit erfüllt die Zahl x also das Kriterium in Proposition 2.3.11 und muss daher mit $\limsup_{n\to\infty} a_n$ überein stimmen. Durch Übergang zu $(-a_n)$ folgt die zweite zu beweisende Gleichung leicht aus der ersten. □

2.3.13. Proposition. *Für eine beschränkte Folge (a_n) sind äquivalent:*

a) *Die Folge (a_n) konvergiert.*
b) *Es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.*
c) *Die Folge hat genau einen Häufungswert a.*

In diesem Fall gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Beweis. Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist offensichtlich, siehe Bemerkung 2.3.9. Ad (a)⇒(c): Indirekt angenommen (a_n) hätte zwei verschiedene Häufungspunkte. Nach Proposition 2.3.3 gibt es dann zwei konvergente Teilfolgen von (a_n) mit unterschiedlichen Grenzwerten. Dies widerspricht aber Proposition 2.1.16. Also kann eine konvergente Folge nur einen Häufungswert haben, und dieser muss mit dem Grenzwert überein stimmen. Ad (b)⇒(a): Sei $x = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Nach Proposition 2.3.11 liegen nur endlich viele der a_n in $(x+\varepsilon, \infty)$, aber auch nur endlich viele der (a_n) in $(-\infty, x-\varepsilon)$. Daher gilt für fast alle Folgenglieder $|a_n - x| \leq \varepsilon$. Also konvergiert (a_n) gegen x. □

2.4. Uneigentliche Grenzwert.

2.4.1. Definition. Wir sagen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert gegen* ∞ falls zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n > K$. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad a_n \to \infty.$$

Wir sagen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert gegen* $-\infty$ falls zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n < -K$. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{oder} \quad a_n \to -\infty.$$

In beiden Fällen wird die Folge *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* genannt.

Eine Folge divergiert also gegen ∞ genau dann wenn für jedes $K > 0$ fast alle Folgenglieder im Intervall (K, ∞) liegen. Sie diviergiert gegen $-\infty$ genau dann wenn für jedes $K > 0$ fast alle Folgenglieder in $(-\infty, -K)$ liegen.

2.4.2. Bemerkung. Gilt $a_n \to \infty$, dann ist die Folge (a_n) nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Ist darüber hinaus $a_n \leq b_n$ für fast alle n, so gilt auch $b_n \to \infty$. Gilt $a_n \to -\infty$, dann ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt. Ist weiters $b_n \leq a_n$ für fast alle n, dann auch $b_n \to -\infty$.

2.4.3. Beispiel. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a + nb = \begin{cases} \infty & \text{falls } b > 0 \\ a & \text{falls } b = 0 \\ -\infty & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Der Fall $b = 0$ ist trivial, die anderen beiden folgen leicht aus dem Archimedischen Prinzip, siehe Proposition 1.9.19(b).

2.4.4. Proposition. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Dann gilt:*

a) *Ist a_n nach unten beschränkt und $b_n \to \infty$, dann auch $a_n + b_n \to \infty$.*
b) *Ist a_n nach oben beschränkt und $b_n \to -\infty$, dann auch $a_n + b_n \to -\infty$.*
c) *Existiert $\rho > 0$ mit $a_n \geq \rho$ für fast alle n, $b_n \to \infty$, dann $a_n b_n \to \infty$.*
d) *Existiert $\rho > 0$ mit $a_n \geq \rho$ für fast alle n, $b_n \to -\infty$, dann $a_n b_n \to -\infty$.*
e) *Existiert $\rho > 0$ mit $a_n \leq -\rho$ für fast alle n, $b_n \to \infty$, dann $a_n b_n \to -\infty$.*
f) *Existiert $\rho > 0$ mit $a_n \leq -\rho$ für fast alle n, $b_n \to -\infty$, dann $a_n b_n \to \infty$.*
g) *Gilt $|a_n| \to \infty$, dann auch $\frac{1}{a_n} \to 0$.*
h) *Sind fast alle $a_n \neq 0$ und $\frac{1}{a_n} \to 0$, dann auch $|a_n| \to \infty$.*

i) *Sind fast alle* $a_n > 0$ *und* $a_n \to 0$, *dann auch* $\frac{1}{a_n} \to \infty$.
j) *Sind fast alle* $a_n < 0$ *und* $a_n \to 0$, *dann auch* $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

BEWEIS. Ad (a): Sei also $K > 0$. Da (a_n) nach unten beschränkt ist, existiert $r \in \mathbb{R}$ mit $r \leq a_n$ für alle n. Da $b_n \to \infty$ gilt für fast alle Folgenglieder $b_n > K - r$. Es folgt $a_n + b_n > r + (K - r) = K$ für fast alle n. Daher $a_n + b_n \to \infty$. Die restlichen Aussagen lassen sich ähnlich einfach beweisen. □

Da sowohl konvergente Folgen als auch gegen ∞ divergente Folgen nach unten beschränkt sind, erhalten wir aus Proposition 2.4.4(a) auch die beiden Aussagen:

a) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to \infty$, dann auch $a_n + b_n \to \infty$.
b) Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, dann auch $a_n + b_n \to \infty$.

Analoge Eigenschaften folgen aus Proposition 2.4.4(b). Ebenso erhalten wir aus Proposition 2.4.4(c) die Aussagen:

a) Gilt $a_n \to a$, $a > 0$ und $b_n \to \infty$, dann auch $a_n b_n \to \infty$.
b) Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, dann auch $a_n b_n \to \infty$.

Analoges folgt aus Proposition 2.4.4(d)–(f). *Merkregeln* dazu sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty & -\infty - \infty &= -\infty \\
a + \infty &= \infty & a - \infty &= -\infty \\
\infty \cdot \infty &= \infty & -\infty \cdot -\infty &= \infty \\
a \cdot \infty &= \infty \quad (a > 0) & a \cdot (-\infty) &= -\infty \quad (a > 0) \\
a \cdot \infty &= -\infty \quad (a < 0) & a \cdot (-\infty) &= \infty \quad (a < 0) \\
\frac{1}{\infty} &= 0 & \frac{1}{-\infty} &= 0 \\
\frac{1}{0+} &= \infty & \frac{1}{0-} &= -\infty
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{a}{0}$ etc. werden als *unbestimmte Formen* bezeichnet, für sie ist keine allgemeine Aussage möglich. Gilt etwa $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, dann kann über das Konvergenzverhalten der Folge $a_n - b_n$ i.A. keine Aussage getroffen werden. Wie die folgenden Beispiele zeigen ist alles möglich:

$$\begin{array}{rrl}
\lim_{n\to\infty} 2n = \infty & \lim_{n\to\infty} n = \infty & \lim_{n\to\infty} 2n - n = \infty \\
\lim_{n\to\infty} n + a = \infty & \lim_{n\to\infty} n = \infty & \lim_{n\to\infty} n + a - n = a \\
\lim_{n\to\infty} n = \infty & \lim_{n\to\infty} 2n = \infty & \lim_{n\to\infty} n - 2n = -\infty \\
\lim_{n\to\infty} n + (-1)^n = \infty & \lim_{n\to\infty} n = \infty & n + (-1)^n - n \quad \text{diverg., beschr.} \\
\lim_{n\to\infty} 2n + (-1)^n n = \infty & \lim_{n\to\infty} 2n = \infty & 2n + (-1)^n n - 2n \quad \text{diverg., unbeschr.}
\end{array}$$

Analog kann im Fall $a_n \to \infty$ und $b_n \to 0$ i.A. keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $a_n b_n$ getroffen werden. Wieder ist alles möglich wie an den folgenen Beispielen beobachtet werden kann:

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty & \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0 & \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot n^{-1} = \infty \\
\lim_{n\to\infty} n = \infty & \lim_{n\to\infty} an^{-1} = 0 & \lim_{n\to\infty} n \cdot an^{-1} = a \\
\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty & \lim_{n\to\infty} -n^{-1} = 0 & \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (-n^{-1}) = -\infty \\
\lim_{n\to\infty} n = \infty & \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^{-1} = 0 & n \cdot (-1)^n n^{-1} \quad \text{diverg., beschr.} \\
\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty & \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^{-1} = 0 & n^2 \cdot (-1)^n n^{-1} \quad \text{diverg., unbeschr.}
\end{array}$$

Auch kann aus $a_n \to 0$ nicht auf das Konvergenzverhalten von $\frac{1}{a_n}$ geschlossen werden, denn $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^{-1} = 0$ aber $\frac{1}{(-1)^n n^{-1}}$ ist divergent. Aus diesen Beispielen lassen sich auch leicht Beispiele zu den unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. angeben, aus denen dann ersichtlich ist, dass in diesen Fällen i.A. nichts über das Konvergenzverhalten ausgesagt werden kann, siehe Übungsaufgaben.

2.4.5. Proposition. *Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad \textit{falls } |a| < 1. \tag{57}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 1 \qquad \textit{falls } a = 1. \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \qquad \textit{falls } a > 1. \tag{59}$$

$$a^n \textit{ ist beschränkt und divergent} \qquad \textit{falls } a = -1. \tag{60}$$

$$a^n \textit{ ist unbeschränkt und divergent} \qquad \textit{falls } a < -1. \tag{61}$$

Beweis. Aus der Bernoulli Ungleichung, siehe Proposition 1.8.8, erhalten wir

$$|a^n| = |a|^n = (1 + |a| - 1)^n \geq 1 + n(|a| - 1). \tag{62}$$

Wir behandeln zunächst den Fall $|a| > 1$. Dann ist $|a| - 1 > 0$, also divergiert die Rechte Seite von (62) gegen ∞, siehe Beispiel 2.4.3. Nach Bemerkung 2.4.2 gilt daher auch $\lim_{n\to\infty} |a^n| = \infty$. Wir schließen, dass die Folge a^n unbeschränkt, also divergent ist. Im Fall $a > 1$ folgt wegen $|a^n| = a^n$ sofort $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Im Fall $a < -1$ hat die Folge a_n alternierendes Vorzeichen, also kann sie weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$ divergieren. Damit sind (59) und (61) gezeigt. Die Fälle (58) und (60) sind trivial. Es bleibt (57) zu zeigen. Sei nun also $|a| < 1$. O.B.d.A. sei $a \neq 0$. Wenden wir die Abschätzung (62) auf $\frac{1}{a}$ an erhalten wir

$$\left|\tfrac{1}{a^n}\right| = \left|\left(\tfrac{1}{a}\right)^n\right| \geq 1 + n\left(\left|\tfrac{1}{a}\right| - 1\right). \tag{63}$$

Da $\left|\frac{1}{a}\right| - 1 > 0$ divergiert die rechte Seite von (63) gegen ∞, und daher folgt $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{a^n}\right| = \infty$. Nach Proposition 2.4.4(g) ist daher (a^n) eine Nullfolge. Damit ist auch (57) gezeigt. □

2.4.6. Proposition. *Es sei $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^r = \begin{cases} 0 & \textit{falls } r < 0 \\ 1 & \textit{falls } r = 0 \\ \infty & \textit{falls } r > 0 \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $r > 0$. Sei $K \geq 0$. Nach Proposition 1.9.19(b) existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > K^{\frac{1}{r}}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann ebenfalls $n > K^{\frac{1}{r}}$. Mittels (39) und Proposition 1.9.23(a) erhalten wir $n^r > K$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} n^r = \infty$. Der Fall $r = 0$ ist trivial. Nun zum Fall $r < 0$. Nach Obigem gilt $\lim_{n\to\infty} n^{-r} = \infty$. Aus Proposition 2.4.4(g) folgt daher $\lim_{n\to\infty} n^r = 0$. □

2.4.7. Proposition. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beweis. Beachte, dass stets $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Aus dem binomischen Lehrsatz, siehe Proposition 1.8.5, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} n = (\sqrt[n]{n})^n = \big(1 + (\sqrt[n]{n} - 1)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \\ &\geq 1 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n}$ also auch

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{2} n^{-1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Proposition 2.4.6 gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2} n^{-1/2} = 0$. Aus Proposition 2.1.26 folgt daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

Für $p \in \mathbb{N}$ und $a > 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, siehe Proposition 2.4.5 und Proposition 2.4.6. Die Grenzwertaussagen von Proposition 2.4.4 reichen daher nicht aus den Grenzwert (falls dieser existiert) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p}$ zu bestimmen, wir haben eine unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ vor uns. Es gilt jedoch

2.4.8. Proposition. *Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^n}{n^p}\right| = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} &= 0 && \textit{falls } |a| > 1 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} &= \infty && \textit{falls } a > 1 \\ \lim_{n\to\infty} n^p a^n &= 0 && \textit{falls } |a| < 1 \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n^p}\right| = \infty$, falls $|a| > 1$. Für $n \geq 2p$ gilt auch $n - p \geq \frac{n}{2}$ und wir erhalten wir aus dem binomischen Lehrsatz, siehe Proposition 1.8.5,

$$\begin{aligned}|a^n| = (1 + |a| - 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(|a|-1)^k \geq \binom{n}{p+1}(|a|-1)^{p+1}\\ = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{(p+1)!}(|a|-1)^{p+1} \geq (n-p)^{p+1}\frac{(|a|-1)^{p+1}}{(p+1)!}\\ \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1}\frac{(|a|-1)^{p+1}}{(p+1)!} = n^{p+1}\cdot\frac{(|a|-1)^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)!}\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\left|\frac{a^n}{n^p}\right| \geq n \cdot \frac{(|a|-1)^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)!} \qquad \text{für } |a| > 1 \text{ und alle } n \geq 2p.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen ∞ divergiert, gilt dies auch für die linke Seite. Damit ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n^p}\right| = \infty$ gezeigt, $|a| > 1$. Die Aussage $\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0$ folgt nun aus Proposition 2.4.4(g). Auch folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^p} = \infty$ falls $a > 1$, denn in diesem Fall gilt $\left|\frac{a^n}{n^p}\right| = \frac{a^n}{n^p}$. Ist schließlich $|a| < 1$, dann gilt $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$ und daher $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1/a)^n}{n^p}\right| = \infty$ woraus nun mittels Proposition 2.4.4(g) auch $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$ folgt. □

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben unbeschränkte Menge dann schreiben wir $\sup A = \infty$, da ja gewissermaßen ∞ die kleinste obere Schranke von A ist. Ganz analog, ist A eine nicht leere nach unten unbeschränkte Menge, so schreiben wir $\inf A = -\infty$. Diese Schreibweisen sind sehr nützlich, denn es gilt dann z.B.

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$
$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

für beliebige nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$, wo $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$, und bei der Interpretation der rechten Seiten die Konventionen $\infty + \infty = \infty$, $a + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$ sowie $a + (-\infty) = -\infty$ Anwendung finden.

Ist eine Folge (a_n) nach oben unbeschränkt so schreiben wir $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dies ist genau dann der Fall wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \infty$ existiert, vgl. Proposition 2.3.3, gewissermaßen ist ∞ der größte Häufungswert der Folge (a_n). Anders formuliert, es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn für jedes $K > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall (K, ∞) zu liegen kommen. Liegen für jedes $K > 0$ fast alle Folgenglieder in $(-\infty, -K)$ so schreiben wir $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In diesem Fall konvergiert jede Teilfolge (a_{n_k}) gegen $-\infty$, d.h. $-\infty$ ist gewissermaßen $-\infty$ der einzige (und damit größte) Häufungswert von (a_n). Analog schreiben wir $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ falls die Folge (a_n) nicht nach unten beschränkt ist. Dies ist genau dann der Fall wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) mit

$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = -\infty$ existiert, d.h. $-\infty$ ist gewissermaßen der kleinste Häufungswert. Es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ genau dann wenn für jedes $K > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(-\infty, -K)$ zu liegen kommen. Liegen für jedes $K > 0$ fast alle Folgenglieder in (K, ∞) so schreiben wir $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$. In diesem Fall konvergiert jede Teilfolge (a_{n_k}) gegen ∞, d.h. ∞ ist der einzige (und damit kleinste) Häufugswert von (a_n). Auch diese Schreibweisen sind sehr nützlich, denn es gilt nun für beliebige (d.h. nicht notwendig beschränkte) Folgen

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n &\leq \limsup_{n\to\infty} a_n \\
\limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid n \geq k\} \\
\liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid n \geq k\} \\
\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n &\leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \\
\liminf_{n\to\infty} a_n + b_n &\geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n
\end{aligned}$$

Alle Häufungswerte von (a_n) liegen zwischen $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$, vgl. Bemerkung 2.3.9 und Proposition 2.3.11.

2.5. Folgen komplexer Zahlen. Unter einer Folge komplexer Zahlen verstehen wir eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Analog zu Definition 2.1.4 heißt eine Folge komplexer Zahlen (z_n) gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergent, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Wir ersetzen dabei bloß den Absolutbetrag reeller Zahlen durch den Absolutbetrag komplexer Zahlen. In diesem Fall heißt z der Grenzwert oder Limes der Folge (z_n), und schreiben wir $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder einfach nur $z_n \to z$. Für $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$B_\varepsilon(z) := \big\{w \in \mathbb{C} \bigm| |z - w| < \varepsilon\big\}$$

der *ε-Ball* oder die *ε-Scheibe* mit Zentrum z. Eine Folge komplexer Zahlen (z_n) konvergiert genau dann gegen z, wenn in jedem ε-Ball um z fast alle Folgenglieder zu liegen kommen. Genau wie für reelle Folgen zeigt man, dass auch eine Folge komplexer Zahlen höchstens einen Grenzwert hat, vgl. Proposition 2.1.8, anstatt Proposition 1.8.9 verwenden wir nun Proposition 1.10.4.

Eine Folge komplexer Zahlen (a_n) heißt bechränkt falls eine reelle Zahl $r > 0$ existiert, sodass $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog zu Proposition 2.1.13 zeigt man leicht

2.5.1. Proposition. *Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt.*

Analog zu Definition 2.1.15 definiert man Teilfolgen von Folgen komplexer Zahlen. Proposition 2.1.16 bleibt dann auch für Folgen komplexer Zahlen richtig.

2.5.2. Proposition. *Es seien $z_n \to z$ und $w_n \to w$ zwei konvergente Folgen komplexer. Dann gilt:*

a) $z_n + w_n \to z + w$
b) $z_n w_n \to zw$
c) $\bar{z}_n \to \bar{z}$
d) $|z_n| \to |z|$
e) *Gilt* $w \neq 0$, *dann sind fast alle* $w_n \neq 0$ *und* $\frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$.

Dies lässt sich genauso wie Proposition 2.1.19 beweisen, wieder verwenden wir Proposition 1.10.4 anstatt Proposition 1.8.9. Auch bleiben Proposition 2.1.22 und Proposition 2.1.23 für Folgen komplexer Zahlen richtig. Beachte, dass für Folgen komplexer Zahlen kein Analogon zu Proposition 2.1.24 und Proposition 2.1.26 existiert, da ja in $\mathbb{C}$ keine kleiner Relation definiert ist.

Ist (z_n) eine Folge komplexer Zahlen, dann sind $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ zwei Folgen reeller Zahlen. Die Konvergenz komplexer Folgen kann auf die Konvergenz reeller Folgen zurückgeführt werden, denn es gilt

2.5.3. Lemma. *Eine Folge komplexer Zahlen* (z_n) *konvergiert dann und nur dann wenn die Folgen* $(\operatorname{Re} z_n)$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)$ *beide konvergieren. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathbf{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Beweis. Wegen $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z|$ und $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq |z_n - z|$, siehe (44), folgt aus $z_n \to z$ sofort $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$. Umgekehrt folgt aus $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ mittels

$$|z_n - z|^2 = (\operatorname{Re}(z_n - z))^2 + (\operatorname{Im}(z_n - z))^2 = |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|^2$$

sofort $|z_n - z|^2 \to 0$, also $|z_n - z| \to 0$ und damit $z_n \to z$. □

2.5.4. Satz (Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Dies lässt sich leicht auf Satz 2.2.8 zurückführen. Ist nämlich (z_n) eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, dann sind $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ zwei beschränkte reelle Folgen, siehe (44). Nach Satz 2.2.8 existiert daher eine Teilfolge (z_{n_k}) sodass $(\operatorname{Re} z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Folge $(\operatorname{Im} z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann ebenfalls beschränkt, nach Satz 2.2.8 existiert eine Teilfolge $(z_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ sodass $(\operatorname{Im} z_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $(\operatorname{Re} z_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$. Aus Lemma 2.5.3 folgt, dass die komplexe Folge $(z_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert. □

Analog zu Definiton 2.2.9 heißt eine Folge komplexer Zahlen (z_n) eine Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Wieder haben wir bloß den Absolutbetrag reeller Zahlen durch den Absolutbetrag komplexer Zahlen ersetzt.

2.5.5. Lemma. *Eine Folge komplexer Zahlen* (z_n) *ist eine Cauchyfolge genau dann wenn* $(\operatorname{Re} z_n)$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)$ *beides Cauchyfolgen sind.*

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.5.3 folgt dies ohne Probleme aus $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ und $|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$. □

2.5.6. Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium). *Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. Der Beweis kann genau wie der von Satz 2.2.10 geführt werden, anstatt Satz 2.2.8 verwendet man Satz 2.5.4. Einfacher gehts aber so: Nach Lemma 2.5.3 ist eine Folge komplexer Zahlen (z_n) genau dann konvergent wenn die beiden reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ beide konvergieren. Nach Satz 2.2.8 ist dies genau dann der Fall wenn $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ beides Cauchyfolgen sind. Nach Lemma 2.5.5 ist dies genau dann der Fall wenn (z_n) eine Cauchyfolge ist. □

2.5.7. Bemerkung. Die Tatsache, dass jede Cauchyfolge komplexer Zahlen konvergiert, siehe Satz 2.5.6, wird als Vollständigkeit der komplexen Zahlen bezeichnet, vgl. Bemerkung 2.2.11.

Analog zu Definition 2.3.1 heißt $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungswert der Folge (z_n) falls in jedem ε-Ball um z unendlich viele Folgenglieder zu liegen kommen. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$ existiert. Da in $\mathbb{C}$ keine kleiner Relation definiert ist, können wir auch nicht vom größten oder kleinsten Häufungswert einer Folge sprechen, d.h. für Folgen komplexer Zahlen machen die Begriffe Limes superior und Limes inferior keinen Sinn. Beachte jedoch, dass nach Satz 2.5.4 jede beschränkte Folge komplexer Zahlen mindestens einen Häufungswert besitzt.

Wir sagen eine Folge komplexer Zahlen (z_n) *divergiert gegen* ∞ falls gilt: Für jedes $K > 0$ liegen fast alle Folgenglieder z_n in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > K\}$, d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|z_n| > K$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ oder $z_n \to \infty$. Beachte, dass $z_n \to \infty$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

2.5.8. Bemerkung. Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $z_n := \iota(a_n)$ dieselbe Folge aufgefasst als Folge komplexer Zahlen. Gilt $a_n \to \infty$ dann natürlich auch $z_n \to \infty$. Aber auch $a_n \to -\infty$ impliziert $z_n \to \infty$. Wir können[55] für Folgen komplexer Zahlen nicht zwischen Konvergenz gegen ∞ und $-\infty$ unterscheiden. Beachte auch, dass aus $z_n \to \infty$ nicht unbedingt $a_n \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$ folgt, wie etwa am Beispiel $a_n := (-1)^n n$ beobachtet werden kann.

2.5.9. Beispiel. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a + nb = \begin{cases} \infty & \text{falls } b \neq 0 \\ a & \text{falls } b = 0 \end{cases}$$

Der Fall $b = 0$ ist trivial, da die Folge dann konstant ist. Ist $b \neq 0$, dann gilt $|a+nb| \geq |nb| - |a| = n|b| - |a|$, siehe (47). Da $n|b| - |a| \to \infty$, siehe Beispiel 2.4.3, folgt $|a + nb| \to \infty$, also auch $a + nb \to \infty$. Vergleiche dies mit Beispiel 2.4.3.

[55] oder besser, wollen hier nicht

Es gelten die folgenden Rechenregeln, vgl. Proposition 2.4.4.

2.5.10. Proposition. *Es seien (z_n) und (w_n) zwei Folgen komplexer Zahlen. Dann gilt:*

a) *Ist z_n beschränkt und $w_n \to \infty$, dann auch $z_n + w_n \to \infty$.*
b) *Existiert $\rho > 0$ mit $|z_n| \geq \rho$ für fast alle n, $w_n \to \infty$, dann $z_n w_n \to \infty$.*
c) *Gilt $z_n \to \infty$, dann sind fast alle $z_n \neq 0$ und $\frac{1}{z_n} \to 0$.*
d) *Sind fast alle $z_n \neq 0$ und $\frac{1}{z_n} \to 0$, dann auch $z_n \to \infty$.*
e) *Sind fast alle $|w_n| \geq |z_n|$ und $z_n \to \infty$ dann auch $w_n \to \infty$.*

Beweis. Dies kann analog zu Proposition 2.4.4 bewiesen werden. □

2.5.11. Bemerkung. Es seien (z_n) und (w_n) zwei Folgen komplexer Zahlen. Gilt $z_n \to \infty$ und $w_n \to \infty$ dann auch $z_n w_n \to \infty$, siehe Proposition 2.5.10(b). Beachte jedoch, dass aus $z_n \to \infty$ und $w_n \to \infty$ nichts über das Konvergenzverhalten von $z_n + w_n$ folgt. Ebenso sind $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ unbestimmte Formen, über deren Konvergenzverhalten i.A. nichts ausgesagt werden kann.

2.5.12. Beispiel. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z| < 1 \\ \infty & \text{falls } |z| > 1. \end{cases}$$

Wegen $|z^n| = |z|^n$ folgt dies aus Proposition 2.4.5.

2.6. Reihen. Der Begriff der Konvergenz von (unendlichen) Reihen wird auf den Begriff der Konvergenz von Folgen zurückgeführt.

2.6.1. Definition. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann wird der Ausdruck

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

eine Reihe komplexer Zahlen genannt. Wir schreiben dafür auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Unter der n-te *Partialsumme* einer Reihe verstehen wir die Zahl

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent falls die Folge ihrer Partialsummen (s_n) konvergiert. In diesem Fall wird $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ der *Grenzwert* oder die *Summe* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genannt, und wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Ist die Folge der Partialsummen divergent, dann nennen wir die Reihe divergent. In anderen Worten, eine Reihe konvergiert genau dann wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert, und in diesem Fall ist die Summe der Reihe durch den Grenzwert der Folge der Partialsummen definiert.

2.6.2. Bemerkung. Beachte, dass das Symbol $\sum_{n=1}^\infty a_n$ zwei Bedeutungen hat. Einerseits bezeichnet es eine Reihe, andererseits aber auch ihren Grenzwert, falls dieser existiert.

2.6.3. Bemerkung. Wie auch für Folgen wollen wir nicht darauf bestehen, dass die Nummerierung der Summanden einer Reihe mit 1 beginnt. Wir werden auch $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, oder $\sum_{n=k}^\infty a_n$ als Reihe bezeichnen. Es sollte offensichtlich sein wie die Definition der Partialsummen angepasst werden muss.

2.6.4. Bemerkung. Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, dann können wir die Reihe reeller Zahlen $\sum_{n=1}^\infty a_n$ auch als Reihe komplexer Zahlen auffassen. Ist sie konvergent, dann ist ihre Summe wieder eine reelle Zahl. Wenn wir von Reihen komplexer Zahlen sprechen schließen wir Reihen reeller Zahlen nicht aus. Allgemein gilt, siehe Lemma 2.5.3, eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert genau dann wenn die Reihen reeller Zahlen $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n$ beide konvergieren. In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n.$$

2.6.5. Proposition. *Ist* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *eine konvergente Reihe, dann ist* (a_n) *eine Nullfolge und auch* $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^\infty a_n = 0$.

Beweis. Es bezeichne $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ die Folge der Partialsummen und $s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Aus $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0,$$

also ist (a_n) eine Nullfolge. Aus $\sum_{n=k}^\infty a_n = s - s_{k-1}$ folgt auch sofort

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^\infty a_n = s - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0. \qquad \square$$

2.6.6. Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$$

divergiert, da ihre Summanden keine Nullfolge bilden, siehe Proposition 2.6.5.

2.6.7. Beispiel. Betrachte die sogenannte *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \frac{1}{17} + \cdots$$

Offensichtlich gilt dann für die Partialsummen $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$. Also divergiert die Teilfolge (s_{2^n}) gegen $+\infty$. Da die Folge (s_n) monoton wachsend ist schließen wir daraus auch $s_n \to +\infty$, also $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$. Beachte, dass die

Summanden der harmonischen Reihe eine Nullfolge bilden, die Reihe aber nicht konvergiert, vgl. Proposition 2.6.5. Bloß weil die Summanden einer Reihe eine Nullfolge bilden, muss diese noch lange nicht konvergieren.

2.6.8. Proposition (Geometrische Reihe). *Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergiert die sogenannte geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Für $|z| \geq 1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Beweis. Sei zunächst $|z| < 1$. Nach Proposition 1.8.4 und Proposition 2.4.5 gilt für die Partialsummen der geometrischen Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}.$$

Ist $|z| \geq 1$, dann bilden die Summanden z^n keine Nullfolge, siehe Proposition 2.4.5, also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, siehe Proposition 2.6.5. □

2.6.9. Proposition. *Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n$ und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{sowie} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}.$$

Beweis. Dies folgt sofort durch Anwendung von Proposition 2.5.2 auf die Folge der Partialsummen. □

2.6.10. Proposition (Cauchy'sches Konvergenzkriterium). *Eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn das folgende sogenannte Cauchykriterium erfüllt ist: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq m \geq n_0$ gilt*

$$\left| a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Die Bedingung an die Reihe bedeutet gerade, dass die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge bildet. Daher folgt die Proposition aus Satz 2.5.6. □

Unter einer *alternierenden Reihe* verstehen wir eine Reihe reeller Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sodass die Summanden abwechselndes Vorzeichen haben, dh. $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.6.11. Satz (Leibniz'sches Konvergenzkriterium). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Beweis. Es sei $n \geq m$. Da (a_n) monoton fallend ist gilt

$$\underbrace{a_m - a_{m+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m+2} - a_{m+3}}_{\geq 0} + \cdots + (-1)^{n-m} a_n \geq 0.$$

Ähnlich erhalten wir

$$a_m - \underbrace{(a_{m+1} - a_{m+2})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{m+3} - a_{m+4})}_{\geq 0} - \cdots + (-1)^{n-m} a_n \leq a_m.$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} &\left|(-1)^m a_m + (-1)^{m+1} a_{m+1} + (-1)^{m+2} a_{m+2} + \cdots + (-1)^n a_n\right| \\ &\qquad = \left|a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} \pm \cdots + (-1)^{n-m} a_n\right| \leq a_m. \end{aligned}$$

Da (a_n) eine Nullfolge ist, sehen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ das Cauchykriterium erfüllt. Nach Proposition 2.6.10 konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. □

2.6.12. Beispiel. Die sogenannte *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots$$

konvergiert, siehe Satz 2.6.11. Es lässt sich zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

2.7. Absolut konvergente Reihen. Ist (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, $a_n \geq 0$, dann ist die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Ist die Folge der Partialsummen (s_n) nach oben beschränkt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ist (s_n) nicht nach oben bechränkt, dann divergiert die Reihe, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Diese Behautungen folgen sofort aus Proposition 2.2.2 und Proposition 2.1.13. Sind alle $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2.7.1. Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent* wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

2.7.2. Proposition. *Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, und es gilt*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{64}$$

Beweis. Nach Proposition 2.6.10 erfüllt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ das Cauchykriterium. Wegen der Dreiecksungleichung

$$\left|a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n\right| \leq |a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

erfüllt auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ das Cauchykriterium. Nach Proposition 2.6.10 konvergiert daher die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Aus

$$\Big|\sum_{k=1}^n a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

folgt für $n \to \infty$ dann (64), siehe Proposition 2.1.24 und Proposition 2.5.2(d). $\square$

2.7.3. Bemerkung. Eine konvergente Reihe muss nicht notwendigerweise absolut konvergieren, siehe Beispiel 2.6.7 und Beispiel 2.6.12.

2.7.4. Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe absolut, denn, siehe Proposition 2.6.8,

$$\sum_{n=0}^\infty |z^n| = \sum_{n=0}^\infty |z|^n = \frac{1}{1-|z|}.$$

2.7.5. Satz. *Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut und es gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}.$$

Beweis. Nach Proposition 2.7.2 konvergiert die Reihe $s := \sum_{n=1}^\infty a_n$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^\infty |a_k| = 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n_0+1}^\infty |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \Big|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - s\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektiv ist, existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sigma\big(\{1,2,3,\dots,n_1\}\big) \supseteq \{1,2,3,\dots,n_0\}.$$

Für $n \geq n_1$ gilt dann

$$\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k\in A_n} a_k, \quad A_n := \sigma\big(\{1,2,3,\dots,n\}\big) \setminus \{1,2,3,\dots,n_0\}.$$

Beachte, dass wir hier auch die Injektivität von σ verwendet haben. Es folgt nun

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} - s\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - s + \sum_{k\in A_n} a_k\Big| \\ &\leq \Big|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - s\Big| + \sum_{k\in A_n} |a_k| \leq \Big|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - s\Big| + \sum_{k=n_0+1}^\infty |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_1$. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ gegen $s = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Wenden wir das schon Bewiesene auf die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ an so sehen wir, dass auch $\sum_{n=1}^\infty |a_{\sigma(n)}|$ konvergiert, also ist mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ auch $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ absolut konvergent. $\square$

2.7.6. Bemerkung. Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann wird i.A. die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ nicht konvergieren, und selbst wenn sie konvergiert i.A. einen anderen Grenzwert als $\sum_{n=1}^\infty a_n$ haben. Eine Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt unbedingt konvergent, falls jede Umordnung $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)}$ wieder konvergiert und denselben Grenzwert hat. Es lässt sich zeigen, dass eine Reihe unbedingt konvergent ist genau dann wenn sie absolut konvergent ist, siehe etwa [**H1**, Kapitel 32].

2.7.7. Satz. *Es seien $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Weiters sei $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $n \mapsto (\sigma_1(n), \sigma_2(n))$, eine Bijektion. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma_1(n)} b_{\sigma_2(n)}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big) = \sum_{n=0}^\infty a_{\sigma_1(n)} b_{\sigma_2(n)}.$$

Beweis. Ein Beweis findet sich in jedem Analysislehrbuch, siehe etwa [**H1**, Kapitel 32], [**K1**, Kapitel 6.3] oder [**J2**, Seite 349ff]. $\square$

2.7.8. Korollar (Cauchyprodukt). *Es seien $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert auch die Reihe*

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \cdots$$

absolut und es gilt

$$\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

2.7.9. Beispiel. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$ absolut, siehe Beispiel 2.7.4. Nach Korollar 2.7.8 konvergiert daher auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k}$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} = \Big(\sum_{n=0}^\infty z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^\infty z^n\Big) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Durch Umschreiben der linken Seite erhalten wir also

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad |z| < 1.$$

Für $z = \frac{1}{2}$ ergibt dies

$$4 = \sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \cdots$$

2.8. Konvergenzkriterien für Reihen.

2.8.1. Proposition (Majorantenkriterium). *Es sei* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *eine Reihe komplexer Zahlen und* $b_n \in \mathbb{R}$, *sodass* $|a_n| \leq b_n$ *für fast alle* n, *und* $\sum_{n=1}^\infty b_n < \infty$. *Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *absolut.*[56]

Beweis. O.B.d.A. gelte $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^\infty b_k.$$

Die Folge der Patialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ ist daher nach oben durch $\sum_{k=1}^\infty b_k$ beschränkt. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$. Damit ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent. $\square$

2.8.2. Beispiel. Wir wollen das Majorantenkriterium verwenden um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Es genügt natürlich die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2}$ zu zeigen. Beachte, dass

$$\left|\frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \qquad \text{für alle } k \geq 2.$$

Weiters gilt, vgl. Übungsaufgabe 26,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

also

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(k-1)}$ ist also eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{k^2}$. Nach Proposition 2.8.1 konvergiert daher $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$. Es lässt sich zeigen, dass $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Für $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq 2$, gilt $\frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{k^2}$, also ist $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$, daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ absolut, für jedes $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq 2$.[57]

2.8.3. Proposition (Minorantenkriterium). *Es sei* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *eine Reihe reeller Zahlen und* $b_n \in \mathbb{R}$, *sodass* $0 \leq b_n \leq a_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$, *und* $\sum_{n=1}^\infty b_n = \infty$. *Dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty a_n$.[58]

Beweis. Indirekt angenommen $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, dann wäre dies eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^\infty b_n$, also müsste nach Proposition 2.8.1 die Reihe $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergieren, ein Widerspruch. $\square$

[56] Jede solche Reihe $\sum_{n=1}^\infty b_n$ wird eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genannt.

[57] Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ für jedes $s > 1$ absolut konvergiert.

[58] Jede solche Reihe $\sum_{n=1}^\infty b_n$ wird eine divergente Minorante von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genannt.

2.8.4. Beispiel. Wir wollen das Minorantenkriterium verwenden um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert. Beachte, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergiert, siehe Beispiel 2.6.7. Also ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$. Nach Proposition 2.8.3 divergiert daher auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.8.5. Proposition (Wurzelkriterium). *Es sei* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *eine Reihe komplexer Zahlen. Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *absolut. Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*, dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Beweis. Sei zunächst $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Wähle ρ mit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \rho < 1.$$

Nach Proposition 2.3.11 gilt dann $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho$, also $|a_n| \leq \rho^n$, für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\rho < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \rho^n$, siehe Proposition 2.6.8. Damit ist $\sum_{n=1}^\infty \rho^n$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Nach Proposition 2.8.1 konvergiert daher $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut. Damit ist der erste Teil der Proposition bewiesen. Sei nun $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Wähle ρ mit $1 < \rho < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt $\rho < \sqrt[n]{|a_n|}$, also $1 < \rho^n < |a_n|$, für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, siehe Proposition 2.3.11. Daher bilden die Summanden a_n keine Nullfolge, also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, siehe Proposition 2.6.5. □

2.8.6. Bemerkung. Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen, und es existiere der Limes $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Gilt $\alpha < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut. Gilt $\alpha > 1$, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Dies folgt sofort aus Proposition 2.8.5 und Proposition 2.3.13. Im Fall $\alpha = 1$ kann i.A. nichts über das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ausgesagt werden. Etwa gilt, siehe Proposition 2.4.7,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergiert, siehe Beispiel 2.6.7. Ebenso gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{1}{n}\right|} = 1$$

aber die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, siehe Beispiel 2.6.12.

2.8.7. Beispiel. Nach dem Wurzelkriterium, siehe Bemerkung 2.8.6, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$, denn Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\tfrac{1}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

2.8.8. Proposition (Quotientenkriterium). *Es sei* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *eine Reihe komplexer Zahlen und fast alle* $a_n \neq 0$. *Gilt* $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *dann dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *absolut. Gilt* $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Beweis. O.B.d.A. seien alle $a_n \neq 0$. Sei zunächst $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho < 1$. Dann gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, siehe Proposition 2.3.11. O.B.d.A. gelte $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho$, also $|a_{n+1}| \leq \rho|a_n|$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Mittels Induktion folgt dann $|a_n| \leq \rho^{n-1}|a_1|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $\sum_{n=1}^\infty \rho^{n-1}|a_1|$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^\infty a_n$, also konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut, siehe Proposition 2.8.1. Damit ist der erste Teil der Proposition gezeigt. Sei nun $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $1 < \rho < \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gilt $1 < \rho \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, siehe Proposition 2.3.11. O.B.d.A. gelte $1 < \rho \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, also $|a_n| < |a_{n+1}|$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Summanden a_n keine Nullfolge, also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, siehe Proposition 2.6.5. □

2.8.9. Bemerkung. Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und fast alle $a_n \neq 0$. Weiters existiere der Limes $\alpha := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Ist $\alpha < 1$ dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut, ist $\alpha > 1$ dann divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Dies folgt sofort aus Proposition 2.8.8 und Proposition 2.3.13. Im Fall $\alpha = 1$ kann i.A. keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ gemacht werden. Etwa gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergiert, siehe Beispiel 2.6.7. Ebenso ist

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}/(n+1)}{(-1)^{n+1}/n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = 1$$

aber die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, siehe Beispiel 2.6.12.

2.8.10. Beispiel. Nach dem Quotientenkriterium, siehe Bemerkung 2.8.9, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut, denn

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

2.8.11. Beispiel. Es seien $d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\alpha = \sum_{n=1}^\infty d_n 10^{-n}, \tag{65}$$

denn $d_n 10^{-n} \leq 9 \cdot 10^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $\sum_{n=1}^\infty 9 \cdot 10^{-n} = 1$ eine konvergente Majorante, siehe Proposition 2.6.8 und Proposition 2.8.1. Die durch die konvergente Reihe (65) dargestellte Zahl $\alpha \in [0,1]$ wird wie folgt notiert:

$$\alpha = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$$

Dies ist also die vertraute *Dezimalbruchdarstellung* von α. Jede Zahl $\alpha \in (0,1]$ lässt sich in der Form (65) schreiben, für gewisse $d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Die Ziffern d_n findet man wie folgt. Wir teilen das Intervall $(0,10]$ in zehn Teile

$$(\tfrac{0}{0}, \tfrac{1}{10}], \quad (\tfrac{1}{10}, \tfrac{2}{10}], \quad (\tfrac{2}{10}, \tfrac{3}{10}], \dots, \quad (\tfrac{9}{10}, \tfrac{10}{10}]$$

Dann liegt α in genau einem dieser zehn Intervalle, also existiert genau eine Ziffer $d_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit

$$\tfrac{d_1}{10} < \alpha \leq \tfrac{d_1+1}{10}.$$

Das Intervall $(\frac{d_1}{10}, \frac{d_1+1}{10}]$ unterteilen wir wieder in zehn Intervalle:

$$(\tfrac{d_1}{10}+\tfrac{0}{100}, \tfrac{d_1}{10}+\tfrac{1}{100}], \quad (\tfrac{d_1}{10}+\tfrac{1}{100}, \tfrac{d_1}{10}+\tfrac{2}{100}], \quad (\tfrac{d_1}{10}+\tfrac{2}{100}, \tfrac{d_1}{10}+\tfrac{3}{100}], \dots, \quad (\tfrac{d_1}{10}+\tfrac{9}{100}, \tfrac{d_1}{10}+\tfrac{10}{100}]$$

Daher existiert genau eine Ziffer $d_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, sodass

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} < \alpha \leq \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{100}$$

Induktiv fortfahrend erhalten wir $d_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit:

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} < \alpha \leq \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{d_n+1}{10^n}$$

Es folgt $\left|\sum_{k=1}^n d_k 10^{-k} - \alpha\right| \leq 10^{-n}$ also $\alpha = \sum_{k=1}^\infty d_k 10^{-k}$. Daher lässt sich tatsächlich jedes $\alpha \in (0,1]$ in der Form (65) schreiben. Beachte, dass diese Konstruktion einen unendlichen, d.h. nicht abbrechenden, Dezimalbruch liefert, denn es gilt stets $\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} < \alpha$. Etwa ist $\frac{1}{2} = 0.4999999\dots$ Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist, d.h. jede Zahl $\alpha \in (0,1]$ lässt sich durch genau einen unendlichen, d.h. nicht abbrechenden, Dezimalbruch darstellen. Es folgt nun sofort, dass sich jede Zahl $\alpha > 0$ in eindeutiger Weise durch einen unendlichen Dezimalbruch $\alpha = d_0.d_1d_2d_3d_4\dots$ mit $d_0 \in \mathbb{N}_0$ und $d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ darstellen lässt. Also lässt sich auch jede Zahl $\alpha < 0$ in eindeutiger Weise durch einen unendlichen Dezimalbruch $\alpha = -d_0.d_1d_2d_3d_4\dots$ mit $d_0 \in \mathbb{N}_0$ und $d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ darstellen.

2.9. Potenzreihen.

2.9.1. Definition. Unter einer *Potenzreihe* verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$. Der *Konvergenzradius* einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ wird durch

$$r := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

definiert. Da $0 \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \infty$, gilt für den Konvergenzradius $0 \leq r \leq \infty$. Hier finden die Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ Anwendung.

Der Name "Konvergenzradius" ist durch folgenden Satz gerechtfertigt.

2.9.2. Satz (Cauchy-Hadamard). *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Ist $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Beweis. Sei zunächst $z \in \mathbb{C}$ und $|z| < r$. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ folgt dann aus dem Wurzelkriterium, siehe Proposition 2.8.5, denn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z| = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{r} < 1.$$

Ist andererseits $|z| > r$, dann zeigt diese Rechnung

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{r} > 1,$$

also divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, siehe Proposition 2.8.5. □

2.9.3. Bemerkung. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, dann definiert diese eine Funktion

$$f\colon B_r(0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Hier bezeichnet $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ die Scheibe mit Radius r und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{C}$.

2.9.4. Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = 1$. Daher ist ihr Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Nach Satz 2.9.2 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ daher für $|z| < 1$ absolut, und die Reihe divergiert für $|z| > 1$. Dies haben wir bereits in Beispiel 2.7.4 bemerkt. Die durch $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $B_1(0)$ definierte Funktion ist, siehe Proposition 2.6.8,

$$f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Zur Bestimmung des Konvergenzradius ist folgendes Resultat oft hilfreich.

2.9.5. Proposition (Euler). *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, und fast alle $a_n \neq 0$. Dann gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq r \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{66}$$

Sind fast alle $a_n \neq 0$, *und existiert der (möglicherweise uneigentliche) Grenzwert* $\lim_{n\to\infty}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|$, *dann gilt sogar*

$$r = \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big|.$$

Hier sind wieder die Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} = 0$ *anzuwenden.*

Beweis. Wir werden dies mit Hilfe des Quotientenkriteriums beweisen, siehe Proposition 2.8.8. Beachte, dass

$$\liminf_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big| = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|}$$

Ist jetzt $|z| < \liminf_{n\to\infty}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|$, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\Big| = \limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big||z| = \frac{|z|}{\liminf_{n\to\infty}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|} < 1$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ absolut, siehe Proposition 2.8.8. Ist $|z| > \limsup_{n\to\infty}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|$ dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\Big| = \liminf_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big||z| = \frac{|z|}{\limsup_{n\to\infty}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|} > 1$$

also divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, siehe Proposition 2.8.8. Der Konvergenzradius muss daher im Bereich (66) liegen, siehe Satz 2.9.2. Die zweite Aussage folgt nun sofort aus Proposition 2.3.13. □

2.9.6. Beispiel. Nach Proposition 2.9.5 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty (n+1)z^n$

$$r = \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Nach Beispiel 2.7.9 ist die dadurch definierte Funktion

$$f\colon\ B_1(0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^\infty (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

2.9.7. Bemerkung. Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$, dann kann über das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ i.A. keine Aussage getroffen werden. Mittels Proposition 2.9.5 zeigt man leicht, dass jede der folgenden Potenzreihen Konvergenzradius 1 hat:

$$\sum_{n=1}^\infty z^n, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^2}.$$

Die erste Potenzreihe divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, die Summanden bilden ja keine Nullfolge. Die zweite Potenzreihe konvergiert zwar für $z = -1$, siehe

Beispiel 2.6.12, aber für kein anderes z mit $|z| = 1$. Die letzte Potenzreihe schließlich konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, sogar absolut, siehe Beispiel 2.8.2.

2.10. Einige transzendente Funktionen. Nach Proposition 2.9.5 und weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty$$

hat die sogenannte *Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ Konvergenzradius ∞, konvergiert daher für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut, siehe Satz 2.9.2. Die dadurch bestimmte Funktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

wird die (komplexe) *Exponentialfunktion* genannt. Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ wird als (reelle) Expontentialfunktion bezeichnet,

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2.10.1. Proposition. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
b) $\exp(0) = 1$.
c) $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$
d) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

Beweis. Nach dem binomischen Lehrsatz, siehe Proposition 1.8.5, und Korollar 2.7.8 gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \frac{w^k}{k!} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\Big) = \exp(z) \cdot \exp(w).\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil der Proposition gezeigt. Die Aussage $\exp(0) = 1$ ist trivial. Aus $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$ folgt nun auch $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$. Auch (d) ist offensichtlich, siehe Proposition 2.6.9. □

Die Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,718281828459\ldots$$

wird *Eulersche Zahl* genannt. Aus Proposition 2.10.1 folgt leicht

$$e^r = \exp(r) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Daher schreiben wir für die Exponentialfunktion auch $e^z = \exp(z)$.

2.10.2. Proposition. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $e^x > 0$ und $e^x < e^y$. Weiters ist $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Ist $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, dann gilt offensichtlich $e^x > 1$. Aus $1 = e^x e^{-x}$ erhalten wir daraus auch $e^{-x} > 0$, also gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist $x < y$, dann $y - x > 0$, also $e^y / e^{-x} = e^{y-x} > 1$ und daher $e^y > e^x$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$. Aus Proposition 2.10.1 folgt

$$|e^z|^2 = e^z \cdot \overline{e^z} = e^z \cdot e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re} z} = (e^{\operatorname{Re} z})^2,$$

und da $e^{\operatorname{Re} z} > 0$ erhalten wir $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. □

2.10.3. Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ auch $f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton wachsend.* Gilt für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ auch $f(x) \leq f(y)$, so heißt f *monoton wachsend.* Analog heißt f *streng monoton fallend* falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$. f heißt *monoton fallend* falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$. Die Funktion f heißt (streng) monoton falls sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist. Beachte, dass eine streng monotone Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ stets injektiv ist.

2.10.4. Beispiel. Nach Proposition 2.10.2 ist die reelle Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, insbesondere injektiv.

Sinus- und *Cosinusfunktion* werden wie folgt definiert:

$$\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin(z) := \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos(z) := \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \cdots$$

Die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen sind beide ∞, also konvergieren diese Potenzreihen für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Durch Einschränkung auf reelle Argumente erhalten wir die (reellen) Winkelfunktionen:

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) := \frac{e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) := \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

2.10.5. Proposition. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $e^{\mathbf{i}z} = \cos(z) + \mathbf{i}\sin(z)$ *(Eulersche Formel)*
b) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ *(Additionstheorem)*
c) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ *(Additionstheorem)*
d) $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$
e) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

f) $\cos(x) = \operatorname{Re} e^{\mathbf{i}x}$, $\sin(x) = \operatorname{Im} e^{\mathbf{i}x}$
g) $|\cos(x)| \leq 1$, $|\sin(x)| \leq 1$.

Beweis. (a) folgt sofort aus der Definition der Winkelfunktionen. (b) folgt aus Proposition 2.10.1(a) und (b) mittels folgender einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned}\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) &= \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}} \cdot \frac{e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w}}{2} + \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2} \cdot \frac{e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}z}e^{\mathbf{i}w} + e^{\mathbf{i}z}e^{-\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}z}e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}z}e^{-\mathbf{i}w}}{4\mathbf{i}} \\ &\quad + \frac{e^{\mathbf{i}z}e^{\mathbf{i}w} - e^{\mathbf{i}z}e^{-\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}z}e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}z}e^{-\mathbf{i}w}}{4\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}z}e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}z}e^{-\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}(z+w)} - e^{-\mathbf{i}(z+w)}}{2\mathbf{i}} = \sin(z+w)\end{aligned}$$

Analog lässt sich (c) verifizieren. (d) ist offensichtlich. Aus (d) und (c) erhalten wir nun (e),

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \cos(z)\cos(z) + \sin(z)\sin(z) \\ &= \cos(z)\cos(-z) - \sin(z)\sin(-z) = \cos(z + (-z)) = \cos(0) = 1.\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgt aus Proposition 2.10.1(d) sofort

$$\operatorname{Re} e^{\mathbf{i}x} = \frac{e^{\mathbf{i}x} + \overline{e^{\mathbf{i}x}}}{2} = \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}\bar{x}}}{2} = \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} = \cos(x).$$

Ebenso zeigt man den zweiten Teil von (f). Aus (e) erhalten wir $|\sin(x)|^2 = \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \leq 1$, also $|\sin(x)| \leq 1$. Ebenso zeigt man $|\cos(x)| \leq 1$ womit auch (g) gezeigt wäre. □

Sinus Hyperbolicus und *Cosinus Hyperbolicus* werden wie folgt definiert:

$$\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen sind beide ∞, also konvergieren diese Potenzreihen für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Durch Einschränkung auf reelle

Argumente erhalten wir die (reellen) *Hyperbelfunktionen:*

$$\sinh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2.10.6. Proposition. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $\sinh(z) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)$, $\cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z)$
b) $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$
c) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$ *(Additionstheorem)*
d) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$ *(Additionstheorem)*
e) $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$
f) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
g) $\cosh(x) \geq 1$

Beweis. (a) ist offensichtlich, der Rest folgt nun leicht aus Proposition 2.10.5, siehe Übungsaufgaben. □

Zum Schluss noch eine weitere Darstellung der Exponentialfunktion:

2.10.7. Proposition. *Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}. \tag{67}$$

Insbesondere auch

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \qquad z \in \mathbb{C}$$

und für $z = 1$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Beweis. Aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{z^k}{k!}$$

und mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \frac{|z|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \left(1 - \frac{0}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \frac{|z|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k\right) \frac{|z|^k}{k!} \end{aligned}$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt $-\frac{k-1}{n} > -1$ und wegen der Bernoulli Ungleichung, siehe Proposition 1.8.8, daher $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \geq 1 - k\frac{k-1}{n}$. Damit gilt auch

$$1 - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \leq 1 - \left(1 - k\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k(k-1)}{n} \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Zusammen mit der vorhergehenden Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{|z|^k}{k!} \\ &= \frac{|z|^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{|z|^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{|z|^2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}\end{aligned}$$

Damit ist (67) gezeigt. Da die rechte Seite von (67) gegen 0 konvergiert, folgen die verbleibenden Behauptungen der Proposition sofort. $\square$

3. Stetigkeit

3.1. Stetigkeit. Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Typischerweise wird D ein allgemeines Intervall sein, siehe Abschnitt 1.1.

3.1.1. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt *im Punkt x_0 stetig* falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Die Funktion f heißt stetig, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

3.1.2. Beispiel. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist die konstante Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda$, stetig. Auch die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist stetig. Im ersten Fall kann man δ beliebig wählen, im zweiten reicht $\delta = \varepsilon$.

3.1.3. Beispiel. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2$$

ist stetig. Um dies zu zeigen, sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(2x_0 + x - x_0)| = |x - x_0| \cdot |2x_0 + (x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0|\big(2|x_0| + |x - x_0|\big) < \delta(2|x_0| + \delta) \leq \delta(2|x_0| + 1) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f im Punkt x_0 stetig. Da x_0 beliebig war, ist also f stetig.

3.1.4. Beispiel. Der Absolutbetrag

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|,$$

ist stetig, denn es gilt $\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|$, siehe (34), womit sich sofort die Bedingung in Definition 3.1.1 verifizieren lässt, es genügt $\delta = \varepsilon$ zu wählen.

3.1.5. Beispiel. Betrachte die *Vorzeichen-* oder *Signum-Funktion:*

$$\mathrm{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Diese ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, denn etwa zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ finden wir kein $\delta > 0$ mit der gewünschten Eigenschaft, da ja für jedes $x \neq 0$ gilt $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. In allen anderen Punkten $x_0 \neq 0$ ist f stetig, siehe Übungsaufgaben.

Unter einer *Folge in D,* verstehen wir einfach eine Folge (a_n), sodass $a_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit einer Funktionen kann durch Folgen charakterisiert werden:

3.1.6. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f im Punkt x_0 stetig genau dann wenn gilt: Für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to x_0$ gilt auch $f(a_n) \to f(x_0)$.*

Beweis. Sei also f im Punkt $x_0 \in D$ stetig und (a_n) eine Folge in D mit $a_n \to x_0$. Es ist zu zeigen, dass $f(a_n) \to f(x_0)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Stetigkeit existiert $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Da $a_n \to x_0$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - x_0| < \delta \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wir erhalten

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also $f(a_n) \to f(x_0)$. Damit ist die eine Aussage der Proposition bewiesen. Um die andere Aussage zu zeigen, sei nun $f\colon D \to \mathbb{R}$ so, dass für jede Folge (a_n) in D, mit $a_n \to x_0$ auch $f(a_n) \to f(x_0)$ gilt. Es ist zu zeigen, dass f dann im Punkt x_0 stetig ist. Indirekt angenommen f wäre im Punkt x_0 nicht stetig. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \delta > 0\ \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Daher finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in D$, sodass

$$|a_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Offensichtlich ist (a_n) eine Folge in D die gegen x_0 konvergiert. Nach Voraussetzung gilt daher auch $f(a_n) \to f(x_0)$. Dies widerspricht aber $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Also muss f im Punkt x_0 stetig sein. □

3.1.7. Beispiel. Die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, denn, $a_n := -\frac{1}{n}$ ist eine Folge mit $a_n \to 0$, aber $h(a_n) = 0$ konvergiert nicht gegen $h(0) = 1$, siehe Proposition 3.1.6. Beachte, dass für manche Folgen[59] (b_n) mit $b_n \to 0$ schon $f(b_n) \to f(1)$ gilt, aber eben nicht für alle solche Folgen. Die Funktion h ist übrigens in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ stetig, denn ist etwa $x_0 > 0$ und (c_n) eine Folge die gegen x_0 konvergiert, dann gilt für hinreichend große n auch $c_n > 0$, also $f(c_n) = 1$, und damit gilt $f(c_n) \to 1 = f(x_0)$, siehe Proposition 3.1.6. Der Fall $x_0 < 0$ lässt sich genauso behandeln.

[59] etwa $b_n := \frac{1}{n}$

Sind $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann werden die *Summenfunktion* $f+g$, die *Produktfunktion* $f \cdot g$ und das *skalare Vielfache* λf punktweise definiert:

$$\begin{aligned} f+g\colon D &\to \mathbb{R}, & (f+g)(x) &:= f(x)+g(x) \\ fg\colon D &\to \mathbb{R}, & (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ \lambda f\colon D &\to \mathbb{R}, & (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann heißt

$$\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}, \qquad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

die *Quotientenfunktion.*

3.1.8. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, $x_0 \in D$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die in x_0 stetig sind und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, fg und λf in x_0 stetig. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.*

Beweis. Mittels Proposition 3.1.6 folgt dies sofort aus Proposition 2.1.19. Etwa zeigt man die Stetigkeit von $f+g$ in x_0 so. Ist (a_n) eine Folge in D mit $a_n \to x_0$, dann gilt auch $f(a_n) \to f(x_0)$ sowie $g(a_n) \to g(x_0)$, da ja f und g in x_0 stetig sind, siehe Proposition 3.1.6. Nach Proposition 2.1.19(a) folgt $(f+g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$. Nach Proposition 3.1.6 ist die Funktion $f+g$ daher in x_0 stetig. Die anderen Behauptungen lassen sich völlig analog beweisen. $\square$

Aus Proposition 3.1.8 erhalten wir sofort

3.1.9. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funtionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, fg und λf stetig. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.*

3.1.10. Beispiel. Da die identische Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, stetig ist, folgt aus Proposition 3.1.9, dass auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, stetig ist. Mittels Induktion sieht man sofort, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, stetig ist. Mittels Proposition 3.1.9 erhalten wir auch, dass jedes reelle Polynom

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

stetig ist. Ist $q(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$ ein weiteres Polynom, $b_k \in \mathbb{R}$, dann ist auch die *rationale Funktion*

$$\frac{p}{q}\colon \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad \frac{p}{q}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

stetig. Damit kennen wir schon eine relativ große Klasse von stetigen Funktionen. Wir werden im nächsten Abschnitt 3.2 noch wesentlich mehr stetige Funktionen kennen lernen, siehe Satz 3.2.21.

3.1.11. Proposition. *Es seien $g\colon D_1 \to \mathbb{R}$ und $f\colon D_2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $g(D_1) \subseteq D_2$. Ist g bei $x_0 \in D_1$ stetig und ist f in $g(x_0) \in D_2$ stetig, dann ist auch $f \circ g\colon D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Sind f und g stetig, dann ist auch $f \circ g$ stetig.*

Beweis. Wir verwenden wieder die Charakterisierung der Stetigkeit mittels Folgen, siehe Proposition 3.1.6. Sei also (a_n) eine Folge in D_1 mit $a_n \to x_0$. Da g in x_0 stetig ist, gilt dann auch $g(a_n) \to g(x_0)$. Beachte, dass $(g(a_n))$ eine Folge in D_2 ist. Da f in $g(x_0)$ stetig ist, erhalten wir also $(f \circ g)(a_n) = f(g(a_n)) \to f(g(x_0)) = (f \circ g)(x_0)$. Also ist auch die Komposition $f \circ g$ in x_0 stetig. $\square$

3.1.12. Beispiel. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch

$$|f|\colon D \to \mathbb{R}, \qquad |f|(x) := |f(x)|$$

stetig. Dies folgt aus Proposition 3.1.11 und Beispiel 3.1.4, denn $|f|\colon D \to \mathbb{R}$ ist die Komposition der beiden stetigen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siehe Beispiel 3.1.4.

3.1.13. Bemerkung. Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig. Genauer, ist $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $\emptyset \neq D' \subseteq D$, dann ist auch $f|_{D'}\colon D' \to \mathbb{R}$ stetig.

3.1.14. Beispiel. Zum Schluss noch ein wilderes Beispiel. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem einzigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig. Dies folgt aus der Tatsache, dass in jedem Intervall sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen.

3.2. Gleichmäßige Konvergenz.

3.2.1. Definition. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *punktweise konvergent,* falls für jedes $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. In diesem Fall heißt

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

die *Grenzfunktion* der Funktionenfolge (f_n), wir sagen die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen f und schreiben $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty g_k$ von Funktionen $g_k\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *punktweise konvergent* falls die Funktionenfolge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n g_k\colon D \to \mathbb{R}$ punktweise konvergiert. Ist $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ die Grenzfunktion der Partialsummen, dann sagen wir die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^\infty g_k$ konvergiert punktweise gegen s und schreiben $\sum_{k=1}^\infty g_k = s$.

3.2.2. Beispiel. Betrachte die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Nach Proposition 2.4.5 konvergiert diese punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Wir sehen also, dass die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen nicht stetig sein muss. Etwa gilt für die Folge $a_k := 1 - \frac{1}{k}$ zwar $a_k \to 1$, aber $f(a_k) = 0$ konvergiert nicht gegen $f(0) = 1$. Daher ist

$$1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(a_k) \neq \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(a_k) = 0,$$

Limiten dürfen daher i.A. nicht vertauscht werden! Ebenso ist die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Reihe stetiger Funktionen i.A. nicht stetig.

3.2.3. Definition. Wir sagen eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. In Zeichen

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent falls $f\colon D \to \mathbb{R}$ existiert, sodass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ von Funktionen $g_k\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig konvergent* falls die Funktionenfolge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

3.2.4. Bemerkung. Offensichtlich sind gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen und -reihen auch punktweise konvergent. Die Umkehrung stimmt nicht, eine punktweise konvergente Folge von Funktionen wird i.A. nicht gleichmäßig konvergieren, siehe Beispiel 3.2.6 unten.

3.2.5. Proposition. *Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig. Ebenso ist die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen stetig.*

Beweis. Sei also $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen die gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiters sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Da f_{n_0} in x_0 stetig ist, existiert $\delta > 0$, sodass

$$\bigl|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| &= \Bigl|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\Bigr| \\ &\leq \bigl|f(x) - f_{n_0}(x)\bigr| + \bigl|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\bigr| + \bigl|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Daher ist f im Punkt x_0 stetig. Da x_0 beliebig war, ist also f stetig. Die Behauptung über die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen folgt nun indem wir das eben bewiesene Resultat auf die gleichmäßig konvergente Folge der Partialsummen anwenden. □

3.2.6. Beispiel. Die Funktionenfolge aus Beispiel 3.2.2 kann nicht gleichmäßig konvergieren, da die Grenzfunktion nicht stetig ist.

3.2.7. Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt,* falls die Menge $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ nach oben beschränkt ist, siehe Definition 1.9.6. Sie heißt *nach unten beschränkt* falls die Menge $f(D)$ nach unten beschränkt ist. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* falls sie sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist also beschränkt genau dann wenn $K > 0$ existiert, sodass $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in D$. Ist die Funktion f nicht beschränkt, so wird sie *unbeschränkt* genannt.

3.2.8. Definition. Die *Supremumsnorm* einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$\|f\|_D := \sup\bigl\{|f(x)| \bigm| x \in D\bigr\}$$

Beachte, dass $0 \leq \|f\|_D \leq \infty$. Es gilt $\|f\|_D < \infty$ genau dann wenn f beschränkt ist, und $\|f\|_D = \infty$ genau dann wenn f unbeschränkt ist.

3.2.9. Proposition. *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $\|f\|_D = 0$ *genau dann wenn* $f = 0$, *d.h.* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in D$.
b) $\|\lambda f\|_D = |\lambda| \cdot \|f\|_D$
c) $\|fg\|_D \leq \|f\|_D \cdot \|g\|_D$
d) $\|f + g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D$ *(Dreiecksungleichung)*

Diese Aussagen gelten auch wenn $\|f\|_D = \infty$ *oder* $\|g\|_D = \infty$ *ist, wobei die Konventionen* $\infty \cdot \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ *für* $a > 0$, $0 \cdot \infty = 0$, $\infty + \infty = \infty$ *und* $a + \infty = \infty$ *für* $a \geq 0$, *anzuwenden sind.*

Beweis. Ad (a): Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in D$, dann gilt offensichtlich auch $\|f\|_D = 0$. Ist umgekehrt $0 = \|f\|_D = \sup\bigl\{|f(x)| \bigm| x \in D\bigr\}$, dann folgt $|f(x)| \leq 0$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in D$. Nun zu (b): Für jedes $x \in D$ gilt

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_D$$

und damit $\|\lambda f\|_D \leq |\lambda| \cdot \|f\|_D$. Ad (c): Für jedes $x \in D$ gilt

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\|_D \cdot \|g\|_D$$

und damit auch $\|fg\|_D \leq \|f\|_D \cdot \|g\|_D$. Ad (d): Für jedes $x \in D$ gilt

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_D + \|g\|_D$$

und damit auch $\|f + g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D$. □

3.2.10. Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$, und betrachte die Funktione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$. Dann ist $\|f\|_{[0,1]} = 1$. Auch für $g\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^n$, gilt $\|g\|_{[0,1)} = 1$. Für $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) := \frac{1}{x}$, haben wir $\|h\|_{\mathbb{R}^+} = \infty$.

3.2.11. Bemerkung. Die Supremumsnorm ist sehr gut geeignet gleichmäßige Konvergenz zu beschreiben. Eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ genau dann wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_D < \varepsilon.$$

Dies ist Definition 2.1.4 sehr ähnlich, wir haben bloß den Absolutbetrag reeller Zahlen durch die Supremumsnorm von Funktionen ersetzt. Auch konvergiert f_n gleichmäßig gegen f genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

Vergleiche dies mit Bemerkung 2.1.11, wieder ersetzen wir nur den Absolutbetrag reeller Zahlen durch die Supremumsnorm von Funktionen.

3.2.12. Proposition. *Es seien $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ und $g_n\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Folgen von Funktionen die gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) *$(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.*
b) *(λf_n) konvergiert gleichmäßig gegen λf.*
c) *Sind f und g beschränkt, dann konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmäßig gegen fg.*
d) *Existiert $\rho > 0$ mit $|g(x)| \geq \rho$ für alle $x \in D$, dann gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$, $g_n(x) \neq 0$, und $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ konvergiert gleichmäßig gegen $\frac{1}{g}$.*
e) *Ist f beschränkt und existiert $\rho > 0$ mit $|g(x)| \geq \rho$ für alle $x \in D$, dann konvergiert $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)$ gleichmäßig gegen $\frac{f}{g}$.*

Beweis. Da (f_n) und (g_n) gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_D = 0, \tag{68}$$

siehe Bemerkung 3.2.11. Aus Proposition 3.2.9(d) folgt

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_D = \|(f_n - f) + (g_n - g)\|_D \leq \|f_n - f\|_D + \|g_n - g\|_D.$$

Zusammen mit (68) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \|(f_n + g_n) - (f + g)\|_D = 0$, also konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmäßig gegen $f + g$, siehe Bemerkung 3.2.11. Damit ist (a) gezeigt. Nun zu (b): Nach Proposition 3.2.9(b) gilt:

$$\|\lambda f_n - \lambda f\|_D = \|\lambda(f_n - f)\|_D = |\lambda| \cdot \|f_n - f\|_D$$

Zusammen mit (68) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \|\lambda f_n - \lambda f\|_D = 0$, also konvergiert (λf_n) gleichmäßig gegen λf. Ad (c): Aus Proposition 3.2.9(c) und (d) folgt:

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_D &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_D \\ &\leq \|f_n - f\|_D \cdot \|g_n\|_D + \|f\|_D \cdot \|g_n - g\|_D \\ &= \|f_n - f\|_D \cdot \|g_n - g + g\|_D + \|f\|_D \cdot \|g_n - g\|_D \\ &\leq \|f_n - f\|_D \cdot \big(\|g_n - g\|_D + \|g\|_D\big) + \|f\|_D \cdot \|g_n - g\|_D\end{aligned}$$

Da f und g beschränkt sind, gilt $\|f\|_D < \infty$ und $\|g\|_D < \infty$. Zusammen mit (68) erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \|f_n g_n - fg\|_D = 0$, also konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmäßig gegen fg. Ad (d): Sei also $|g(x)| \geq \rho$ für alle $x \in D$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\rho}{2}$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$. Also gilt auch

$$|g_n(x)| = |g(x) - (g(x) - g_n(x))| \geq |g(x)| - |g(x) - g_n(x)| \geq \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} > 0$$

und damit $g_n(x) \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$. Die Funktionen $\frac{1}{g_n}\colon D \to \mathbb{R}$ sind daher für alle $n \geq n_0$ definiert, und es gilt

$$\Big\|\frac{1}{g}\Big\|_D \leq \frac{1}{\rho} \qquad \text{sowie} \qquad \Big\|\frac{1}{g_n}\Big\|_D \leq \frac{2}{\rho} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mit Hilfe von Proposition 3.2.9 erhalten wir

$$\Big\|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\Big\|_D = \Big\|\frac{g - g_n}{g g_n}\Big\|_D \leq \Big\|\frac{1}{g}\Big\|_D \cdot \Big\|\frac{1}{g_n}\Big\|_D \cdot \|g - g_n\|_D \leq \frac{2}{\rho^2}\|g - g_n\|_D$$

Aus (68) folgt nun $\lim_{n\to\infty}\big\|\frac{1}{g_n} - \frac{1}{g}\big\| = 0$, also konvergiert $\frac{1}{g_n}$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{g}$. Behauptung (e) folgt nun aus (c) und (d). □

3.2.13. Proposition. *Es seien $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ und $g = \sum_{n=1}^\infty g_n$ zwei gleichmäßig konvergente Reihen von Funktionen $f_n, g_n\colon D \to \mathbb{R}$, und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren auch die Funktionenreihen $\sum_{n=1}^\infty (f_n + g_n)$ und $\sum_{n=1}^\infty \lambda f_n$ gleichmäßig gegen $f + g$ bzw. λf.*

Beweis. Wende Proposition 3.2.12 auf die Folge der Partialsummen an, siehe Übungsaufgaben. □

3.2.14. Definition. Eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ heißt eine *gleichmäßige Cauchyfolge* falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon$$

Dies ist Definition 2.2.9 sehr ähnlich, wir haben bloß den Absolutbetrag reeller Zahlen durch die Supremumsnorm von Funktionen ersetzt.

Analog zu Satz 2.2.10 gilt

3.2.15. Satz. *Eine Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig genau dann wenn sie eine gleichmäßige Cauchyfolge ist.*

Beweis. Es konvergiere die Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen, dass (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon/2 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, siehe Proposition 3.2.9(d), folgt

$$\|f_n - f_m\|_D = \|f_n - f + f - f_m\|_D \leq \|f_n - f\|_D + \|f - f_m\|_D < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. Also ist (f_n) tatsächlich eine gleichmäßige Cauchyfolge.

Sei nun umgekehrt $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ einen gleichmäßige Cauchyfolge. Es ist zu zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Da (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge ist, ist für jedes $x \in D$ die Folge reeller Zahlen $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge, also konvergent, siehe Satz 2.2.10. Wir erhalten eine Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Da (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge bildet, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|f_n - f_m\|_D < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Für jedes $x \in D$ gilt daher $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$. Mit $m \to \infty$ folgt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dies gilt für alle $x \in D$, also auch

$$\|f_n - f\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, siehe Bemerkung 3.2.11. □

3.2.16. Korollar. *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig wenn folgende Cauchybedingung erfüllt ist:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq n_0 : \|f_m + f_{m+1} + \cdots + f_n\|_D < \varepsilon$$

Beweis. Wende Satz 3.2.15 auf die Folge der Partialsummen an. □

3.2.17. Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *normal konvergent* falls $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty$.

3.2.18. Proposition. *Jede normal konvergente Reihe von Funktionen konvergiert gleichmäßig.*

Beweis. Sei also $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine Reihe von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty$. Dann erfüllt die Reihe reller Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D$ das Cauchykriterium, siehe Proposition 2.6.10, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq n_0 : \|f_m\|_D + \|f_{m+1}\|_D + \cdots + \|f_n\|_D < \varepsilon.$$

Nach Proposition 3.2.9(d) gilt

$$\|f_m + f_{m+1} + \cdots + f_n\|_D \leq \|f_m\|_D + \|f_{m+1}\|_D + \cdots + \|f_n\|_D,$$

also erfüllt die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ das Cauchykriterium aus Korollar 3.2.16, und konvergiert daher gleichmäßig. □

3.2.19. Bemerkung. Eine normal konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise absolut, d.h. für jedes $x \in D$ konvergiert die Reihe reeller Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut. Dies folgt aus $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_D$.

3.2.20. Proposition. *Sind $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ zwei normal konvergente Reihen von Funktionen $f_n, g_n\colon D \to \mathbb{R}$, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n)$ sowie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n$ normal.*

Beweis. Siehe Übungsaufgaben. □

Wir wollen die Ergebnisse dieses Abschnitts nun auf Potenzreihen anwenden. Beachte, dass wir eine reelle Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, als Funktionenreihe auffassen können, denn für jedes n ist $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := a_n x^n$ eine Funktion, nämlich ein Polynom, genauer, ein Monom.

3.2.21. Satz. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Weiters sei $0 < \rho < r$. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf dem Intervall $[-\rho, \rho]$ normal. Insbesondere ist die durch die Potenzreihe definierte Funktion $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, stetig.*

Beweis. Betrachte die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := a_n x^n$. Für $x \in [-\rho, \rho]$ gilt dann $|f_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|\rho^n = |a_n \rho^n|$ und daher $\|f_n\|_{[-\rho,\rho]} \leq |a_n \rho^n|$. Nach Satz 2.9.2 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ absolut, also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{[-\rho,\rho]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \rho^n| < \infty.$$

Damit konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $[-\rho, \rho]$ normal. Nach Proposition 3.2.18 konvergiert sie daher auf $[-\rho, \rho]$ auch gleichmäßig. Jede der Funktionen $x \mapsto a_n x^n$ ist stetig, also ist nach Proposition 3.2.5 auch ihre Grenzfunktion f auf $[-\rho, \rho]$ stetig. Da dies für alle $0 < \rho < r$ gilt, ist f auf ganz $(-r, r)$ stetig. □

3.2.22. Beispiel. Nach Satz 3.2.21 ist die reelle Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

siehe Abschnitt 2.10, stetig. Für jede konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ gilt nach Proposition 3.1.6 daher

$$\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \exp\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n\Bigr).$$

Etwa ist

$$\lim_{n\to\infty} \exp\Big(\frac{n^3-4n^2+7n+9}{2n^3+4n^2+11}\Big) = \exp\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-4n^2+7n+9}{2n^3+4n^2+11}\Big)$$
$$= \exp\Big(\frac{1}{2}\Big) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

3.2.23. Beispiel. Da die Winkelfunktionen

$$\sin\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cos\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

wie auch die Hyperbelfunktionen

$$\sinh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cosh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

durch auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihen gegeben sind, sind sie alle stetig, siehe Satz 3.2.21.

3.3. Der Zwischenwertsatz. Wir erinnern uns an die allgemeinen Intervalle aus Abschnitt 1.1. Insbesondere, erinnern wir uns, dass jede Menge der Form

$$[a,b] = \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$$

ein kompaktes Intervall genannt wird, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

3.3.1. Satz (Zwischenwertsatz). *Es seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a)\le f(b)$, andernfalls betrachte $-f$. Weiters sei $y\in\mathbb{R}$ mit $f(a)\le y\le f(b)$. Wir müssen $x\in[a,b]$ finden, sodass $f(x)=y$ gilt. Dazu konstruieren wir eine Intervallschachtelung. Sei $\xi_0 := \frac{1}{2}(a+b)$ der Mittelpunkt des Intervalls $I_0:=[a,b]$. Ist $y\le f(\xi)$ dann definiere $I_1:=[a,\xi_0]$, anderenfalls $I_1:=[\xi_0,b]$. Bezeichne $I_1=:[a_1,b_1]$. Dann gilt jedenfalls

$$I_1\subseteq[a,b], \quad f(a_1)\le y\le f(b_1) \quad \text{und} \quad b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a).$$

Sei $\xi_1:=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ der Mittelpunkt des Intervalls $I_1=[a_1,b_1]$. Gilt $y\le f(\xi_1)$ dann definiere $I_2:=[a_1,\xi_1]$, andernfalls sei $I_2:=[\xi_1,b_1]$. Bezeichne $I_2=:[a_2,b_2]$. Es gilt dann

$$I_2\subseteq I_1, \quad f(a_2)\le y\le f(b_2) \quad \text{und} \quad b_2-a_2=\frac{1}{4}(b-a).$$

Induktiv fortfahrend erhalten wir eine Folge von kompakten Intervallen $I_n = [a_n,b_n]$, sodass

$$I_n\subseteq I_{n-1}, \quad f(a_n)\le y\le f(b_n) \quad \text{und} \quad b_n-a_n\le 2^{-n}(b-a).$$

Die Intervalle I_n bildet daher eine Intervallschachtelung. Nach Satz 2.2.5 existiert $x\in\bigcap_{n=0}^\infty I_n$, insbesondere $x\in I_0=[a,b]$. Weiters gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt daher, siehe Proposition 3.1.6,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Da $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, muss schließlich $y = f(x)$ gelten, siehe Proposition 2.1.26. $\square$

3.3.2. Korollar. *Es sei I ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to I$ stetig. Dann existiert mindestens ein Fixpunkt von f, d.h. es existiert $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \xi$.*

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = [a, b]$. Betrachte die stetige Funktion

$$g\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) - x.$$

Es gilt dann $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ sowie $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Nach Satz 3.3.1 existiert daher $\xi \in [a, b]$ mit $g(\xi) = 0$. Für dieses ξ gilt dann offensichtlich $f(\xi) = \xi$. $\square$

3.3.3. Korollar. *Es sei I ein allgemeines Intervall, und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant.*[60] *Dann ist auch $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall.*

Beweis. Es sei $c := \inf f(I)$ und $d := \sup f(I)$. Da f nicht konstant ist, gilt sicherlich $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Wir zeigen zunächst $(c, d) \subseteq f(I)$. Sei dazu $c < y < d$. Nach Definition von c existiert $a \in I$ mit $f(a) \leq y$. Ebenso existiert $b \in I$ mit $y \leq f(b)$. Nach Satz 3.3.1 existiert daher ξ zwischen a und b mit $f(\xi) = y$. Da ξ insbesondere in I liegt, sehen wir, dass $y \in f(I)$. Damit ist $(c, d) \subseteq f(I)$ gezeigt. Da $c \leq f(x) \leq d$ für alle $x \in I$, erhalten wir $f(I)$ indem wir zu (c, d) keinen, einen oder beide der Randpunkte c, d hinzufügen. Jedenfalls ist $f(I)$ wieder ein allgemeines Intervall. $\square$

3.3.4. Satz. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall, und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall, die Funktion $f\colon I \to f(I)$ ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist streng monoton und stetig.*[61]

Beweis. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend, für streng monoton fallendes f betrachte $-f$. Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv und nicht konstant. Nach Korollar 3.3.3 ist daher $f(I)$ ein allgemeines Intervall. Weiters ist $f\colon I \to f(I)$ bijektiv, denn f ist injektiv und surjektiv. Damit existiert de Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(I) \to I$. Da f streng monoton wachsend ist, muss auch f^{-1} streng monoton wachsend sein, denn andernfalls fänden wir $y_1, y_2 \in f(I)$ mit $y_1 < y_2$ und $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, was durch Anwendung von f den Widerspruch $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$ liefern würde. Es bleibt nur noch die Stetigkeit von $f^{-1}\colon f(I) \to I$ zu zeigen. Sei dazu $y_0 \in f(I)$ und (a_n) eine Folge in

[60] Offensichtlich müssen wir hier f nicht konstant fordern, denn sonst besteht ja $f(I)$ nur aus einem Punkt und wäre daher kein allgemeines Intervall.

[61] Ist f streng monoton wachsend, dann ist auch f^{-1} streng monoton wachsend. Für streng monoton fallendes f ist f^{-1} streng monoton fallend.

$f(I)$ mit $a_n \to y_0$. Nach Proposition 3.1.6 genügt es zu zeigen, dass die Folge $b_n := f^{-1}(a_n)$ gegen $x_0 := f^{-1}(y_0) \in I$ konvergiert. Indirekt angenommen (b_n) konvergiert nicht gegen x_0. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass unendliche viele b_n nicht in $\big(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\big)$ liegen. O.B.d.A. gelte $b_n \geq x_0 + \varepsilon$ für unendlich viel $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $x_0 + \varepsilon \in I$. Da f streng monoton wachsend ist, erhalten wir $a_n = f(b_n) \geq f(x_0+\varepsilon) > f(x_0) = y_0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht aber $a_n \to y_0$. Also muss $f^{-1}\colon\ f(I) \to I$ stetig sein. □

3.3.5. Beispiel. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion

$$f\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad f(x) := x^k, \tag{69}$$

streng monoton wachsend und stetig. Wegen $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n^k = \infty$, siehe Proposition 2.4.6, ist $f([0,\infty))$ nach oben unbeschränkt. Weiters ist $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,\infty)$. Nach Satz 3.3.4 gilt daher $f([0,\infty)) = [0,\infty)$ und (69) ist bijektiv. Also besitzt jede Zahl $y \geq 0$ eine eindeutige nicht negative k-te Wurzel, vgl. Satz 1.9.21. Aus Satz 3.3.4 folgt aber auch, dass die Wurzelfunktion

$$[0,\infty) \to [0,\infty), \qquad x \mapsto \sqrt[k]{x}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

streng monoton wachsend und stetig ist.

3.3.6. Beispiel. Es sei $k \in \mathbb{N}$ ungerade. Die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^k, \tag{70}$$

ist streng monoton wachsend und stetig. Wegen $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und weil $\lim_{n\to\infty} f(-n) = -\infty$, ist $f(\mathbb{R})$ sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt. Das einzige nach oben und unten unbeschränkte Intervall ist $\mathbb{R}$ selbst. Nach Satz 3.3.4 ist daher $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, (70) ist bijektiv, und die Umkehrabbildung liefert eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte k-te Wurzelfunktion,

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt[k]{x}, \qquad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade},$$

die streng monoton wachsend und stetig ist.

3.4. Stetige Bilder kompakter Intervalle. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen die Funktion *besitzt ein Maximum* oder *nimmt ihr Maximum an,* falls $y \in D$ existiert, sodass $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \in D$ gilt. Jedes solche y wird eine *Maximalstelle von* f genannt. Analog sagen wir f *besitzt ein Minimum* oder *nimmt ihr Minimum an* falls $y \in D$ existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ für alle $x \in D$. Jedes solche y wird eine *Minimalstelle von* f genannt. Beachte, dass $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ ihr Maximum annimmt genau dann wenn die Menge $f(D)$ ein Maximum besitzt. Ebenso nimmt f ihr Minimum an genau dann wenn die Menge $f(D)$ ein Minimum besitzt.

3.4.1. Beispiel. Nicht jede Funktion besitzt ein Maximum. Etwa nimmt die Funktion

$$f\colon\ [0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 1 + x$$

ihr Maximum nicht an, denn egal welches $x \in [0,1)$ wir betrachten, die Funktion wird im Punkt $x' := \frac{1}{2}(x+1)$ einen größeren Wert annehmen, $f(x') > f(x)$. Beachte jedoch, dass diese Funktion f sehr wohl ein Minimum, nämlich bei $x = 0$, besitzt.

3.4.2. Beispiel. Die Funktion

$$f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}$$

besitzt weder Minimum noch Maximum.

3.4.3. Beispiel. Die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2(x-1)^2$$

nimmt ihr Minimum bei $x = 0$ und bei $x = 1$ an. Minimum und Maximum sind also i.A. nicht eindeutig bestimmt — es kann mehrere Stellen geben an denen eine Funktion ihr Minimum oder Maximum annimmt.

3.4.4. Beispiel. Ein extremes Beispiel liefert die konstante Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := 17,$$

sie nimmt ihr Minimum und zugleich auch ihr Maximum in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ an.

3.4.5. Lemma. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und*

$$s := \sup f(D) = \sup\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Dann existiert eine Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = s$. Ebenso existiert eine Folge (y_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \inf f(D)$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle, $s < \infty$ und $s = \infty$. Zei zunächst $s < \infty$, d.h. f ist nach oben beschränkt. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(D)$, d.h. es existiert $x_n \in D$ mit $s \geq f(x_n) > s - \frac{1}{n}$. Mit $n \to \infty$ erhalten wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = s$, siehe Proposition 2.1.26. Sei nun $s = \infty$, d.h. f ist nach oben unbeschränkt. Dann ist kein $n \in \mathbb{N}$ obere Schranke von $f(D)$, also existiert $x_n \in D$ mit $f(x_n) \geq n$. Für $n \to \infty$ folgt dann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty = s$, siehe Bemerkung 2.4.2. Die Aussage über das Infimum von $f(D)$ kann analog gezeigt werden, oder man wendet das schon Bewiesene auf die Funktion $-f$ an. □

3.4.6. Satz. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f ihr Maximum annimmt. Nach Lemma 3.4.5 existiert eine Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(I)$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sodass $I = [a,b]$. Dann gilt $a \leq x_n \leq b$, also ist die Folge (x_n) beschränkt. Nach Satz 2.2.8 existiert daher eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Es sei

$y := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt aus Proposition 2.1.24 auch $a \leq y \leq b$, d.h. $y \in I$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun, siehe Proposition 3.1.6,

$$\sup f(I) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\big) = f(y).$$

Also nimmt f ihr Maximum bei y an. Insbesondere ist f nach oben beschränkt. Analog zeigt man, dass f sein Minimum annehmen muss und daher nach unten beschränkt ist. Alternativ kann man auch die schon bewiesene Aussage über das Maximum auf die Funktion $-f$ anwenden um die entsprechende Aussage über das Minimum zu erhalten. □

3.4.7. Bemerkung. Beachte, dass die Aussage von Satz 3.4.6 für nicht kompakte Intervalle i.A. falsch ist, siehe etwa Beispiel 3.4.1 oder Beispiel 3.4.2.

3.4.8. Korollar. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ wieder ein kompaktes Intervall oder einpunktig.*[62]

Beweis. O.B.d.A. sei f nicht konstant, andernfalls ist offensichtlich $f(I)$ einpunktig. Nach Satz 3.3.1 ist dann $f(I)$ ein allgemeines Intervall, dass nach Satz 3.4.6 beschränkt sein muss und sowohl Minimum als auch Maximum besitzen muss. Die einzigen allgemeinen Intervalle mit all diesen Eigenschaften sind die kompakten. □

3.5. Der Logarithmus. Wir erinnern uns, dass die reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist und nur positive Werte annimmt, siehe Proposition 2.10.2. Nach Beispiel 3.2.22 ist sie auch stetig. Wegen $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$, siehe Proposition 2.4.5, ist $\exp(\mathbb{R})$ nach oben unbeschränkt. Weiters gilt $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{e}\big)^n = 0$, siehe Proposition 2.4.5. Nach Satz 3.3.4 gilt daher $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, und

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad x \mapsto \exp(x) = e^x \tag{71}$$

ist bijektiv.

3.5.1. Definition. Die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ wird der *natürliche Logarithmus* genannt und mit

$$\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(x)$$

bezeichnet.

3.5.2. Proposition. *Der Logarithmus* $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, bijektiv und stetig. Weiters gilt:*

a) *Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$ ist $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.*
b) *$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.*
c) *$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.*
d) *$\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.*

[62] Es ist $f(I)$ einpunktig, d.h. besteht nur aus einem Punkt, genau dann wenn f konstant ist.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 3.3.4. Auch (a) folgt sofort aus der Tatsache, dass der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Nach Proposition 2.10.1(a) gilt

$$\exp\big(\ln(x)+\ln(y)\big)=\exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(y))=xy=\exp(\ln(xy)).$$

Da die Exponentialfunktion injektiv ist folgt (b). Aus $\exp(0)=1$ und $\exp(1)=e$, siehe Proposition 2.10.1(b), erhalten wir (c). Wegen $0=\ln(1)=\ln(xx^{-1})=\ln(x)+\ln(x^{-1})$ folgt nun auch (d). □

Mit Hilfe des Logarithmus definieren wir nun

$$a^x:=e^{x\ln a}\qquad\text{für } a>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \tag{72}$$

Beachte, dass dies wegen Proposition 3.5.2(c) im Fall $a=e$ mit der schon eingeführten Notation e^x übereinstimmt, siehe Abschnitt 2.10.

3.5.3. Proposition. *Für $x,y\in\mathbb{R}$ und $a,b>0$ gilt:*

a) $a^x>0$, $\ln(a^x)=x\ln a$, $1^x=1$, $a^0=1$, $a^1=a$.
b) $a^{x+y}=a^xa^y$, $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, $(a^x)^y=a^{xy}$, $(ab)^x=a^xb^x$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x=\frac{1}{a^x}$.
c) *Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto a^x$, ist stetig.*
d) *Für $a>1$ ist die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto a^x$, streng monoton wachsend und bijektiv.*
e) *Für $a<1$ ist die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto a^x$, streng monoton fallend und bijektiv.*
f) *Die Funktion $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $a\mapsto a^x$ stetig.*
g) *Für $x>0$ ist die Funktion $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $a\mapsto a^x$, streng monoton wachsend und bijektiv.*
h) *Für $x<0$ ist die Funktion $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $a\mapsto a^x$, streng monoton fallend und bijektiv.*

Beweis. Da die reelle Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, siehe Proposition 2.10.2, gilt $a^x>0$. Weiters ist $\ln(a^x)=\ln(e^{x\ln a})=x\ln a$. Aus $\ln(1)=0$ und $e^0=1$ folgt sofort $1^x=1$ und $a^0=1$. Da auch $a^1=e^{1\ln a}=a$, ist damit (a) gezeigt. Aus Proposition 2.10.1(a) erhalten wir $a^{x+y}=e^{(x+y)\ln a}=e^{x\ln a}e^{y\ln a}=a^xa^y$. Daraus folgt $1=a^0=a^{x-x}=a^xa^{-x}$, also $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$. Da $\ln(a^x)=x\ln a$, folgt $(a^x)^y=e^{y\ln(a^x)}=e^{yx\ln a}=a^{xy}$. Aus Proposition 3.5.2(b) erhalten wir $(ab)^x=e^{x\ln(ab)}=e^{x(\ln a+\ln b)}=e^{x\ln a}e^{x\ln b}=a^xb^x$. Schließlich ist $1=1^x=\big(a\frac{1}{a}\big)^x=a^x\big(\frac{1}{a}\big)^x$ und damit $\big(\frac{1}{a}\big)^x=\frac{1}{a^x}$, womit (b) gezeigt wäre. Ad (c): Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto a^x=e^{x\ln a}$, ist stetig, denn sie ist Komposition der stetigen Exponentialfunktion, siehe Beispiel 3.2.22, und der stetigen linearen Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\ln a$, vgl. Proposition 3.1.11. Ist $a>1$, dann gilt $\ln a>\ln 1=0$, denn der Logarithmus ist streng monoton wachsend, siehe Proposition 3.5.2. Also ist die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\ln a$, streng monoton wachsend und bijektiv. Auch die Exponentialfunktion $\exp\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Als Komposition zweier streng monoton wachsender bijektiver Abbildungen ist daher auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ streng monoton wachsend und bijektiv. Damit ist (d) bewiesen. Analog zeigt man (e), nun ist $\ln a < \ln 1 = 0$ und daher $x \mapsto x \ln a$ streng monoton fallend und bijektiv. Da der Logarithmus $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig ist, siehe Proposition 3.5.2, ist auch die Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $a \mapsto a^x = e^{x \ln a}$, als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig. Damit ist (f) gezeigt. Ist $x > 0$, dann ist die Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $a \mapsto x \ln a$ streng monoton wachsend und bijektiv, siehe Proposition 3.5.2. Da die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend und bijektiv ist, ist daher auch die Komposition $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ streng monoton wachsend und bijektiv. Analog lässt sich (h) beweisen. □

3.5.4. Bemerkung. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$, dann ist nach Proposition 3.5.3(b) $a^n = a^{1+1+\cdots+1} = a \cdot a \cdots a$, und $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdots a}$. Daher stimmt die Definition (72) für ganzzahlige Exponenten mit der Definition die wir schon in Abschnitt 1.8 gegeben haben überein! Für rationale Exponenten $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ folgt $(a^r)^q = a^{q\frac{p}{q}} = a^p$, also $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Also stimmt Definition (72) auch für rationale Exponenten mit der Definition die wir in Abschnitt 1.9 gegeben haben überein! Durch (72) sind die Potenzen a^x nun für beliebige Basen $a > 0$ und beliebige Exponenten $x \in \mathbb{R}$ erklärt.

3.6. Mehr über Winkelfunktionen. Wir wollen uns in diesem Abschnitt den Nullstellen und der Periodizität der Winkelfunktionen widmen.

3.6.1. Lemma. *Für $x \in (0, 2]$ gilt:*

a) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
b) $\cos(2) < 0$
c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$
d) $\sin(x) > 0$
e) *Der Cosinus ist auf $[0, 2]$ streng monoton fallend.*
f) *Der Cosinus hat auf $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.*

Beweis. Sei also $x \in (0, 2]$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $(k+2)(k+1) \geq 6 > x^2$ und damit

$$\frac{x^k}{k!} > \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{73}$$

Mit Hilfe der Potenzreihe des Cosinus, siehe Abschnitt 2.10 erhalten wir

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}}_{>0} + \cdots > 1 - \frac{x^2}{2}$$

und

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \underbrace{\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}\right)}_{>0} - \cdots < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Damit ist (a) gezeigt. Daraus folgt nun $\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0$, also (b). Um (c) einzusehen gehen wir ähnlich vor:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}}_{>0} + \cdots > x - \frac{x^3}{3}$$

sowie

$$\sin(x) = x - \underbrace{\Big(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\Big)}_{>0} - \underbrace{\Big(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\Big)}_{>0} - \cdots < x$$

Da $x - \frac{x^3}{3} = x\big(1 - \frac{x^2}{6}\big) \geq x\big(1 - \frac{4}{6}\big) = \frac{x}{3} > 0$ folgt daraus sofort (d). Aus Proposition 2.10.5 leitet man leicht

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\frac{y+x}{2}\sin\frac{y-x}{2} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{74}$$

her, siehe Übungsaufgabe 65(c). Ist nun $0 \leq x < y \leq 2$, dann auch $\frac{y+x}{2} \in (0, 2]$ und $\frac{y-x}{2} \in (0, 2]$, und daher folgt aus (74) und (d)

$$\cos(y) - \cos(x) < 0 \qquad \text{für alle } 0 \leq x < y \leq 2.$$

Dies zeigt nun (e). Da $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$ muss nach Satz 3.3.1 der Cosinus im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle besitzen. Wegen (e) kann es nur eine solche Nullstelle geben, womit auch (f) gezeigt wäre. □

3.6.2. Definition. Es sei $\xi \in [0, 2]$ die nach Lemma 3.6.1(f) eindeutig bestimmte Zahl mit $\cos(\xi) = 0$. Die Zahl

$$\pi := 2\xi = 3.141592653589793\ldots$$

wird die *Kreiszahl* oder einfach *Pi* genannt.

3.6.3. Proposition. *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $\cos\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0$, $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$, $e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$
b) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$, $e^{\mathbf{i}\pi} = -1$
c) $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$, $e^{2\pi\mathbf{i}} = 1$
d) $e^{z+\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}e^z$, $e^{z+\mathbf{i}\pi} = -e^z$, $e^{z+2\mathbf{i}\pi} = e^z$
e) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$, $\cos\big(z + \pi\big) = -\cos(z)$, $\cos\big(z + 2\pi\big) = \cos(z)$
f) $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$, $\sin\big(z + \pi\big) = -\sin(z)$, $\sin\big(z + 2\pi\big) = \sin(z)$

Beweis. $\cos(\pi/2) = 0$ ist unsere Definition von π. Aus $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$, siehe Proposition 2.10.5(e), und Lemma 3.6.1(d) folgt nun $\sin(\pi/2) = 1$. Aus $e^{\mathbf{i}z} = \cos(z) + \mathbf{i}\sin(z)$, siehe Proposition 2.10.5(a), erhalten wir nun auch $e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$, womit (a) gezeigt wäre. Mit Hilfe von Proposition 2.10.1(a) folgt $e^{\mathbf{i}\pi} = e^{\mathbf{i}\pi/2+\mathbf{i}\pi/2} = e^{\mathbf{i}\pi/2}e^{\mathbf{i}\pi 2} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$, und $e^{2\mathbf{i}\pi} = e^{\mathbf{i}\pi}e^{\mathbf{i}\pi} = (-1)(-1) = 1$. Mittels Proposition 2.10.5(f) folgen nun (b) und (c). Die restlichen Behauptungen folgen nun aus den Additionstheoremen, siehe Proposition 2.10.1(a) sowie Proposition 2.10.5(b) und (c). □

3.6.4. Proposition.

a) *Für die Nullstellenmenge der Sinusfunktion gilt:*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z}$$

b) *Für die Nullstellenmenge der Cosinusfunktion gilt:*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

c) *Für die Einsstellenmenge der Exponentialfunktion gilt:*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1\} = \{2\pi\mathbf{i}k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$$

Beweis. Ad (b): Nach unserer Definition von π gilt $\cos(\pi/2) = 0$, vgl. Proposition 3.6.3(a). Wegen $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, siehe Proposition 3.6.3(e), sehen wir, dass $\cos(\pi/2 + k\pi) = \cos(\pi/2) = 0$, für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Es ist noch zu zeigen, dass dies wirklich alle Nullstellen des Cosinus sind. Sei dazu $w \in \mathbb{C}$ mit $\cos(w) = 0$. Aus $0 = \cos(w) = \frac{e^{\mathbf{i}w}+e^{-\mathbf{i}w}}{2}$, siehe Beispiel 2.10.4, folgt $e^{2\mathbf{i}w} = -1$, also

$$1 = |-1| = |e^{2\mathbf{i}w}| = e^{\mathrm{Re}(2\mathbf{i}w)} = e^{-2\,\mathrm{Im}\,w}$$

und schließlich $\mathrm{Im}\,w = 0$, vgl. Proposition 2.10.2. Also müssen alle Nullstellen des Cosinus reell sein. Da $\cos(-z) = \cos(z)$, siehe Proposition 2.10.5(d), hat der Cosinus im Intervall $(-\pi/2, \pi/2]$ nur die Nullstelle $\pi/2$. Wegen $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, siehe Proposition 3.6.3(e), hat der Cosinus auf dem Intervall $(-\pi/2, 3\pi/2]$ nur die beiden Nullstellen $\pi/2$ und $3\pi/2$. Da w reell ist, existiert $k' \in \mathbb{Z}$, sodass $w - 2\pi k' \in (-\pi/2, 3\pi/2]$. Da $\cos(w - 2\pi k') = \cos(w) = 0$, siehe Proposition 3.6.3(e), sehen wir, dass $w - 2\pi k'$ mit $\pi/2$ oder $3\pi/2$ übereinstimmen muss, d.h. w muss von der Form $w = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sein. Damit ist (b) gezeigt. (a) folgt nun aus (b) und $\sin(z + \pi/2) = \cos(z)$, vgl. Proposition 3.6.3(f). Beachte, dass wegen $\sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}$ gilt $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow e^{2\mathbf{i}z} = 1$. Daher folgt auch (c) aus (a). □

3.6.5. Bemerkung. Nach Proposition 3.6.3 gilt

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z), \quad e^{z+2\pi\mathbf{i}} = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Diese Eigenschaft wird *Periodizität* genannt. Sinus und Cosinus haben die Periode 2π, die Exponentialfunktion hat die (imaginäre) Periode $2\pi\mathbf{i}$. Allgemeiner gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin(z), \quad e^{z+2k\pi\mathbf{i}} = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Daher ist auch $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode des Sinus und des Cosinus, und $2k\pi\mathbf{i}$ ist Periode der Exponentialfunktion. Es liegt nahe zu fragen, ob noch andere Perioden existieren. Etwa für den Sinus: gibt es neben den Zahlen $2\pi\mathbb{Z}$ noch andere $p \in \mathbb{C}$, sodass $\sin(z + p) = \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$? Insbesondere muss dann $\sin(p) = \sin(0 + p) = \sin(0) = 0$ gelten, also muss p eine Nullstelle des Sinus sein. Nach Proposition 3.6.4(a) ist dann $p \in \pi\mathbb{Z}$. Es muss aber auch $\cos(p) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ gelten. Daraus schließen wir nun $p \in 2\pi\mathbb{Z}$, denn es ist $\cos((2k+1)\pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, siehe Proposition 3.6.3(e). Wir sehen daher, dass $2\pi\mathbb{Z}$ wirklich alle Perioden des Sinus sind. Jede Periode des Sinus ist also ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Daher wird 2π die *minimale Periode* des Sinus genannt. Es folgt nun sofort, dass die Menge der Perioden des Cosinus ebenfalls mit $2\pi\mathbb{Z}$ übereinstimmt, d.h. auch der Cosinus hat die minimale Periode 2π. Noch einfacher lassen sich die Perioden der Exponentialfunktion bestimmen, denn es git $\exp(z) = \exp(z+p) = \exp(z)\exp(p)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $\exp(p) = 1$, also genau dann wenn $p \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$, siehe Proposition 3.6.4(c). Damit ist die Menge der Perioden der Exponentialfunktion gerade $2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$. Jede Periode der Exponentialfunktion ist daher ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$, man nennt daher $2\pi\mathbf{i}$ die minimale Periode der Exponentialfunktion.

3.6.6. Proposition. *Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

a) $\sin(x) > 0$ *für alle* $x \in \big(2\pi k, 2\pi k + \pi\big)$.
b) $\sin(x) < 0$ *für alle* $x \in \big(2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi\big)$.
c) $\cos(x) > 0$ *für alle* $x \in \big(2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\big)$.
d) $\cos(x) < 0$ *für alle* $x \in \big(2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{3\pi}{2}\big)$.

Beweis. Es ist $\sin(\pi/2) = 1 > 0$, siehe Proposition 3.6.3(a). Sei nun $x \in (0,\pi)$. Wäre $\sin(x) < 0$, dann müsste nach Satz 3.3.1 die Sinusfunktion zwischen x und $\pi/2$ eine Nullstelle haben, aber dies widerspräche Proposition 3.6.4(a). Daher gilt $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$. Mit Hilfe von $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$, siehe Proposition 3.6.3(f), folgt nun sofort (a). (b) folgt aus (a) und $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, siehe Proposition 3.6.3(f). Mittels $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, siehe Proposition 3.6.3(f), erhalten wir die restlichen Behauptungen. $\square$

3.6.7. Proposition. *Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:*

a) $\cos\colon \big[2\pi k, 2\pi k + \pi\big] \to [-1,1]$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*
b) $\cos\colon \big[2\pi k + \pi, 2\pi k + 2\pi\big] \to [-1,1]$ *ist streng mon. wachsend und bijektiv.*
c) $\sin\colon \big[2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\big] \to [-1,1]$ *ist streng mon. wachsend und bijektiv.*
d) $\sin\colon \big[2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{3\pi}{2}\big] \to [-1,1]$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*

Beweis. Wir verwenden wieder die Formel (74),

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\Big(\frac{y+x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{y-x}{2}\Big) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ist nun $0 \leq x < y \leq \pi$, dann auch $\frac{x+y}{2} \in (0,\pi)$ sowie $\frac{y-x}{2} \in (0,\pi)$, und wegen Proposition 3.6.6(a) folgt nun $\cos(y) - \cos(x) < 0$. Also ist $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend. Da $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$, folgt aus Satz 3.3.4, dass $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv ist. Da $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ zeigt dies (a). Wegen $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ erhalten wir daraus sofort auch (b). Mittels $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ folgen nun auch die restlichen Behauptungen. $\square$

Die komplexen *Tangens-* und *Cotangensfunktionen* werden wie folgt definiert:

$$\tan\colon \mathbb{C}\setminus(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\to\mathbb{C}, \qquad \tan(z):=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

$$\cot\colon \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{C}, \qquad \cot(z):=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}=\frac{1}{\tan(z)}$$

Beachte, dass diese wegen Proposition 3.6.4(a) und (b) wohldefiniert sind. Durch Einschränkung auf reelle Argumente erhalten wir die reellen Tangens- und Cotangensfunktionen

$$\tan\colon \mathbb{R}\setminus(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\to\mathbb{R}, \qquad \tan(x):=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot\colon \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{R}, \qquad \cot(x):=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\tan(x)}$$

3.6.8. Proposition. *Tangens und Cotangens haben die folgen Eigenschaften:*

a) $\cot(z)=-\tan(z+\pi/2)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
b) $\tan(z+\pi)=\tan(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)$.
c) $\cot(z+\pi)=\cot(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
d) $\tan(-z)=-\tan(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)$.
e) $\cot(-z)=-\cot(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
f) *Es gilt das Additionstheorem*

$$\tan(z+w)=\frac{\tan(z)+\tan(w)}{1-\tan(z)\tan(w)}$$

wann immer beide Seiten definiert sind, $z,w\in\mathbb{C}$.

g) *Es gilt das Additionstheorem*

$$\cot(z+w)=\frac{\cot(z)\cot(w)-1}{\cot(z)+\cot(w)}$$

wann immer beide Seiten definiert sind, $z,w\in\mathbb{C}$.

h) *Für die Nullstellenmenge des Tangens gilt*

$$\big\{z\in\mathbb{C}\setminus\big(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)\;\big|\;\tan(z)=0\big\}=\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}=\pi\mathbb{Z}.$$

i) *Für die Nullstellenmenge des Cotangens gilt*

$$\big\{z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}\;\big|\;\cot(z)=0\big\}=\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}=\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}.$$

Beweis. Dies folgt leicht aus den Eigenschaften des Sinus und Cosinus. □

3.6.9. Proposition. *Die reellen Tangens und Cotangensfunktionen*

$$\tan\colon \mathbb{R}\setminus\big(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\big)\to\mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \cot\colon \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$$

sind stetig. Weiters gilt für $k\in\mathbb{Z}$:

a) $\tan\colon \big(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\big)\to\mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*
b) $\cot\colon \big(k\pi,\pi+k\pi\big)\to\mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*

c) $\tan(x) > 0$ *für* $x \in \big(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$, *und* $\tan(x) < 0$ *für* $x \in \big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\big)$.
d) $\cot(x) > 0$ *für* $x \in \big(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$, *und* $\cot(x) < 0$ *für* $x \in \big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\big)$.

Beweis. Als Quotient zweier stetiger Funktionen sind sowohl Tangens als auch Cotangens stetig, siehe Proposition 3.1.8 und Beispiel 3.2.23. Auf dem Intervall $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ ist der Cosinus positiv, siehe Proposition 3.6.6(c), und der Sinus streng monoton wachsend, siehe Proposition 3.6.7(c). Daher ist auch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ auf diesem Intervall streng monoton wachsend. Da Sinus und Cosinus stetig sind, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sin\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n}\big) = \sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \cos\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n}\big) = \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big) = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) = \infty$, siehe Proposition 2.4.4. Daher ist $\tan\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big)$ nach oben unbeschränkt. Ebenso zeigt man $\lim_{n\to\infty} \tan(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = \infty$, also ist $\tan\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big)$ auch nach unten unbeschränkt. Nach Satz 3.3.4 muss daher $\tan\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big) = \mathbb{R}$ gelten, also ist $\tan\colon \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R}$ auch bijektiv. Damit ist (a) für $k = 0$ gezeigt. Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ folgt die Behauptung (a) nun aus der Periodizität, $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, siehe Proposition 3.6.8(b). Ganz analog lässt sich (b) verifizieren. (c) folgt aus (a) und $\tan(k\pi) = 0$. Ebenso folgt (d) aus (b) und $\cot(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$. □

3.6.10. Proposition. *Die Winkelfunktionen nehmen an folgenden Stellen die angegebenen Funktionswerte an:*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*n.def.*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(x)$	*n.def.*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*n.def.*
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*n.def.*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(x)$	*n.def.*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*n.def.*

Beweis. Es genügt $\sin\big(\frac{\pi}{6}\big)$, $\sin\big(\frac{\pi}{4}\big)$ und $\sin\big(\frac{\pi}{3}\big)$ zu bestimmen, die restlichen Werte erhält man dann aus Proposition 3.6.3. Da

$$\cos\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\sin(-x) = \sin(x), \tag{75}$$

siehe Proposition 3.6.3(e) und Proposition 2.10.5(d), folgt für $x = \frac{\pi}{4}$ sofort $\sin\big(\frac{\pi}{4}\big) = \cos\big(\frac{\pi}{4}\big)$. Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ erhalten wir $2\sin^2\big(\frac{\pi}{4}\big) = 1$. Da

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, siehe Proposition 3.6.6(a), schließen wir $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Setzen wir in (75) $x = \frac{\pi}{3}$ so liefert dies $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen die Verdoppelungsformel $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ verwendet haben, siehe Proposition 2.10.5(b). Da $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, siehe Proposition 3.6.6(c), gibt dies $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Daraus folgt nun $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

3.6.11. PROPOSITION. *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $\sinh(z+\frac{\pi}{2}\mathbf{i}) = \mathbf{i}\cosh(z)$, $\sinh(z+\pi\mathbf{i}) = -\sinh(z)$, $\sinh(z+2\pi\mathbf{i}) = \sinh(z)$.
b) $\cosh(z+\frac{\pi}{2}\mathbf{i}) = \mathbf{i}\sinh(z)$, $\cosh(z+\pi\mathbf{i}) = -\cosh(z)$, $\cosh(z+2\pi\mathbf{i}) = \cosh(z)$.
c) *Für die Nullstellenmenge des Sinus hyperbolicus gilt:*
$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sinh(z) = 0\right\} = \{\pi\mathbf{i}k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$$
d) *Für die Nullstellenmenge des Cosinus hyperbolicus gilt:*
$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \cosh(z) = 0\right\} = \left\{\tfrac{\pi}{2}\mathbf{i} + \pi\mathbf{i}k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \tfrac{\pi}{2}\mathbf{i} + \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$$

BEWEIS. Dies folgt aus den Relationen $\sinh(z) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)$ und $\cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z)$, siehe Proposition 2.10.6(b), und den entsprechenden Eigenschaften des Sinus und Cosinus. □

3.6.12. PROPOSITION.

a) $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*
b) $\sinh(x) > 0$ *für* $x > 0$, *und* $\sinh(x) < 0$ *für* $x < 0$.
c) $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ *ist streng monton wachsend und bijektiv.*
d) $\cosh\colon (-\infty, 0] \to [1,\infty)$ *ist streng monton fallend und bijektiv.*

BEWEIS. Da $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto -e^{-x}$ streng monoton wachsend sind, gilt dies auch für $x \mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Weiters ist $\lim_{n\to\infty}\sinh(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty}\sinh(-n) = -\infty$. Behauptung (a) folgt daher aus Satz 3.3.4. (b) folgt aus (a) und $\sinh(0) = 0$. Wenden wir das Additionstheorem in Proposition 2.10.6(d) auf $z = \frac{x+y}{2}$ und $w = \frac{x-y}{2}$ an, erhalten wir
$$\cosh(x) = \cosh\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cosh\Big(\frac{x-y}{2}\Big) + \sinh\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sinh\Big(\frac{x-y}{2}\Big),$$
und wenden wir es auf $z = \frac{x+y}{2}$ und $w = \frac{y-x}{2}$ an, erhalten wir
$$\cosh(y) = \cosh\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\cosh\Big(\frac{y-x}{2}\Big) + \sinh\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sinh\Big(\frac{y-x}{2}\Big)$$
Subtraktion dieser beiden Gleichung liefert unter Verwendung von $\cosh(-z) = \cosh(z)$ und $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ nun
$$\cosh(y) - \sinh(x) = 2\sinh\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\sinh\Big(\frac{y-x}{2}\Big) \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{76}$$
Ist nun $0 \le x < y$, dann auch $0 < \frac{x+y}{2}$ sowie $0 < \frac{y-x}{2}$, also ist nach (b) die rechte Seite von (76) positiv und damit $\cosh(y) > \cosh(x)$. Also ist $\cosh\colon [0,\infty) \to$

$[1,\infty)$ streng monoton wachsend. Weiters gilt $\cosh(0)=1$ und $\lim_{n\to\infty}\cosh(n)=\infty$, woraus nun mittels Satz 3.3.4 (c) folgt. Schließlich folg (d) aus (c) und der Relation $\cosh(-x)=\cosh(x)$. □

Tangens hyperbolicus und *Cotangens hyperbolicus* werden wie folgt definiert:

$$\tanh\colon \mathbb{C}\setminus(\tfrac{\pi}{2}\mathbf{i}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z})\to\mathbb{C},\qquad \tanh(z):=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$

$$\coth\colon \mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\to\mathbb{C},\qquad \coth(z):=\frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}=\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}$$

Beachte, dass diese wegen Proposition 3.6.11(c) und (d) wohldefiniert sind. Durch Einschränkung auf reelle Argumente erhalten wir die reellen hyperbolischen Tangens- und Cotangensfunktionen

$$\tanh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \tan(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\qquad \coth(x):=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

3.6.13. Proposition. *Der hyperbolische Tangens und Cotangens haben die folgen Eigenschaften:*

a) $\tanh(z)=-\mathbf{i}\tan(\mathbf{i}z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\big)$.
b) $\coth(z)=\mathbf{i}\cot(\mathbf{i}z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$.
c) $\coth(z+\frac{\pi}{2}\mathbf{i})=\tanh(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$.
d) $\tanh(z+\pi\mathbf{i})=\tanh(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\big)$.
e) $\coth(z+\pi\mathbf{i})=\coth(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$.
f) $\tanh(-z)=-\tanh(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\big(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\big)$.
g) $\coth(-z)=-\coth(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$.
h) *Es gilt das Additionstheorem*
$$\tanh(z+w)=\frac{\tanh(z)+\tanh(w)}{1+\tanh(z)\tanh(w)}$$
wann immer beide Seiten definiert sind, $z,w\in\mathbb{C}$.
i) *Es gilt das Additionstheorem*
$$\coth(z+w)=\frac{1+\coth(z)\coth(w)}{\coth(z)+\coth(w)}$$
wann immer beide Seiten definiert sind, $z,w\in\mathbb{C}$.
j) *Für die Nullstellenmenge des Tangens hyperbolicus gilt*
$$\big\{z\in\mathbb{C}\setminus\big(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\big)\ \big|\ \tanh(z)=0\big\}=\{k\pi\mathbf{i}\mid k\in\mathbb{Z}\}=\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}.$$
k) *Für die Nullstellenmenge des Cotangens hyperbolicus gilt*
$$\big\{z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\ \big|\ \coth(z)=0\big\}=\{\tfrac{\pi}{2}\mathbf{i}+k\pi\mathbf{i}\mid k\in\mathbb{Z}\}=\tfrac{\pi}{2}\mathbf{i}+\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}.$$

Beweis. Aus $\sinh(z) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)$ und $\cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z)$ erhalten wir sofort (a) und (b). Die restlichen Behauptungen folgen daher aus den entsprechenden Eigenschaften des Tangens und des Cotangens. □

3.6.14. Proposition. *Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus*

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

sind stetig. Weiters gilt:

a) $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*
b) $\tanh(x) > 0$ *für* $x > 0$, *und* $\tanh(x) < 0$ *für* $x < 0$.
c) $\coth\colon (0, \infty) \to (1, \infty)$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*
d) $\coth\colon (-\infty, 0) \to (-\infty, -1)$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*
e) $\coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus[-1, 1]$ *ist bijektiv.*

Beweis. Als Quotienten stetiger Funktionen sind Tangens und Cotanges hyperbolicus stetig. Nach Proposition 3.6.12 ist $x \mapsto \sinh(x)$ streng monoton wachsend, und $\cosh(x) \geq 1 > 0$. Daher ist auch $x \mapsto \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ streng monoton wachsend. Aus der Formel $\tanh(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ erhalten wir

$$-1 < \tanh(x) < 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiters ist

$$\lim_{n\to-\infty} \tanh(n) = \lim_{n\to-\infty} \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1} = -1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = 1.$$

Nach Satz 3.3.4 gilt daher $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Damit ist (a) gezeigt. (b) folgt aus (a) und $\tanh(0) = 0$. Da $x \mapsto \tanh(x)$ streng monoton wachsend ist, muss $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$ sowohl auf $(0, \infty)$ als auch auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend sein. Da $\tanh((0, \infty)) = (0, 1)$, folgt mittels $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$ auch $\coth((0, \infty)) = (1, \infty)$. Ebenso erhalten wir aus $\tanh((-\infty, 0)) = (-1, 0)$ sofort $\coth((-\infty, 0)) = (-\infty, -1)$. Damit sind (c) und (d) gezeigt. (e) folgt aus (c) und (d). □

3.7. Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Nach Proposition 3.6.7(c) und Beispiel 3.2.23 ist $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend, bijektiv und stetig. Die nach Satz 3.3.4 streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

wird der (Hauptzweig des) *Arcussinus* genannt. Ebenso ist $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend, bijektiv und stetig. Die streng monoton fallende und stetige Umkehrabbildung

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

wird der (Hauptzweig des) *Arcuscosinus* genannt. Der Tangens $\tan\colon \big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig. Die streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \big(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big)$$

wird der (Hauptzweig des) *Arcustangens* genannt. Die streng monoton fallende und stetige Umkehrabbildung des Cotangens, $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

wird der (Hauptzweig des) *Arcuscotangens* genannt.

Die streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung des Sinus hyperbolicus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

wird der *Areasinus hyperbolicus* genannt. Die streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung des Cosinus hyperbolicus, $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$,

$$\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty),$$

wird der *Areacosinus hyperbolicus* genannt. Die streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung des Tangens hyperbolicus $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$,

$$\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R},$$

heißt der *Areatangenshyperbolicus.* Die stetige Umkehrabbildung des Cotangens hyperbolicus $\coth\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus[-1,1]$,

$$\operatorname{arcoth}\colon \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R},$$

wird der *Areacotangens hyperbolicus* genannt.

3.7.1. Proposition. *Es gilt:*

a) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$, $x \geq 1$.
c) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$.
d) $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Beweis. Siehe Übungsaufgaben. □

3.8. Grenzwerte. Wir haben bis jetzt nur Grenzwerte von Folgen betrachtet. Nun wollen wir auch Grenzwerte von Funktionen behandeln. Dazu benötigen wir zuerst den Begriff des Häufungspunktes einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$.

3.8.1. Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt der Menge D* falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ unendlich viele Punkte aus D liegen.[63]

[63]Dies sollte nicht mit dem Begriff des Häufungswertes einer Folge verwechselt werden.

3.8.2. Beispiel. Betrachte ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$. Offensichtlich ist dann jeder Punkt in $x_0 \in I$ ein Häufungspunkt von I. Dies sind alle Häufungspunkte von I, kein Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ kann Häufungspunkt von I sein.

3.8.3. Beispiel. Ist $I = (a, b)$, dann ist jeder Punkt in $[a, b]$ Häufungspunkt von I, aber kein Punkt in $\mathbb{R}\setminus[a, b]$ ist Häufungspunkt von (a, b). Beachte, dass auch a und b, die ja nicht in I liegen, Häufungspunkte von I sind. Die Häufungspunkte von (a, ∞) und $[a, \infty)$ sind genau die Punkte in $[a, \infty)$.

3.8.4. Beispiel. Ist I ein allgmeines Intervall und $x_0 \in I$, dann ist x_0 Häufungspunkt von I. Auch ist jeder Randpunkt von I, ob er nun zu I gehört oder nicht, ein Häufungspunkt von I.

3.8.5. Beispiel. Die Menge $D := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat nur 0 als Häufungspunkt.

3.8.6. Beispiel. Die einelementige Teilmenge $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ besitzt keinen einzigen Häufungspunkt. Allgemeiner gilt, endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben keine Häufungspunkte.

3.8.7. Beispiel. Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ stimmt mit $\mathbb{R}$ überein — eine abzählbare Menge kann also überabzählbar viele Häufungspunkte besitzen.

3.8.8. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist x_0 ein Häufungspunkt von D genau dann wenn eine Folge (a_n) in $D \setminus \{x_0\}$ existiert die gegen x_0 konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann liegen im Intervall $\bigl(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\bigr)$ unendlich viele Punkte von D. Daher finden wir auch $a_n \in D\setminus\{x_0\}$ für das $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ gilt. Offensichtlich ist dann (a_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert. Sei nun umgekehrt (a_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert. Es ist zu zeigen, dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist. Indirekt angenommen x_0 ist kein Häufungspunkt von D. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nur endlich viele Punkte von D liegen. Durch verkleinern von ε können wir erreichen, dass das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ keinen einzigen Punkt von $D \setminus \{x_0\}$ enthält. Dies widerspricht aber der Annahme, dass (a_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ ist, die gegen x_0 konvergiert. Also muss x_0 ein Häufungspunkt von D sein. □

3.8.9. Bemerkung. Zum Zusammenhang zwischen Häufungswerten von Folgen und Häufungspunkten von Teilmengen sei noch folgendes bemerkt. Ist (a_n) eine reelle Folge, und ist $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann ist x_0 auch Häufungswert der Folge (a_n). Umgekehr muss ein Häufungswert der Folge (a_n) aber nicht unbedingt ein Häufungspunkt der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sein, was an jeder konstanten Folge beobachtet werden kann.

3.8.10. Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 ein Häufungspunkt von D und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen *die Funktion f hat im Häufungpunkt*

x_0 *den Grenzwert* a falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0$$

und sagen auch $f(x)$ *konvergiert für* $x \to x_0$ *gegen* a, oder $f(x)$ *strebt gegen* a *wenn* x *gegen* x_0 *strebt.*

3.8.11. Bemerkung. Die Forderung, dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist, stellt sicher, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$, sofern er existiert, eindeutig ist.

3.8.12. Bemerkung. Es sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Obwohl die Funktion bei x_0 definiert ist, ist der Funktionswert $f(x_0)$ völlig unerheblich für Existenz und Wert des Limes $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

3.8.13. Beispiel. Für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0 \\ 2 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

3.8.14. Beispiel. Für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

gilt $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Dies folgt leicht aus der Beobachtung $f(x) = \frac{1-x^2}{1-x} = 1 + x$.

3.8.15. Beispiel. Für die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht.

3.8.16. Beispiel. Für die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 0} h(x)$ nicht.

3.8.17. Proposition. *Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ein Häufungspunkt von* D *und* $a \in \mathbb{R}$. *Dann sind äquivalent:*

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
b) *Die Funktion*

$$\tilde{f}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{falls } x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & \textit{falls } x = x_0 \end{cases}$$

ist im Punkt x_0 *stetig.*

c) *Für jede Folge* (a_n) *in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $a_n \to x_0$ *gilt auch* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) ist offensichtlich. Die Implikation (b)⇒(c) folgt aus Proposition 3.1.6. Nun zu (c)⇒(b): Indirekt angenommen $\tilde{f}$ wäre im Punkt x_0 nicht stetig. Nach Proposition 3.1.6 existiert dann eine Folge (a_n) in $D \cup \{x_0\}$ mit $a_n \to x_0$ für die aber $\tilde{f}(a_n)$ nicht gegen $\tilde{f}(x_0) = a$ konvergiert. Insbesondere muss für unendlich viele Folgenglieder $\tilde{f}(a_n) \neq a$ gelten. Fasse alle Folgenglieder a_n mit $f(a_n) \neq a$ zu einer Teilfolge (a_{n_k}) zusammen. Dann ist (a_{n_k}) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}(a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = a$. Nach Konstruktion ist sogar $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(a_n) = a$, ein Widerspruch. Also muss $\tilde{f}$ in x_0 stetig sein. □

3.8.18. Beispiel. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht. Genauer ist hier gemeint, dass der Grenzwert der Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \to 0$ nicht existiert. Um dies zu einzusehen betrachte die Folgen $a_n := \frac{1}{2\pi n}$ und $b_n := \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$. Beides sind Folgen in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die gegen 0 konvergieren. Weiters ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1.$$

Nach Proposition 3.8.17 kann daher der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht existieren.

3.8.19. Beispiel. Wir wollen den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ bestimmen. Dazu erinnern wir uns an die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihendarstellung des Sinus

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Dann gilt für $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite hat Konvergenzradius ∞, definiert nach Satz 3.2.21 eine stetige Funktion

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k},$$

und es ist $\frac{\sin(x)}{x} = \tilde{f}(x)$ für alle $x \neq 0$. Nach Proposition 3.8.17 gilt daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \tilde{f}(0) = 1.$$

3.8.20. Proposition. *Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D$ *ein Häufungspunkt von* D. *Dann gilt* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *genau dann wenn* f *im Punkt* x_0 *stetig ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 3.8.17. □

3.8.21. Beispiel. Nach Proposition 3.8.20 gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}, \quad \lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0} \cosh(x) = \cosh(x_0).$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \tan(x) &= \tan(x_0) && x_0 \in \mathbb{R} \setminus \big(\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\big) \\ \lim_{x\to x_0} \cot(x) &= \cot(x_0) && x_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \\ \lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{x} &= \sqrt[k]{x_0} && x_0 \geq 0 \\ \lim_{x\to x_0} \ln x &= \ln x_0 && x_0 > 0 \end{aligned}$$

3.8.22. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 ein Häufungspunkt von D, $a = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $D' \subseteq \mathbb{R}$, $f(D) \subseteq D'$, $a \in D'$ und $g\colon D' \to \mathbb{R}$ in a stetig. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(a) = g\Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big).$$

Beweis. Nach Proposition 3.8.17 ist die Funktion

$$\tilde{f}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 stetig. Nach Voraussetzung gilt $\tilde{f}(D \cup \{x_0\}) \subseteq D'$. Nach Proposition 3.1.11 ist daher die Funktion $g \circ \tilde{f}$ in x_0 stetig. Nach Proposition 3.8.17 gilt daher $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(a)$. □

3.8.23. Beispiel. Nach Proposition 3.8.22 und Beispiel 3.8.19 ist

$$\lim_{x\to 0} \exp\Big(\frac{\sin(x)}{x}\Big) = \exp(1) = e.$$

3.8.24. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge, x_0 ein Häufungspunkt von D, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen für die die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Dann gilt:*

a) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
b) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
c) $\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x)$
d) *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und gilt $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, dann gilt auch*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Beweis. Mit Hilfe von Proposition 3.8.17 folgen alle diese Aussagen entweder aus Proposition 2.1.19 oder Proposition 3.1.8. Etwa kann man (a) wie folgt zeigen. Ist (a_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $a_n \to x_0$, dann gilt wegen Proposition 3.8.17

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Aus Proposition 2.1.19(a) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Aus Proposition 3.8.17 folgt nun (a). Nun zu (b): Wir könnten dies genau wie im Beweis von (a) auf Proposition 2.1.19 zurückführen, wollen hier aber mit Proposition 3.1.8 argumentieren. Nach Proposition 3.8.17 sind die beiden Funktionen

$$\tilde f\colon D\cup\{x_0\}\to\mathbb{R}, \qquad \tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x\in D\setminus\{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

$$\tilde g\colon D\cup\{x_0\}\to\mathbb{R}, \qquad \tilde g(x) := \begin{cases} g(x) & \text{falls } x\in D\setminus\{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} g(x) & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

im Punkt x_0 stetig. Nach Proposition 3.1.8 ist daher auch die Produktfunktion

$$\tilde f\tilde g\colon D\cup\{x_0\}\to\mathbb{R}, \quad (\tilde f\tilde g)(x) = \begin{cases} (fg)(x) & \text{falls } x\in D\setminus\{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x) & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

im Punkt x_0 stetig. Aus Proposition 3.8.17 folgt daher (b). Die verbleibenden Behauptungen zeigt man völlig analog. □

3.8.25. Proposition. *Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$, $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von D, sodass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ beide existieren. Weiters sei $f\le g$, d.h. $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in D$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Beweis. Siehe die Übungsaufgaben. □

3.8.26. Beispiel. Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\exp\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)}{x^2+3x+5}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

bestimmen. Dazu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2,$$

und wegen der Stetigkeit des Logarithmus also, siehe Proposition 3.8.22,

$$\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(2). \tag{77}$$

Nach Beispiel 3.8.19 gilt $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$. Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to 1}\exp\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right) = \exp(1) = e. \tag{78}$$

Aus Proposition 3.8.24, (77) und (78) erhalten wir nun

$$\lim_{x\to 1}\frac{\exp\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)}{x^2+3x+5}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\frac{\lim_{x\to 1}\exp\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)}{\lim_{x\to 1}x^2+3x+5}\cdot\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\frac{e\ln(2)}{9}.$$

3.8.27. Proposition. *Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt: Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn für jede Folge (a_n) in $D\setminus\{x_0\}$ mit $a_n\to x_0$ auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert.*

Beweis. Die eine Richtung folgt aus Proposition 3.8.17. Sei daher f so, dass für jede Folge (a_n) in $D\setminus\{x_0\}$ mit $a_n\to x_0$ auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert. Seien dazu (a_n) und (b_n) zwei Folgen in $D\setminus\{x_0\}$ die beide gegen x_0 konvergieren. Nach Voraussetzung erxistieren daher die Limiten $a=\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ und $b=\lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Wegen Proposition 3.8.17 genügt es zu zeigen $a=b$. Dazu betrachten wir die Folge (c_n) gegeben durch:

$$a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\dots$$

Dann konvergiert auch (c_n) gegen x_0, und nach Voraussetzung muss daher $f(c_n)$ konvergieren. Nach Konstruktion besitzt (c_n) die beiden Häufungswerte a und b. Da $(f(c_n))$ konvergiert, folgt aus Proposition 2.3.13 nun $a=b$. □

3.8.28. Satz. *Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt: Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn folgende Cauchybedingung erfüllt ist: Für jedes $\varepsilon>0$ existiert $\delta>0$, sodass für alle $x,y\in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\}$ auch $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ gilt, in Zeichen:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\}:|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{79}$$

Beweis. Es existiere der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$. Zu gegebenen $\varepsilon>0$ gibt es dann $\delta>0$, sodass

$$|a-f(x)|<\varepsilon/2 \qquad \text{für alle } x\in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\}.$$

Für $x,y\in U_\delta(x_0)\cap D\setminus\{x_0\}$ ist daher

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-a|+|a-f(y)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

und damit gilt die Cauchybedingung (79). Sei nun umgekehrt (79) erfüllt. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert. Sei dazu (a_n) eine Folge in $D\setminus\{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert. Wegen (79) ist $(f(a_n))$ eine Cauchyfolge und daher konvergent, siehe Satz 2.2.10. Nach Proposition 3.8.27 existiert daher auch $\lim_{x\to x_0} f(x)$. □

3.9. Einseitige Grenzwerte. Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0\in\mathbb{R}$. Weiters sei

$$D_r:=D\cap[x_0,\infty) \quad\text{und}\quad D_l:=D\cap(-\infty,x_0]$$

sowie

$$f_r:=f|_{D_r}\colon D_r\to\mathbb{R} \quad\text{und}\quad f_l:=f|_{D_l}\colon D_l\to\mathbb{R}.$$

Ist x_0 ein Häufungspunkt von D_r und existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f_r(x) = a_r$, dann sagen wir die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat im Punkt x_0 den *rechtsseitigen Grenzwert* a_r und schreiben

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a_r.$$

Ist x_0 ein Häufungspunkt von D_l und existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f_l(x) = a_l$, dann sagen wir die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat im Punkt x_0 den *linksseitigen Grenzwert* a_l und schreiben

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a_l.$$

3.9.1. Beispiel. Betrachte die Funktion:

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} h(x) = 1.$$

Beachte, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} h(x)$ nicht existiert.

3.9.2. Beispiel. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existieren folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = f(b).$$

Nach Abschnitt 3.7 haben wir z.B:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1+} \arcsin(x) &= \lim_{x\to -1} \arcsin(x) = -\pi/2 \\ \lim_{x\to 1-} \arcsin(x) &= \lim_{x\to 1} \arcsin(x) = \pi/2 \\ \lim_{x\to -1+} \arccos(x) &= \lim_{x\to -1} \arccos(x) = \pi \\ \lim_{x\to 1-} \arccos(x) &= \lim_{x\to 1} \arccos(x) = 0 \\ \lim_{x\to 1+} \operatorname{arcosh}(x) &= \lim_{x\to 1} \operatorname{arcosh}(x) = 0 \end{aligned}$$

3.9.3. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ zugleich Häufungspunkt von $D \cap [x_0, \infty)$ und $D \cap (-\infty, x_0]$. Dann sind äquivalent:*

a) *Der Grenzwert* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert.*
b) *Die beiden einseitigen Grenzwerte* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *und* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *existieren und stimmen überein.*

In diesem Fall gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Definition dieser Grenzwerte. □

3.9.4. Proposition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ sowohl Häufungspunkt von $D \cap [x_0, \infty)$ als auch Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0]$. Dann sind äquivalent:*

a) *f ist bei x_0 stetig.*
b) *Die beiden einseitigen Grenzwerte* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *und* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *existieren und stimmen mit $f(x_0)$ überein.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 3.9.3 und Porposition 3.8.20. □

Für die einseitigen Grenzwerte gelten analoge Rechenregeln wie für gewöhnliche Grenzwerte, siehe Proposition 3.8.22, Proposition 3.8.24 und Proposition 3.8.25. Auch haben wir wieder ein Cauchykriterium, dass die Existenz der einseitigen Limiten charakterisiert:

3.9.5. Satz. *Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0\in\mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D\cap[x_0,\infty)$. Dann gilt: Der rechtsseitige Grenzwert* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *existiert genau dann, wenn folgende Cauchybedingung erfüllt ist:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in(x_0,x_0+\delta)\cap D: |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Für die Existenz des linksseitigen Grenzwertes $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *gilt eine analoge Charakterisierung.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.8.28 angewandt auf die Funktion

$$f_r := f|_{D\cap[x_0,\infty)}\colon\ D\cap[x_0,\infty)\to\mathbb{R}.$$ □

3.9.6. Satz. *Es sei $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0\in\mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D\cap(-\infty,x_0]$. Ist f monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann existiert der linksseitige Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\sup\bigl\{f(x)\bigm| x\in D\cap(-\infty,x_0)\bigr\}.$$

Ist f monoton fallend und nach unten beschränkt, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\inf\bigl\{f(x)\bigm| x\in D\cap(-\infty,x_0)\bigr\}.$$

Eine analoge Aussage gilt für rechtsseitige Grenzwerte.

Beweis. O.B.d.A. sei f monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann existiert

$$a:=\sup\bigl\{f(x)\bigm| x\in D\cap(-\infty,x_0)\bigr\}.$$

Es ist zu zeigen $a=\lim_{x\to x_0-} f(x)$. Sei dazu $\varepsilon>0$. Nach Konstruktion von a existiert $\xi\in D\cap(-\infty,x_0)$, sodass $a\geq f(\xi)>a-\varepsilon$. Wegen der Monotonie von f gilt dann $a\geq f(x)>a-\varepsilon$ für alle $x\in D\cap[\xi,x_0)$. Daraus erhalten wir $|a-f(x)|<\varepsilon$ für alle $x\in D\cap[\xi,x_0)$, also $\lim_{x\to x_0-} f(x)=a$. □

3.9.7. Beispiel. Ist $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ eine monotone beschränkte Funktion, dann existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b} f(x)$, siehe Satz 3.9.6.

3.9.8. Beispiel. Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und $x_0 \in (a,b)$, dann existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, denn für geeignetes $\varepsilon > 0$ ist $x_0 \in (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ und die Einschränkung von f auf $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ ist eine beschränkte monotone Funktion, obere und untere Schranken für diese Einschränkung sind wegen der Monotonie von f durch $f(a+\varepsilon)$ und $f(b-\varepsilon)$ gegeben, siehe Satz 3.9.6.

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen die Funktion f konvergiert gegen a wenn x gegen ∞ strebt falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $K > 0$, sodass für jedes $x \in D \cap (K,\infty)$ gilt $|a - f(x)| < \varepsilon$. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x \in D \cap (K,\infty) : |a - f(x)| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Dies ist genau dann der Fall wenn für jede Folge (a_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$ gilt. Auch gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0+} f(\frac{1}{y}) = a$. Wegen dieser Charakterisierung gelten für die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ Rechenregelen analog zu denen für rechtsseitige Grenzwerte.

Es sei nun D eine nach unten unbeschränkte Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen die Funktion f konvergiert gegen a wenn x gegen $-\infty$ strebt falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $K > 0$, sodass für jedes $x \in D \cap (-\infty,-K)$ gilt $|a - f(x)| < \varepsilon$. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x \in D \cap (-\infty,-K) : |a - f(x)| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

Dies ist genau dann der Fall wenn für jede Folge (a_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$ gilt. Auch gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0-} f(\frac{1}{y}) = a$. Wegen dieser Charakterisierung gelten für die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ Rechenregelen analog zu denen für linksseitige Grenzwerte.

3.9.9. Satz. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt: Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert genau dann wenn die folgende Cauchybedingung erfüllt ist:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x,y \in D \cap (K,\infty) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ein analoges Kriterium gilt für die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.9.5 und der Charakterisierung $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0+} f(\frac{1}{y}) = a$ bzw. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0-} f(\frac{1}{y}) = a$. $\square$

3.9.10. Satz. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup f(D)$. Ist f monoton fallend und nach unten beschränkt, dann exisitiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x) = \inf f(D)$. Analoge Aussagen gelten für den Grenzwert $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, wobei nun $D \subseteq \mathbb{R}$ nach unten unbeschränkt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ monoton ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.9.6 und der Charaktersisierung $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0+} f(\frac{1}{y}) = a$. □

3.9.11. Beispiel. Mittels Satz 3.9.10 und den entsprechenden Resultaten über die Trigonometrischen Funktionen erhalten wir:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \pi/2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot}(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot}(x) = \pi$$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \coth(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth(x) = -1$$

3.10. Uneigentliche Grenzwerte. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Wir sagen f strebt gegen ∞ wenn x gegen x_0 strebt, falls gilt:

$$\forall K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \setminus \{x_0\} : f(x) > K$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \tag{80}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

Analog sagen wir f strebt gegen $-\infty$ wenn $x \to x_0$ strebt, falls gilt:

$$\forall K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \setminus \{x_0\} : f(x) < -K$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty. \tag{81}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -\infty$. Grenzwerte der Form (80) und (81) werden *uneigentliche Grenzwerte* genannt.

3.10.1. Beispiel. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

Beachte jedoch, dass der uneigentliche Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nicht existiert, da die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, in jeder Umgebung von $x_0=0$ beliebig große aber auch beliebig kleine Werte annimmt.

3.10.2. Proposition. *Es seien $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0\in\mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

a) *Ist f nach unten beschränkt und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\infty$.*
b) *Ist f nach oben beschränkt und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$.*
c) *Existiert $\rho>0$ mit $f(x)\geq\rho$ für alle $x\in D$ und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\infty$.*
d) *Existiert $\rho>0$ mit $f(x)\geq\rho$ für alle $x\in D$ und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$.*
e) *Existiert $\rho<0$ mit $f(x)\leq-\rho$ für alle $x\in D$ und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$*
f) *Existiert $\rho<0$ mit $f(x)\leq-\rho$ für alle $x\in D$ und ist $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\infty$.*
g) *Ist $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.*
h) *Ist $f(x)>0$ für alle $x\in D$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.*
i) *Ist $f(x)<0$ für alle $x\in D$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, dann gilt auch $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.*

Beweis. Dies folgt leicht aus Proposition 2.4.4 und der Charakterisierung: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ genau dann, wenn für jede Folge (a_n) in $D\setminus\{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\pm\infty$ gilt. $\square$

Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0\in\mathbb{R}$. Betrachte wieder

$$D_r := D\cap[x_0,\infty) \quad\text{und}\quad D_l := D\cap(-\infty,x_0]$$

sowie

$$f_r := f|_{D_r}\colon D_r\to\mathbb{R} \quad\text{und}\quad f_l := f|_{D_l}\colon D_l\to\mathbb{R}.$$

Ist x_0 ein Häufungspunkt von D_r und gilt $\lim_{x\to x_0} f_r(x)=\pm\infty$, dann sagen wir die Funktion $f\colon D\to\mathbb{R}$ hat im Punkt x_0 den *uneigentlichen rechtsseitigen Grenzwert* $\pm\infty$ und schreiben

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\pm\infty.$$

Ist x_0 ein Häufungspunkt von D_l und gilt $\lim_{x\to x_0} f_l(x)=\pm\infty$, dann sagen wir die Funktion $f\colon D\to\mathbb{R}$ hat im Punkt x_0 den *uneigentlichen linksseitigen Grenzwert* $\pm\infty$ und schreiben

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\pm\infty.$$

Für die uneigentlichen einseitigen Grenzwerte gelten Rechenregeln analog zu denen in Proposition 3.10.2.

3.10.3. Bemerkung. Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und nach oben unbeschränkt, dann gilt $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = \infty$. Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und nach unten unbeschränkt, so gilt $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$. Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und nach unten unbeschränkt, dann gilt $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und nach oben unbeschränkt, dann gilt $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

3.10.4. Beispiel. Es gilt $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Allgemein gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^k} = \infty \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} \infty & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dies folgt aus Bemerkung 3.10.3.

3.10.5. Beispiel. Aus Bemerkung 3.10.3 und erhalten wir auch

$$\lim_{x\to\pi/2-} \tan(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\pi/2+} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \coth(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0+} \coth(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen die Funktion f strebt gegen ∞ wenn x gegen ∞ strebt falls gilt:

$$\forall K > 0\ \exists L > 0\ \forall x \in D \cap (L, \infty) : f(x) > K.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty. \tag{82}$$

Analog definiert man $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Es ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ genau dann, wenn für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to \infty$ auch $f(a_n) \to \pm\infty$ gilt. Auch gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0+} f(\frac{1}{y}) = \pm\infty$. Wegen dieser Charakterisierung gelten für die uneigentlichen Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ Rechenregeln analog zu Proposition 3.10.2. Völlig analog definiert man auch noch

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

für Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ die auf einer nach unten unbeschränkten Menge D definiert sind. Wieder gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ genau dann, wenn für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to -\infty$ gilt $f(a_n) \to \pm\infty$. Auch ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ genau dann wenn $\lim_{y\to 0-} f(\frac{1}{y}) = \pm\infty$. Schließlich gelten wieder Rechenregeln analog zu denen in Proposition 3.10.2.

3.10.6. Beispiel. Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arsinh}(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arsinh}(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcosh}(x) = \infty$$

3.10.7. Beispiel. Wegen $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ erhalten wir:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 0 \\ 1 & \text{falls } \alpha = 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha > 0 \\ 1 & \text{falls } \alpha = 0 \\ \infty & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$$

3.10.8. Beispiel. Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ gilt für $a > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 1 \\ 1 & \text{falls } a = 1 \\ 0 & \text{falls } a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > 1 \\ 1 & \text{falls } a = 1 \\ \infty & \text{falls } a < 1 \end{cases}$$

3.10.9. Beispiel. Für $a > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} a^x x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 1 \\ 0 & \text{falls } a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to\infty} a^{-x} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > 1 \\ \infty & \text{falls } a < 1 \end{cases}$$

Um dies einzusehen, beachte, dass für $x > 0$ gilt:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{1}{x}\big(1 + x + x^2/2\big),$$

woraus wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \tag{83}$$

erhalten. Schreiben wir nun $a^x x^\alpha = e^{x(\ln a + \alpha \frac{\ln x}{x})}$ folgen sofort die ersten beiden Behauptungen. Die verbleibenden Aussagern erhalten wir nun mittels $a^{-x} x^\alpha = \big(\frac{1}{a}\big)^x x^\alpha$.

3.10.10. Beispiel. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \ln x = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \begin{cases} -\infty & \text{falls } \alpha \leq 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha > 0 \end{cases}$$

Die ersten beiden Behauptungen folgen mittels

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to\infty} (e^y)^\alpha \ln e^y = \lim_{y\to\infty} e^{\alpha y} y$$

aus Beispiel 3.10.9. Da $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to\infty} \big(\frac{1}{y}\big)^\alpha \ln\frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} y^{-\alpha}\ln y$ folgen die verbleibenden Behauptungen aus dem eben Bewiesenen.

4. Differenzierbarkeit

4.1. Elementare Eigenschaften differenzierbarer Funktionen. $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen* falls gilt: Für jeden Punkt $x \in U$ existiert $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Typische Beispiele sind die *offenen Intervalle*

$$(a, b), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, a), \quad \mathbb{R} \qquad a < b$$

aber auch $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in U$, dann ist x_0 ein Häufungspunkt von $U \setminus \{x_0\}$.

4.1.1. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $x_0 \in U$ und existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dann heißt die Funktion f *im Punkt x_0 differenzierbar,* und

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

wird die *Ableitung von f im Punkt x_0* genannt. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, dann heißt f differenzierbar, und die Funktion

$$f'\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

wird die (erste) *Ableitung* von f genannt. Die Ableitung einer Funktion f wird oft auch mit $f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f$ bezeichnet, $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

4.1.2. Proposition. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 stetig. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Sei also f im Punkt x_0 differenzierbar. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Also folgt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nach Proposition 3.8.20 ist daher f im Punkt x_0 stetig. Die zweite Behauptung ist nun offensichtlich. □

4.1.3. Beispiel. Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant, dann ist f differnzierbar und es gilt $f' = 0$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist offensichtlich.

4.1.4. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist differenzierbar und es gilt $f' = 1$, d.h. $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist offensichtlich, denn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

4.1.5. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = 2x_0.\end{aligned}$$

4.1.6. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$, ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, denn für $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x_0-x}{(x-x_0)xx_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

4.1.7. Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ existiert nicht, da ja

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}.$$

4.1.8. Proposition. *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon V \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon U \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $g(U) \subseteq V$. Weiters sei g im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar und f im Punkt $g(x_0) \in V$ differenzierbar. Dann ist auch $f \circ g\colon U \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt die* Kettenregel

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sind $f\colon V \to \mathbb{R}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar, dann ist auch $f\circ g\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt die Kettenregel $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Beweis. Da f im Punkt $g(x_0)$ differenzierbar ist, ist die Funktion

$$\tilde{f}\colon V \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)} & \text{falls } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{falls } y = g(x_0) \end{cases}$$

im Punkt $g(x_0)$ stetig, siehe Proposition 3.8.17. Da g in x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 auch stetig, siehe Proposition 4.1.2. Nach Proposition 3.1.11 ist daher $\tilde{f} \circ g$ im Punkt x_0 stetig. Nach Proposition 3.8.20 ist daher

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(g(x)) = \tilde{f}(g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

Weiters gilt

$$f(y) - f(g(x_0)) = \tilde{f}(y)(y - g(x_0)) \qquad \text{für alle } y \in V$$

und damit auch

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = \tilde{f}(g(x))(g(x) - g(x_0)) \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\tilde{f}(g(x))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\tilde{f}(g(x))\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

Also ist $f\circ g$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel. Die zweite Behauptung ist nun offensichtlich. □

4.1.9. Proposition. *Es sei $U\subseteq\mathbb{R}$ offen, $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ beide in $x_0\in U$ differenzierbar, und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, λf und fg in x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0)\\ (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \qquad \textit{(Produktregel)}\end{aligned}$$

Ist $g(x)\neq 0$ für alle $x\in U$, dann sind auch die Funktionen $\frac{1}{g}$ und $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \textit{und} \quad \Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Sind $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ beide differenzierbar, dann sind auch die Funktionen $f+g$, λf und fg differenzierbar und es gilt $(f+g)'=f'+g'$, $(\lambda f)'=\lambda f'$ und $(fg)'=f'g+fg'$. Ist $g(x)\neq 0$ für alle $x\in U$, dann sind auch $\frac{1}{g}$ und $\frac{f}{g}$ differenzierbar, und es gilt $\big(\frac{1}{g}\big)'=-\frac{g'}{g^2}$ sowie $\big(\frac{f}{g}\big)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.

Beweis. Die erste Behauptung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Für die Produktregel gehen wir ähnlich vor:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\big(f(x)-f(x_0)\big)g(x)+f(x_0)\big(g(x)-g(x_0)\big)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

Dabei haben wir für $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ wieder Proposition 4.1.2 verwendet. Die Aussage $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$ folgt aus der Produktregel und der Tatsache, dass die konstante Funktion $x\mapsto\lambda$ verschwindende Ableitung hat, siehe Beispiel 4.1.3.

Sei nun $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Wir erinnern uns, dass die Funktion $\nu\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\nu(x) := \frac{1}{x}$, differenzierbar ist, und ihre Ableitung durch $\nu'(x) = -\frac{1}{x^2}$ gegeben ist, siehe Beispiel 4.1.6. Nach der Kettenregel, siehe Proposition 4.1.8, ist daher die Funktion $\frac{1}{g} = \nu \circ g\colon U \to \mathbb{R}$ bei x_0 differenzierbar, und ihre Ableitung durch

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = (\nu \circ g)'(x_0) = \nu'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0)$$

gegeben. Zusammen mit der Produktregel erhalten wir schließlich

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \Big(f \cdot \frac{1}{g}\Big)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0)$$
$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Die restlichen Behauptungen sind nun offensichtlich. □

4.1.10. Beispiel. Mittels Induktion erhalten wir aus der Produktregel und Beispiel 4.1.4 sofort

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist jedes Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, differenzierbar und seine Ableitung durch

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

gegeben. Mit Hilfe der Quotientenregel, sehen wir auch, dass jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar ist. Etwa ist die Ableitung der rationalen Funktion

$$r\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad r(x) := \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

wegen der Quotientenregel:

$$r'(x) = \frac{(9x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (3x^3 + 2x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^2} \qquad x \neq 1$$

4.1.11. Beispiel. Wegen der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 1)^{107} = 107(x^2 + 3x - 1)^{106}(2x + 3).$$

4.2. Lokale Extrema und Monotonie.

4.2.1. Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und $f\colon D \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt lokales Maximum der Funktion f, falls $\varepsilon > 0$ existiert, sodass die Funktion x_0 eine Maximalstelle der Funktion $f|_{D \cap U_\varepsilon(x_0)}$ ist.[64] Analog heißt ein Punkt $x_0 \in D$ ein *lokales Minimum* der Funktion f falls

[64] Wir erinnern uns, dass $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die ε-Umgebung von x_0 bezeichnet.

$\varepsilon > 0$ existiert, sodass x_0 eine Minimalstelle der Funktion $f|_{D\cap U_\varepsilon(x_0)}$ ist. Lokale Maxima und lokale Minima werden auch lokale *Extrema* genannt.

4.2.2. Proposition. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion die bei $x_0 \in U$ ein lokales Extremum besitzt und bei x_0 auch differenzierbar ist. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Durch Verkleinern von U dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass f bei x_0 ihr Maximum oder Minimum annimmt. O.B.d.A. sei weiters x_0 eine Maximalstelle von f, andernfalls betrachte $-f$. Es gilt daher $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$. Es ist dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{für alle } x \geq x_0,\ x \in U,$$

und daher auch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{84}$$

Ebenso gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \text{für alle } x \leq x_0,\ x \in U,$$

und daher

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{85}$$

Aus (84) und (85) erhalten wir nun $f'(x_0) = 0$. □

4.2.3. Bemerkung. Proposition 4.2.2 kann bei der Bestimmung der (lokalen) Maxima und Minima einer Funktion sehr hilfreich sein. Ist etwa $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf (a, b) differenzierbar ist, dann muss sie mindestens eine Maximal und mindestens eine Minimalstelle besitzen, siehe Satz 3.4.6. Nach Proposition 4.2.2 können diese Extremstellen nur bei Punkten mit verschwindender Ableitung oder am Rand liegen. Beachte jedoch, dass eine Stelle mit verschwindender Ableitung nicht unbedingt eine (lokale) Extremstelle sein muss. Z.B. hat die Funktion $x \mapsto x^3$ bei $x = 0$ verschwindende Ableitung, aber $x = 0$ ist keine lokale Extremstelle, da die Funktion ja streng monoton wachsend ist.

4.2.4. Beispiel. Es sollen das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f\colon [1, 6] \to \mathbb{R} \qquad f(x) := x^2(x - 4)^2 + 3 \tag{86}$$

bestimmt werden. Die Funktion ist stetig und auf $(1, 6)$ differenzierbar, ihre Ableitung ist durch $f'(x) = 2\big(x(x-4)^2 + x^2(x-4)\big)$ gegeben. Die Ableitung hat daher drei Nullstellen

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 2 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 4.$$

Die Extremstellen von (86) können daher nur bei den Punkten $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 4$ oder bei den Randpunkten 1 und 6 liegen, vgl. Bemerkung 4.2.3. Da

$$f(1) = 12, \quad f(2) = 19, \quad f(4) = 3 \quad \text{und} \quad f(6) = 147$$

nimmt die Funktion (86) ihr Maximum nur bei $x = 6$ an, und ihr einziges Minimum liegt bei $x = 4$. Das Maximum von (86) ist daher $f(6) = 147$, das Minimum $f(4) = 3$.

4.2.5. Satz (Satz von Rolle). *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$, und f auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. O.B.d.A. sei f nicht konstant. Nach Satz 3.4.6 nimmt f auf $[a,b]$ ihr Maximum und auch ihr Minimum an. Da $f(a) = f(b)$, muss eines dieser beiden Extrema in (a,b) angenommen werden. Es existiert daher $\xi \in (a,b)$, sodass f bei ξ ein lokales Extremum besitzt. Nach Proposition 4.2.2 gilt daher $f'(\xi) = 0$. $\square$

4.2.6. Satz (Mittelwertsatz). *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Dann ist $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiters gilt $h(a) = f(a) = h(b)$. Nach Satz 4.2.5 existiert daher $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Da

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad x \in (a,b)$$

erhalten wir also $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

4.2.7. Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen die beide auf (a,b) differenzierbar sind, dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$

Gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und daher

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.2.6 folgt dies in dem wir Satz 4.2.5 auf die Funktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) := \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$ anwenden. $\square$

4.2.8. Korollar. *Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = 0$, d.h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Seien dazu $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$. Nach Satz 4.2.6 existiert $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi).$$

Da $f'(\xi)=0$ folgt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$, also $f(y)=f(x)$. Damit ist f konstant. $\square$

4.2.9. Korollar. *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f'=g'$, d.h. $f'(x)=g'(x)$ für alle $x\in(a,b)$. Dann existiert eine Konstante $c\in\mathbb{R}$ mit $f=g+c$, d.h. $f(x)=g(x)+c$ für alle $x\in(a,b)$.*

Beweis. Betrachte die Funktion $h:=f-g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$. Dann gilt $h'=f'-g'=0$. Nach Korollar 4.2.8 ist daher h konstant, d.h. es existiert $c\in\mathbb{R}$ mit $h(x)=c$ für alle $x\in(a,b)$. Es folgt sofort $f=g+c$. $\square$

4.2.10. Bemerkung. Beachte, dass Korollar 4.2.8 sowie auch Korollar 4.2.9 für Funktionen die auf beliebigen offenen Mengen $U\subseteq\mathbb{R}$ definiert sind, i.A. nicht richtig bleiben. Betrachte etwa die Funktion $f\colon (0,1)\cup(2,3)\to\mathbb{R}$ die durch $f|_{(0,1)}=5$ und $f|_{(2,3)}=6$ gegeben ist. Dann ist zwar $f'=0$, aber die Funktion f ist nicht konstant, bloß lokal konstant.

4.2.11. Proposition. *Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

a) *Ist $f'>0$ auf (a,b), dann wächst f streng monoton.*
b) *Ist $f'<0$ auf (a,b), dann fällt f streng monoton.*
c) *Es ist $f'\geq 0$ auf (a,b) genau dann, wenn f monoton wächst.*
d) *Es ist $f'\leq 0$ auf (a,b) genau dann, wenn f monoton fällt.*

Beweis. Ad (a): Sei also $f'(x)>0$ für alle $x\in(a,b)$. Es ist zu zeigen, dass f streng monoton wächst. Seien dazu $x,y\in(a,b)$ mit $x<y$. Nach Satz 4.2.6 existiert $\xi\in(x,y)$ mit

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\xi).$$

Da $f'(\xi)>0$ folgt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$, also $f(y)>f(x)$. Damit ist f streng monoton wachsend. (b) kann analog bewiesen werden, oder man wendet (a) auf $-f$ an. Ad (c): Ist $f'\geq 0$, dann zeigt das Argument von oben, dass f monoton wachsend ist. Sei nun umgekehrt f monoton wachsend. Dann gilt $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ für alle $x,x_0\in(a,b)$, $x\neq x_0$. Nach Proposition 3.8.25 ist dann $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. (d) kann analog gezeigt werden, oder man wendet (c) auf $-f$ an. $\square$

4.2.12. Bemerkung. Ist $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, dann muss nicht unbedingt $f'>0$ sein. Z.B. ist die Funktion $x\mapsto x^3$ streng monoton wachsend, obwohl ihre Ableitung im Punkt $x=0$ verschwindet..

4.2.13. Bemerkung. Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton wachsend bzw. fallend genau dann, wenn f auf (a,b) (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist. Analoges gilt für beliebige allgemeine Intervalle. Daher liefert Proposition 4.2.11 Monotoniekriterien für Funktionen die auf beliebigen allgemeinen Intervallen definiert sind.

4.2.14. Definition. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *zweimal differenzierbar,* falls sie differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'\colon U \to \mathbb{R}$ selbst wieder differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$\frac{d^2 f}{dx^2} := \frac{d^2}{dx^2} f := f^{(2)} := f'' := (f')'\colon U \to \mathbb{R}$$

die *zweite Ableitung* von f. Rekursiv definiert man nun: Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *n-mal differenzierbar,* falls sie differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'\colon U \to \mathbb{R}$ wieder $(n-1)$-mal differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{d^n f}{dx^n} := \frac{d^n}{dx^n} f := f^{(n)} := (f')^{(n-1)}\colon U \to \mathbb{R}$$

die *n-te Ableitung von f.* Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *beliebig oft differenzierbar,* falls sie n-mal differenzierbar ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. wenn alle Ableitungen existieren.

4.2.15. Beispiel. Jedes Polynom ist beliebig oft differenzierbar. Dies folgt aus Beispiel 4.1.10 und der Tatsache, dass die Ableitung eines Polynoms wieder ein Polynom ist. Aus dem selben Grund ist auch jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar.

4.2.16. Lemma. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar.*

a) *Ist $f'(x_0) > 0$, dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$, und $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U \cap (x_0-\varepsilon, x_0)$.*
b) *Ist $f'(x_0) < 0$, dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in U \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$, und $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in U \cap (x_0-\varepsilon, x_0)$.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung, für die zweite betrachte $-f$. Sei also

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad \text{für alle } x \in U \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon).$$

Damit ist das Lemma auch schon bewiesen. □

4.2.17. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) = 0$. Weiters existiere $f''(x_0)$.*

a) *Gilt $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Minimum von f.*
b) *Gilt $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum von f.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung, für die zweite betrachte $-f$. Wenden wir Lemma 4.2.16 auf die Funktion f' an, dann erhalten wir $\varepsilon > 0$, sodass $f'(x) > f'(x_0) = 0$ für alle $x \in U \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$ und $f'(x) < f'(x_0) = 0$ für alle $x \in U \cap (x_0-\varepsilon, x_0)$. Durch Verkleinern von ε dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq U$ gilt. Also ist f' auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ strikt positiv, und auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ strikt negativ. Nach Proposition 4.2.11 und Bemerkung 4.2.13 ist daher f auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton wachsend, und auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton fallend. Also muss x_0 ein lokales Minimum von f sein. $\square$

4.2.18. Bemerkung. Proposition 4.2.17 liefert nur hinreichende, nicht aber notwendige, Kriterien für lokale Extrema. Z.B. hat die Funktion $x \mapsto x^4$ bei $x = 0$ ein (lokales) Minimum, obwohl $f''(0) = 0$.

4.2.19. Beispiel. Es sollen Maximum und Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1} + 2 = (x^2+1)^{-1} + 2$$

bestimmt werden. Für die Ableitung gilt $f'(x) = -(x^2+1)^{-2}2x$. Die einzige Nullstelle von f' liegt daher bei $x = 0$. Da $f''(x) = 2(x^2+1)^{-3}4x^2 - 2(x^2+1)^{-2}$, ist $f''(0) = -2 < 0$, also muss die Funktion f bei $x = 0$ ein lokales Maximum besitzen, siehe Proposition 4.2.17. Offensichtlich ist $f'(x) < 0$ für alle $x > 0$, und $f'(x) > 0$ für alle $x < 0$. Nach Proposition 4.2.11 ist daher f auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend, und auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend. Also nimmt die Funktion f im Punkt $x = 0$ ihr globales Maximum an, das Maximum von f ist daher $f(0) = 3$. Wir sehen aus diesen Überlegungen aber auch, dass f ihr Minimum nicht annimmt. Weiters ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2,$$

woraus wir $\inf f(\mathbb{R}) = 2$ schließen.

4.3. Folgen differenzierbarer Funktionen. Wir haben bis jetzt nur die Ableitung von rationalen Funktionen bestimmt, siehe Beispiel 4.1.10. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass jede durch eine konvergente Potenzreihe gegebene Funktion differenzierbar ist, und ihre Ableitung wieder durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird, siehe Satz 4.3.5 und Korollar 4.3.6. Wir beginnen mit folgendem

4.3.1. Satz. *Es sei $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen und $x_0 \in (a,b)$. Weiters konvergiere die Folge $f_n(x_0)$, und die Funktionenfolge $f_n'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, diese Funktion f ist differenzierbar, und es gilt $f' = g$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Funktionenfolge (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.5.6 ist $(f_n(x_0))$ eine Cauchyfolge. Nach Satz 3.2.15 ist (f_n') eine gleichmäßige Cauchyfolge. Es existiert daher $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigl|f_n(x_0) - f_m(x_0)\bigr| \le \varepsilon/2 \qquad \text{für alle } n, m \ge n_0,$$

und

$$\|f_n' - f_m'\|_{(a,b)} \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{für alle } n, m \ge n_0. \tag{87}$$

Sind $x, y \in (a, b)$, $y < x$, dann existiert nach Satz 4.2.6 $\xi \in (y, x)$ mit

$$\frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)}{x - y} = (f_n - f_m)'(\xi).$$

Zusammen mit (87) erhalten wir:

$$\big|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - y| \qquad \forall x, y \in (a, b)\ \forall n, m \geq n_0 \quad (88)$$

Daraus erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |(f_n - f_m)(x)| &= \big|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0) + (f_n - f_m)(x_0)\big| \\ &\leq \big|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)\big| + \big|(f_n - f_m)(x_0)\big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in (a, b)$ und alle $n, m \geq n_0$. Also bildet (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge. Nach Satz 3.2.15 konvergiert daher (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$.

Es ist noch zu zeigen, dass f differenzierbar ist und, dass $f' = g$ gilt. Fixiere dazu $y \in (a, b)$. Betrachte die Folge von Funktionen $(\tilde{f}_n)$ gegeben durch:

$$\tilde{f}_n\colon (a, b) \to \mathbb{R} \qquad \tilde{f}_n(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} & \text{falls } x \neq y \\ f_n'(y) & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Da f_n im Punkt y differenzierbar ist, ist jede der Funktion $\tilde{f}_n$ stetig, siehe Proposition 3.8.17. Offensichtlich konvergiert die Funktionenfolge $(\tilde{f}_n)$ punktweise gegen die Funktion

$$\tilde{f}\colon (a, b) \to \mathbb{R} \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{falls } x \neq y \\ g(y) & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Aus (88) folgt, dass $(\tilde{f}_n)$ eine gleichmäßige Cauchyfolge bildet. Nach Satz 3.2.15 konvergiert daher $(\tilde{f}_n)$ gleichmäßig gegen $\tilde{f}$. Nach Proposition 3.2.5 ist daher $\tilde{f}$ stetig. Nach Proposition 3.8.17 existiert daher der Grenzwert

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{x \to y} \tilde{f}(x) = g(y).$$

Also ist f bei y differenzierbar und es gilt $f'(y) = g(y)$. □

4.3.2. Bemerkung. Eine leicht Abschwächung von Satz 4.3.1 lautet: Ist $f_n\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen die punktweise gegen eine Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ konvergiert, und konvergiert die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig gegen eine Funktion g, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen

f, f ist differenzierbar, und es gilt $f' = g$. Dies kann auch wie folgt formuliert werden:

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Es darf daher der Grenzwert mit dem Bilden der Ableitung vertauscht werden. Es sei nochmals betont, dass dies i.A. falsch wird, wenn die Folge der Ableitungen (f_n') nicht gleichmäßig konvergiert, die Funktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ wird dann i.A. nicht einmal differenzierbar sein.

4.3.3. Korollar. *Es sei $f_k\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen und $x_0 \in (a,b)$. Weiters konvergiere die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k(x_0)$, und die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^\infty f_k'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^\infty f_k$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, diese Funktion f ist differenzierbar, und es gilt $f' = g$.*

Beweis. Betrachte die Folge der Partialsummen

$$s_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad s_n := \sum_{k=0}^n f_k.$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(s_n(x_0))$, und die Funktionenfolge $s_n' = \sum_{k=0}^n f_k'$ konvergiert gleichmäßig gegen g. Nach Satz 4.3.1 konvergiert daher (s_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, f ist differenzierbar und es gilt $f' = g$. Da (s_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k$ gleichmäßig gegen f. □

4.3.4. Bemerkung. Eine leicht Abschwächung von Korollar 4.3.3 lautet: Ist $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$ eine punktweise konvergente Reihe von Funktionen, sodass die Reihe $g = \sum_{k=0}^\infty f_k'$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert auch $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$ gleichmäßig, und es gilt $f' = \sum_{k=0}^\infty f_k'$. Wir können dies auch so schreiben:

$$\Big(\sum_{k=0}^\infty f_k\Big)' = \sum_{k=0}^\infty f_k'.$$

Wieder sei betont, dass hier die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k$ wesentlich ist, ohne diese Voraussetzung wird i.A. die Summenfunktion $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$ nicht einmal differenzierbar sein.

4.3.5. Satz. *Es sei $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Weiters bezeichne*

$$f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f differenzierbar, die durch formales Ableiten bestimmte Potenzreihe $\sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$ hat ebenfalls Konvergenzradius r, *und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad \textit{für alle } x \in (-r, r). \tag{89}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass (89) ebenfalls Konvergenzradius r hat. Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, gilt für den Konvergenzradius r' von (89)

$$1/r' = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1/r,$$

wobei wir $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ verwendet haben, siehe Propostion 2.4.7. Also ist $r = r'$ und damit hat auch die Potenzreihe (89) Konvergenzradius r. Es sei

$$g\colon (-r, r) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \tag{90}$$

die durch diese Potenzreihe definierte Funktion. Sei nun $0 < \rho < r$. Nach Satz 3.2.21 konvergiert die Reihe (90) auf $(-\rho, \rho)$ normal gegen g. Nach Proposition 3.2.18 konvergiert sie daher auf $(-\rho, \rho)$ insbesondere gleichmäßig gegen g. Aus Korollar 4.3.3 folgt nun, dass f auf $(-\rho, \rho)$ differenzierbar ist und dort $f' = g$ gilt. Da $0 < \rho < r$ beliebig war, sehen wir, dass f auf ganz $(-r, r)$ differenzierbar ist, und es gilt $f' = g$. □

4.3.6. Korollar. *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Weiters bezeichne*

$$f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f beliebig oft differenzierbar, die durch formales n-faches Ableiten bestimmte Potenzreihe $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n}$ *hat ebenfalls Konvergenzradius r, und es gilt*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} \qquad \textit{für alle } x \in (-r, r).$$

Insbesondere gilt

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Dies folgt mittels Induktion aus Satz 4.3.5. □

4.3.7. Beispiel. Nach Satz 4.3.5 ist die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$\exp'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Damit ist auch $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\sinh'(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

Ebenso ist $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

Aus der Quotientenregel folgt dann, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\coth\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \\ \coth'(x) &= -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x) \qquad x \neq 0. \end{aligned}$$

4.3.8. Beispiel. Aus der Potenzreihenentwicklung des Sinus folgt mittels Satz 4.3.5, dass die Sinusfunktion differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x). \end{aligned}$$

Ebenso ist $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x) \end{aligned}$$

Aus der Quotientenregel folgt nun, dass der Tangens und der Cotangens differenzierbar sind, und für ihre Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) & x &\in \mathbb{R} \setminus \left(\tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ \cot'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) & x &\in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.4. Mehr über die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Der Schlüssel zur Bestimmung der Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen ist folgender

4.4.1. Satz. *Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Weiters sei f im Punkt $x_0\in(a,b)$ differenzierbar und $f'(x_0)\neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ist $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch f^{-1} differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'\circ f=\frac{1}{f'}\qquad \textit{oder}\qquad (f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

Beweis. Betrachte die Funktion:

$$\tilde f\colon (a,b)\to\mathbb{R},\qquad \tilde f(x):=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{falls } x\neq x_0\\ f'(x_0) & \text{falls } x=x_0\end{cases}$$

Da f im Punkt x_0 differenzierbar ist, ist die Funktion $\tilde f$ stetig, siehe Proposition 3.8.17. Wegen der Monotonie von f, und weil $f'(x_0)\neq 0$, gilt $\tilde f(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Nach Satz 3.3.4 ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig. Daher ist auch die Abbildung $\frac{1}{\tilde f\circ f^{-1}}$, $y\mapsto\frac{1}{\tilde f(f^{-1}(y))}$, stetig. Offensichtlich ist diese durch

$$\frac{1}{\tilde f(f^{-1}(y))}=\begin{cases}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{falls } y\neq f(x_0)\\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{falls } y=f(x_0)\end{cases}$$

gegeben. Da $\frac{1}{\tilde f\circ f^{-1}}$ stetig ist folgt

$$\lim_{y\to f(x_0)}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)}=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{1}{\tilde f\circ f^{-1}}(y)=\frac{1}{\tilde f\circ f^{-1}}(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Also ist f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$. □

4.4.2. Beispiel. Wir bestimmen nun die Ableitung der Logarithmusfunktion $\ln\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$. Die Exponentialfunktion $\exp\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ ist streng monoton wachsend, differenzierbar, und ihre Ableitung $\exp'=\exp$ verschwindet nie. Als Umkehrfunktion der Exponentialabbildung ist der Logarithmus daher differenzierbar und es gilt

$$\ln'(x)=\frac{1}{\exp'(\ln(x))}=\frac{1}{\exp(\ln(x))}=\frac{1}{x},\qquad x\in(0,\infty),$$

siehe Satz 4.4.1. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ hat Konvergenzradius 1, siehe Proposition 2.9.5. Es bezeichne $f\colon (-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, die dadurch definierte Funktion. Nach Satz 4.3.5 ist f differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-x)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\ln(x+1) \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1,1)$. Nach Korollar 4.2.9 existiert daher eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = \ln(x+1)+c$, für alle $x \in (-1,1)$. Da $f(0) = 0$ und $\ln(0+1) = 0$ muss $c = 0$ sein. Wir erhalten also folgende Potenzreihendarstellung des Logarithmus:

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots \qquad |x| < 1. \quad (91)$$

Wir wissen, siehe Satz 2.6.11, dass diese Reihe auch für $x = 1$, nicht aber für $x = -1$, konvergiert. Nach Satz 4.4.3 unten und wegen der Stetigkeit des Logarithmus, folgt, dass die Gleichung (91) für $x = 1$ gültig bleibt, d.h. für die alternierende harmonische Reihe gilt:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots$$

4.4.3. Satz (Abelscher Grenzwertsatz). *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < r < \infty$, und $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die dadurch definierte Funktion. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auch für $x = r$, dann existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to r-} f(x)$ und es gilt*

$$\lim_{x\to r-} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Ebenso gilt: Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auch für $x = -r$, dann existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\to -r+} f(x)$ und es gilt

$$\lim_{k\to -r+} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-r)^k.$$

Beweis. Wir folgen der Darstellung in [**H1**, Kapitel VIII, 65.1], für einen anderen Beweis siehe z.B. [**K1**, Kapitel 15.3]. Wir behandeln nur den Fall, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert, der andere kann leicht darauf zurückgeführt werden. Setze

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k r^k, \qquad s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Es ist zu zeigen $\lim_{x\to r-} f(x) = s$. Da $a_k r^k = s_k - s_{k-1}$, folgt

$$a_k x^k = s_k \cdot (x/r)^k - (x/r) \cdot s_{k-1} \cdot (x/r)^{k-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot (x/r)^k - (x/r) \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} \cdot (x/r)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot (x/r)^k - (x/r) \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot (x/r)^k \\ &= \big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot (x/r)^k \qquad |x| < r. \end{aligned}$$

Weiters ist wegen der Summenformel der geometrischen Reihe

$$s = (1 - x/r) \sum_{k=0}^{\infty} s \cdot (x/r)^k,$$

und daher

$$\begin{aligned} s - f(x) &= \big(1 - x/r\big) \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} s \cdot (x/r)^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot (x/r)^k \bigg) \\ &= \big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{\infty} (s - s_k) \cdot (x/r)^k \qquad |x| < r. \end{aligned} \tag{92}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|s - s_k| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Weiters sei $r > \delta > 0$, sodass $(1 - x/r) \sum_{k=0}^{k_0-1} |s - s_k| < \varepsilon/2$ für alle $x \in (r - \delta, r)$. Für $x \in (r - \delta, r)$ erhalten wir dann aus (92)

$$\begin{aligned} \big|s - f(x)\big| &\leq \big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{\infty} |s - s_k| \cdot (x/r)^k \\ &= \big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{k_0-1} |s - s_k| \cdot (x/r)^k + \big(1 - x/r\big) \sum_{k=k_0}^{\infty} |s - s_k| \cdot (x/r)^k \\ &\leq \big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{k_0-1} |s - s_k| + \big(1 - x/r\big) \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \cdot (x/r)^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\big(1 - x/r\big) \sum_{k=0}^{\infty} (x/r)^k = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Summenformel der geometrischen Reihe verwendet haben. Also gilt $\lim_{x\to r-}(s - f(x)) = 0$ und damit $\lim_{x\to r-} f(x) = s$. □

4.4.4. Beispiel. Wir wollen die Ableitung der Arcustangensfunktion bestimmen. Die Tangensfunktion $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, differenzierbar und ihre Ableitung $\tan' = 1 + \tan^2$ verschwindet nie. Nach

Satz 4.4.1 ist daher die Arcustangensfunktion differenzierbar, und es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Formel $\operatorname{arccot}(x) = \pi/2 - \arctan(x)$, siehe Übungsaufgabe 78, erhalten wir daher auch

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Summenformel für die geometrische Reihe und Satz 4.3.5 liefern

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{für } x \in (-1,1).$$

Nach Korollar 4.2.9 existiert daher eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + c$ für alle $x \in (-1,1)$. Setzen wir $x = 0$ so sehen wir, dass $c = 0$. Wir erhalten also folgende Potenzreihendarstellung des Arcustanges[65]

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \qquad |x| < 1. \tag{93}$$

Nach Satz 2.6.11 konvergiert diese Reihe auch für $x = \pm 1$. Nach Satz 4.4.3 und wegen der Stetigkeit des Arcustanges bleibt die Relation (93) auch für $x = \pm 1$ richtig. Insbesondere gilt

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \cdots$$

4.4.5. Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto x^a = e^{a\ln x}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}e^{a\ln x} = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1} \qquad x > 0.$$

Insbesondere können wir damit jede Wurzelfunktion ableiten

$$\frac{d}{dx}\sqrt[k]{x} = \frac{d}{dx}x^{1/k} = \frac{x^{1/k-1}}{k} = \frac{x^{(1-k)/k}}{k} = \frac{1}{kx^{(k-1)/k}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}} \qquad x > 0.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Binomialkoeffizienten:

$$\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!}, \qquad \binom{a}{0} := 1.$$

[65]Beachte, dass obwohl der Arcustangens auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, diese Potenzreihendarstellung für $|x| > 1$ divergiert.

Beachte, dass für $a \in \mathbb{N}_0$ dies mit den üblichen Binomialkoeffizienten überein stimmt. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\binom{a}{k}\Big/\binom{a}{k+1}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)(k+1)!}{k!a(a-1)(a-2)\cdots(a-(k+1)+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{a-k}\right| = 1.$$

Nach Proposition 2.9.5 hat daher die sogenannte *Binomialreihe* $\sum_{k=0}^\infty \binom{a}{k} x^k$ Konvergenzradius 1, falls $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$.[66] Betrachte die dadurch definierte Funktion

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^\infty \binom{a}{k} x^k.$$

Nach Satz 4.3.5 ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^\infty \binom{a}{k} x^k = \sum_{k=1}^\infty \binom{a}{k} k x^{k-1} = a\sum_{k=1}^\infty \binom{a-1}{k-1} x^{k-1} = a\sum_{k=0}^\infty \binom{a-1}{k} x^k \qquad |x|<1$$

wobei wir die leicht einsehbare Beziehung $k\binom{a}{k} = a\binom{a-1}{k-1}$ verwendet haben. Daraus erhalten wir nun

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= a\sum_{k=0}^\infty \binom{a-1}{k} x^k + a\sum_{k=0}^\infty \binom{a-1}{k} x^{k+1}\\ &= a\binom{a-1}{0}x^0 + a\sum_{k=1}^\infty \binom{a-1}{k} x^k + a\sum_{k=1}^\infty \binom{a-1}{k-1} x^k\\ &= a + a\sum_{k=1}^\infty \left\{\binom{a-1}{k} + \binom{a-1}{k-1}\right\} x^k\\ &= a\binom{a}{0}x^0 + a\sum_{k=1}^\infty \binom{a}{k} x^k = a\sum_{k=0}^\infty \binom{a}{k} x^k = af(x) \qquad |x|<1\end{aligned}$$

wobei wir die leicht zu verifizierende Relation $\binom{a-1}{k} + \binom{a-1}{k-1} = \binom{a}{k}$ verwendet haben. Betrachte nun die Funktion $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x)(1+x)^{-a}$. Dann gilt wegen obiger Rechnung

$$g'(x) = f'(x)(1+x)^{-a} - af(x)(1+x)^{-a-1} = f'(x)(1+x)^{-a} - (1+x)f'(x)(1+x)^{-a-1} = 0.$$

[66] Für $a \in \mathbb{N}_0$ ist dies eine endliche Reihe, hat also Konvergenzradius ∞.

Nach Korollar 4.2.8 muss die Funktion g daher konstant sein. Da offensichtlich $g(0) = 1$, ist $g(x) = 1$, und damit $f(x) = (1+x)^a$, für alle $x \in (-1, 1)$. Wir erhalten damit folgende Potenzreihendarstellung[67]

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad |x| < 1,\ a \in \mathbb{R}. \tag{94}$$

Für $k = 1/2$ etwa gilt

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{1-2k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k) 4^k k! k!}$$

und wir erhalten aus (94) folgende Potenzreihendarstellung der Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! x^k}{(1-2k) 4^k k! k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{(-1)^k x^k}{1-2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^4}{7} \pm \cdots \qquad |x| < 1. \end{aligned} \tag{95}$$

Für $a = -1/2$ ist

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k k! k!}$$

und wir erhalten aus (94) die Potenzreihendarstellung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! x^k}{4^k k! k!} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \cdots \qquad |x| < 1 \end{aligned} \tag{96}$$

Wir hätten (96) übrigens auch durch Ableiten von (95) erhalten können.

4.4.6. Beispiel. Wir wollen nun die Ableitung des Arcussinus bestimmen. Der Sinus ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend, differenzierbar und seine Ableitung $\sin' = \cos$ verschwindet auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Nach Satz 4.4.1 ist daher die Arcussinusfunktion auf dem Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1. \end{aligned}$$

[67]Für $a \in \mathbb{N}_0$ ist die Reihe endlich und die Formel spezialisiert sich zum Binomischen Lehrsatz.

Da $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$, siehe Übungsaufgabe 78, erhalten wir daraus auch

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1.$$

Setzen wir in (96) für x nun $-x^2$ ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!(-x^2)^k}{4^k k!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!x^{2k}}{4^k k!k!} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)4^k k!k!}$$

Nach Korollar 4.2.9 existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)4^k k!k!} + c$ für alle $x \in (-1, 1)$. Betrachten wir $x = 0$ so folgt $c = 0$. Insgesamt erhalten wir folgende Potenzreihendarstellung des Arcussinus:

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)4^k k!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad |x| < 1. \tag{97}$$

Diese Reihe konvergiert auch für $x = \pm 1$. Um dies einzusehen betrachte die Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)4^k k!k!}$. Für $x \in (0, 1)$ ist dann $(s_n(x))$ eine in n monoton wachsende Folge und es gilt $s_n(x) \leq \arcsin(x) \leq \arcsin(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (0, 1)$. Es folgt $s_n(1) = \lim_{x \to 1-} s_n(x) \leq \arcsin(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $(s_n(1))$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Nach Proposition 2.2.2 konvergiert die Folge $(s_n(1))$. Damit konvergiert also die Reihe (97) auch bei $x = 1$. Daraus folgt nun sofort, dass die Reihe auch bei $x = -1$ konvergiert. Nach Satz 4.4.3 und wegen der Stetigkeit des Arcussinus erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi/2 = \arcsin(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+1)4^k k!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \cdots \end{aligned}$$

4.5. Konvexität und Wendepunkte.

4.5.1. Definition. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* falls für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ gilt:

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \tag{98}$$

Sie heißt *strikt konvex* falls in (98) stets strikte Ungleichheit gilt. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konkav* falls

$$f(x_2) \geq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Sie heißt *strikt konkav* hier stets strikte Ungleichheit gilt.

4.5.2. Bemerkung. Für $x_1 \neq x_3$ ist der Graph der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

eine Gerade durch die beiden Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$. Daher ist eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ (strikt) konvex genau dann, wenn für je zwei Punkte $x_1 \neq x_3 \in I$ der Graph von f (strikt) unterhalb der Verbindungsstrecke zwischen $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$ liegt. Analog ist f (strikt) konkav genau dann, wenn für je zwei Punkte $x_1 \neq x_3 \in I$ der Graph von f (strikt) über der Verbindungsstrecke zwischen $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$ liegt.

4.5.3. Bemerkung. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist (strikt) konvex genau dann wenn $-f$ (strikt) konkav ist.

4.5.4. Beispiel. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist konvex aber nicht strikt konvex. Konvexe Funktionen müssen also nicht differenzierbar sein. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist strikt konvex.

4.5.5. Lemma. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{99}$$

für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Sie ist genau dann strikt konvex, wenn hier stets strikte Ungleichheit gilt. Eine analoge Aussage gilt für (strikt) konkave Funktionen.

Beweis. Nach Definition ist f konvex genau dann, wenn für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$, gilt

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $x_3 - x_1 > 0$, so erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$(x_3 - x_1) f(x_2) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3).$$

Schreiben wir $(x_3 - x_1) f(x_2) = (x_3 - x_2) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_2)$ so sehen wir, dass dies zu

$$(x_3 - x_2)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq (x_2 - x_1)\big(f(x_3) - f(x_2)\big)$$

äquivalent ist. Divison durch $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) > 0$ liefert dann die Äquivalenz mit (99). Die entsprechende Aussage für (strikt) konkave Funktionen lässt sich ganz ähnlich zeigen, man erhält sie aber auch durch Übergang zu $-f$, vgl. Bemerkung 4.5.3. $\square$

4.5.6. Definition. Ist I ein allgemeines Intervall, so bezeichnen wir mit $\mathring{I}$ das Intervall I ohne seine eventuell vorhandenen Randpunkte. $\mathring{I}$ ist ein offenes Intervall und wird das *Innere* von I genannt.

4.5.7. Beispiel. Für $I = (a, b)$ ist $\mathring{I} = I$. Für $I = [a, b]$ ist $\mathring{I} = (a, b)$. Für $I = [a, b)$ ist $\mathring{I} = (a, b)$. Für $I = [a, \infty)$ ist $\mathring{I} = (a, \infty)$. Für $I = (a, \infty)$ ist $\mathring{I} = I$. Für $I = \mathbb{R}$ gilt ebenfalls $\mathring{I} = I$.

4.5.8. Proposition. *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann gilt:*

a) *f ist konvex genau dann, wenn $f' : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ monoton wächst.*
b) *f ist strikt konvex genau dann, wenn $f' : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ streng monoton wächst.*
c) *f ist konkav genau dann, wenn $f' : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ monoton fällt.*
d) *f ist strikt konkav genau dann, wenn $f' : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ streng monoton fällt.*

Beweis. Ad (a): Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung einer konvexen Funktion monoton wächst. Seien dazu $x_1, x_3 \in \mathring{I}$ mit $x_1 < x_3$. Aus Lemma 4.5.5 erhalten wir

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1+} \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

sowie

$$f'(x_3) = \lim_{x \to x_3-} \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} \geq \lim_{x \to x_3-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Also gilt $f'(x_1) \leq f'(x_3)$, und damit wächst f' monoton. Sei nun umgekehrt f' monoton wachsend, und $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Nach Satz 4.2.6 existieren $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Da f' monoton wächst, und weil $\xi_1 < \xi_2$, ist $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, und wir erhalten

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{100}$$

Dies Ungleichung gilt für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Nach Lemma 4.5.5 ist daher f konvex. Damit ist (a) gezeigt. Ad (b): Ist f' streng monoton wachsend, so erhalten wir in (100) strikte Ungleichheit, und mittels Lemma 4.5.5 folgt dann, dass f strikt konvex ist. Ist umgekehrt f strikt konvex, dann muss f' nach (a) monoton wachsen. Wäre f' nicht streng monoton wachsend, dann fänden wir zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathring{I}$, sodass f' auf $[x_1, x_2]$ konstant ist. Nach Satz 4.2.6 wäre dann f auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ linear, genauer $f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ für alle $x \in [x_1, x_2]$, und damit nicht strikt konvex, ein Widerspruch. Also muss f' tatsächlich streng monton wachsen, womit nun auch (b) gezeigt ist. Die Aussagen (c) und (d) folgen nun aus den ersten beiden, da f (strikt) konvex ist genau dann, wenn $-f$ (strikt) konkav ist, und f' (streng) monoton wachsend ist genau dann, wenn $-f'$ (streng) monoton fallend ist, vgl. Bemerkung 4.5.3. □

4.5.9. Satz. *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf $\mathring{I}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:*

a) *f ist konvex genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf $\mathring{I}$.*
b) *Ist $f'' > 0$ auf $\mathring{I}$, dann ist f strikt konvex.*
c) *f ist konkav genau dann, wenn $f'' \leq 0$ auf $\mathring{I}$.*
d) *Ist $f'' < 0$ auf $\mathring{I}$, dann ist f strikt konkav.*

Beweis. Ad (a): Nach Propostion 4.5.8(a) ist f konvex genau dann wenn f' monoton wächst. Nach Proposition 4.2.11(c) ist dies genau dann der Fall wenn $f'' \geq 0$ auf $\mathring{I}$. Ad (b): Ist $f'' > 0$ auf $\mathring{I}$, dann ist nach Proposition 4.2.11(a) f' auf $\mathring{I}$ streng monoton wachsend und daher f strikt konvex, siehe Proposition 4.5.8(b). Die Behauptungen (c) und (d) folgen durch Anwendung der ersten beiden Aussagen auf $-f$, vgl. Bemerkung 4.5.3. □

4.5.10. Bemerkung. Beachte, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, strikt konvex ist, obwohl $f''(0) = 0$. Die Bedingung in Satz 4.5.9(b) ist also nur eine hinreichende, nicht aber notwendige Bedingung für strikte Konvexität.

4.5.11. Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, ist strikt konvex, denn $\exp''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$, ist strikt konkav, denn $\ln''(x) = -x^{-2} < 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

4.5.12. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ein Punkt $x_0 \in U$ heißt *Wendepunkt* von f falls $\varepsilon > 0$ existiert, sodass eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

a) f ist auf $U \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und auf $U \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav.
b) f ist auf $U \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und auf $U \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ konvex.

4.5.13. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Ein Punkt $x_0 \in U$ ist Wendepunkt von f genau dann, wenn $\varepsilon > 0$ existiert, sodass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) *$f'' \geq 0$ auf $U \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'' \leq 0$ auf $U \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$.*
b) *$f'' \leq 0$ auf $U \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'' \geq 0$ auf $U \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$.*

In diesem Fall gilt $f''(x_0) = 0$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Satz 4.5.9. Ist nun x_0 ein Wendepunkt von f, dann muss x_0 ein lokales Extremum von f' sein, siehe Proposition 4.5.8. Nach Proposition 4.2.2 ist daher $f''(x_0) = 0$. □

4.5.14. Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, ist strikt konvex, hat also keinen Wendepunkt, obwohl $f''(0) = 0$. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ in Proposition 4.5.13 ist daher nur eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt.

4.5.15. Proposition. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar, und $x_0 \in U$ mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 ein Wendepunkt von f.*

Beweis. O.B.d.A. sei $f'''(x_0) > 0$, der andere Fall kann analog behandelt werden. Nach Lemma 4.2.16 existiert $\varepsilon > 0$, sodass $f''(x) > f''(x_0) = 0$ auf $U \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$ und $f''(x) < f''(x_0) = 0$ auf $U \cap (x_0-\varepsilon, x_0)$. Nach Proposition 4.5.13 hat daher f bei x_0 einen Wendepunkt. $\square$

4.5.16. Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^5$, hat bei $x_0 = 0$ einen Wendepunkt, obwohl $f'''(0) = 0$. Die Bedingung in Proposition 4.5.15 ist daher nur eine hinreichende, nicht aber notwendige Bedingung für einen Wendepunkt.

4.5.17. Beispiel. Wir bestimmen alle Wendepunkte der Sinusfunktion. Da die Sinusfunktion hinreichend differenzierbar ist, können ihre Wendepunkte nur bei Nullstellen der zweiten Ableitung liegen, siehe Proposition 4.5.13. Da $\sin''(x) = -\sin(x)$ sind die Punkte wo die zweite Ableitung der Sinusfunktion verschwindet genau die Nullstellen der Sinusfunktion, d.h. $\pi\mathbb{Z}$, siehe Proposition 3.6.4. Da $\sin'''(x) = -\cos(x)$, und da der Cosinus auf $\pi\mathbb{Z}$ nie verschwindet, folgt aus Proposition 4.5.15, dass jeder dieser Punkte tatsächlich ein Wendepunkt ist. Also stimmt die Menge der Wendepunkte der Sinusfunktion mit $\pi\mathbb{Z}$ überein.

Wir wollen nun die Konvexität verwenden um einige zentrale Ungleichungen herzuleiten, siehe Proposition 4.5.20, Proposition 4.5.22 und Proposition 4.5.24 unten. Wir beginnen mit

4.5.18. Lemma. *Es sei I ein allgemeines Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für je zwei Punkte $y_1, y_2 \in I$ und jedes $0 < \lambda < 1$*

$$f\big(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2). \tag{101}$$

Ist f strikt konvex, dann tritt hier Gleichheit nur ein, wenn $y_1 = y_2$. Eine analoge Aussage gilt für (strikt) konkave Funktionen.

Beweis. Sei also f konvex, $y_1, y_2 \in I$ und $0 < \lambda < 1$. O.B.d.A. sei $y_1 < y_2$. Setze $y := \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$. Dann gilt $y_1 < y < y_2$, und wegen der Konvexität von f daher

$$f(y) \leq \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(y_2). \tag{102}$$

Da offensichtlich $\frac{y_2-y}{y_2-y_1} = \lambda$ und $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = 1-\lambda$ folgt (101). Ist f strikt konvex, dann gilt in (102), und daher auch in (101), strikte Ungleichheit. $\square$

4.5.19. Lemma (Jensensche Ungleichung). *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$, sodass $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Dann gilt:*

$$f\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\big) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \tag{103}$$

Ist f strikt konvex, dann kann hier Gleichheit nur eintreten, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Eine entsprechende Aussage gilt für (strikt) konkave Funktionen.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise richtig. Für $n = 2$ ist dies die Aussage von Lemma 4.5.18. Nun aber zum Induktionsschritt von n auf $n+1$. Seien also $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} > 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Setze:

$$\begin{aligned} \lambda &:= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ y_1 &:= \tfrac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \tfrac{\lambda_2}{\lambda} x_2 + \dots + \tfrac{\lambda_n}{\lambda} x_n \\ y_2 &:= x_{n+1} \end{aligned}$$

Dann gilt $0 < \lambda < 1$ sowie $y_1 \in I$ und $y_2 \in I$. Aus Lemma 4.5.18 folgt daher

$$f\big(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\big) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2). \tag{104}$$

Da $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} = 1$, liefert die Induktionsvoraussetzung

$$f(y_1) = f\Big(\tfrac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \tfrac{\lambda_2}{\lambda} x_2 + \dots + \tfrac{\lambda_n}{\lambda} x_n\Big) \leq \tfrac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \tfrac{\lambda_2}{\lambda} f(x_2) + \dots + \tfrac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n) \tag{105}$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen ergibt nun (103):

$$\begin{aligned} f\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\big) &= f\big(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\big) \\ &\leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Tritt in (103) Gleichheit ein, dann muss sowohl in (104) als auch in (105) Gleichheit gelten. In diesem Fall folgt aus der Induktionsvoraussetzung $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, und aus Lemma 4.5.18 erhalten wir $y_1 = y_2$. Dies liefert sofort $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und das Lemma gezeigt. □

4.5.20. Proposition. *Es seien* $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ *und* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ *mit* $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. *Dann gilt*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Gleichheit kann hier nur eintreten, falls $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis. Nach Beispiel 4.5.11 ist der Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ strikt konkav. Nach Lemma 4.5.19 gilt daher

$$\ln\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n\big) \geq \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2) + \dots + \lambda_n \ln(x_n).$$

Anwendung der (streng monoton wachsenden) Exponentialfunktion liefert sofort die gewünschte Ungleichung. Nach Lemma 4.5.19, und weil die Exponentialfunktion injektiv ist, kann Gleichheit nur eintreten wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. □

4.5.21. Bemerkung. Als Spezialfall, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, von Proposition 4.5.20 erhalten wir folgende Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \tfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \qquad x_1, \dots, x_n > 0.$$

Wieder kann Gleichheit nur eintreten, falls $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Für Vektoren $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiert man die p-Norm, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, durch

$$\|z\|_p := \Big(|z_1|^p + |z_2|^p + \cdots + |z_p|^p\Big)^{1/p}$$

Für $p = 2$ liefert dies den üblichen Euklidischen Abstand zu $0 \in \mathbb{C}^n$.

4.5.22. Proposition (Höldersche Ungleichung). *Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $z, w \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ so gilt*

$$|z_1 w_1| + |z_2 w_2| + \cdots + |z_n w_n| \leq \|z\|_p \cdot \|w\|_q$$

Beweis. O.B.d.A. seien $z \neq 0$ und $w \neq 0$. Dann ist $\|z\|_p \neq 0$ und $\|w\|_q \neq 0$. Wenden wir Proposition 4.5.20 mit $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ an, so erhalten wir

$$\frac{|z_k w_k|}{\|z\|_p \|w\|_q} = \left(\frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p}\right)^{1/p} \left(\frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p}\frac{|z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|w_k|^q}{\|w\|_q^q}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Summation über k liefert dann

$$\sum_{k=1}^n \frac{|z_k w_k|}{\|z\|_p \|w\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^n |z_k|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^n |w_k|^q}{\|w\|_q^q} = \frac{1}{p}\frac{\|z\|_p^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\|w\|_q^q}{\|w\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und damit die gewünschte Ungleichung. □

4.5.23. Bemerkung. Als Spezialfall von Proposition 4.5.22, $p = q = 2$, erhalten wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\Big|\sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k\Big| \leq \|z\|_2 \cdot \|w\|_2, \qquad z, w \in \mathbb{C}^n.$$

4.5.24. Proposition (Minkowski Ungleichung). *Für $p \geq 1$ und $z, w \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$.*

Beweis. Der Fall $p = 1$ folgt sofort aus der Dreiecksungleichung. Sei also o.B.d.A. $p > 1$. Mit $q := \frac{p}{p-1}$ gilt dann auch $q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiters dürfen wir o.B.d.A. $z + w \neq 0$ und damit $\|z + w\|_p \neq 0$ annehmen. Aus

$$|z_k + w_k|^p = |z_k + w_k||z_k + w_k|^{p-1} \leq |z_k||z_k + w_k|^{p-1} + |w_k||z_k + w_k|^{p-1}$$

erhalten wir

$$\|z + w\|_p^p = \sum_{k=1}^n |z_k + w_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |z_k||z_k + w_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |w_k||z_k + w_k|^{p-1}$$

Zusammen mit Proposition 4.5.22 gibt dies

$$\begin{aligned}\|z + w\|_p^p &\leq \|z\|_p \Big(\sum_{k=1}^n |z_k + w_k|^{q(p-1)}\Big)^{1/q} + \|w\|_p \Big(\sum_{k=1}^n |z_k + w_k|^{q(p-1)}\Big)^{1/q} \\ &= \big(\|z\|_p + \|w\|_p\big)\Big(\sum_{k=1}^n |z_k + w_k|^p\Big)^{(p-1)/p} = \big(\|z\|_p + \|w\|_p\big)\|z + w\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

Division durch $\|z+w\|_p^{p-1}$ liefert nun die gewünschte Ungleichung. $\square$

4.5.25. Bemerkung. Damit hat die p-Norm auf $\mathbb{C}^n$, $p \geq 1$, die folgenden Eigenschaften, $z, w \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

a) $\|z\|_p \geq 0$, und $\|z\|_p = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
b) $\|\lambda z\|_p = |\lambda|\|z\|_p$.
c) $\|z+w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$.

Vergleiche dies mit Proposition 1.8.9, Proposition 1.10.4 und Proposition 3.2.9.

4.6. Die Regel von de l'Hospital. Die Regel von de l'Hospital, siehe Satz 4.6.1 unten, bietet eine Möglichkeit die Grenzwerte von unbestimmten Formen der Art $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auszurechnen.

4.6.1. Satz. *Es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Weiters gelte eine der folgenden Bedingungen:*

a) $\lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)$.
b) $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$.

Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt auch für $x \to b-$, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Beweis. Wir behandelen nur den Fall indem (a) gilt. Dann können wir die Funktionen f und g als stetige Funktionen $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ auffassen, $f(a) = g(a) = 0$. Zu jedem $x \in (a,b)$ existiert dann nach Satz 4.2.7 ein $\xi_x \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Offensichtlich gilt $\lim_{x\to a+} \xi_x = a$ und daher

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweise für den Fall, dass (b) gilt, sind nicht sehr schwer und finden sich in jedem Analysis Lehrbuch, siehe etwa [**H1**, Kapitel 50], [**K1**, Kapitel 9.4] oder [**M1**, Kapitel 3 §2.4]. $\square$

4.6.2. Beispiel. Da $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = \lim_{x\to\infty} x$, erhalten wir aus Satz 4.6.1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty,$$

vgl. (83) in Beispiel 3.10.9. Da $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} x$, folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Da $\lim_{x\to 0+}\ln(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty$, erhalten wir

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0. \tag{106}$$

Beachte, dass wir im letzten Beispiel die unbestimmte Form $0\cdot(-\infty)$ in eine unbestimmte Form $\frac{-\infty}{\infty}$ umschreiben mussten, bevor wir die Regel von de l'Hospital anwenden konnten. Aus (106) erhalten wir übrigens auch

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+}\exp(x\ln x) = \exp\bigl(\lim_{x\to 0+} x\ln(x)\bigr) = \exp(0) = 1. \tag{107}$$

4.6.3. Beispiel. Machmal führt mehrmaliges Anwenden von Satz 4.6.1 zum Ziel. Etwa erhalten wir durch zweimaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty,$$

oder

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{4\cos(2x)} = 1/4,$$

und auch

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0.$$

Manchmal können unbestimmte Formen der Art $\infty-\infty$ so ungeschrieben werden, dass sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital berechenbar werden, etwa

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\Bigr) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0.\end{aligned}$$

4.7. Taylorreihen.

4.7.1. Definition. Es sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Das Polynom

$$\begin{aligned}T_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

wird das n-te *Taylorpolynom* von f um x_0 genannt. Ist f beliebig oft differenzierbar, dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

die *Taylorreihe* von f um x_0.

Wir wollen nun untersuchen wie gut eine Funktion f durch ihre Taylorpolynome approximiert werden kann, beziehungsweise unter welchen Voraussetzungen die Taylorreihe von f gegen die Funktion f konvergiert.

4.7.2. Bemerkung. Bezeichnet T_n das n-ten Tayorpolynoms um x_0 einer n-mal differenzierbaren Funktion f, dann gilt jedenfalls $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $0 \leq k \leq n$. D.h. die Ableitungen des Taylorpolynoms bei x_0 stimmen mit den Ableitungen von f bei x_0 bis zur Ordnung n überein.

4.7.3. Bemerkung. Es sei f beliebig oft differenzierbar. Hat ihre Taylorreihe um x_0 positiven Konvergenzradius $r > 0$, dann definiert

$$T : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}, \qquad T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit $T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, siehe Korollar 4.3.6. I.A. wird die Funktion T jedoch nicht mit der ursprünglichen Funktion f übereinstimmen, siehe Beispiel 4.7.12 unten.

4.7.4. Satz (Taylor). *Es sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Dann existiert für jedes $x \in I$, $x \neq x_0$, mindestens ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Sei also $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\rho.$$

Betrachte nun die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\rho.$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F(x_0) = 0 = F(x)$. Nach Satz 4.2.5 existiert daher ξ zwischen x und x_0 mit $F'(\xi) = 0$. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}\rho \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!}\rho \end{aligned}$$

Aus $F'(\xi) = 0$ folgt also $\rho = f^{(n+1)}(\xi)$. □

4.7.5. Bemerkung. Der Fall $n = 0$ in Satz 4.7.4 ist gerade der Mittelwertsatz, siehe Satz 4.2.6. Der Taylorsche Satz kann daher als Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes aufgefasst werden.

4.7.6. Bemerkung. Satz 4.7.4 kann auch wie folgt formuliert werden. Es sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Dann existiert zu jedem $x \in I$, $x_0 \neq x$, ein $0 < \vartheta < 1$, sodass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

4.7.7. Bemerkung. Die Funktion

$$R_{n+1}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - T_n(x)$$

wird das $(n+1)$-ste *Lagrangesche Restglied* der Taylorentwicklung von f um x_0 genannt. Es misst den Unterschied zwischen f und ihrem n-ten Taylorpolynom. Offensichtlich gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Satz 4.7.4 besagt gerade, dass für jedes $x \neq x_0$ ein ξ zwischen x und x_0 existiert, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

und liefert damit eine Möglichkeit das Restglied $R_n(x)$ abzuschätzen, falls es gelingt die Ableitungen $f^{(n)}(\xi)$ für alle ξ zwischen x_0 und x unter Kontrolle zu bringen, vgl. Beispiele 4.7.9, 4.7.10 und 4.7.11 unten.

4.7.8. Beispiel. Wir haben schon viele Taylorreihen kennengelernt. Etwa ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die Taylorreihe der Exponentialfunktion um $x_0 = 0$. Ebenso sind

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{108}$$

die Taylorreihe der Sinusfunktion um $x_0 = 0$ und die Taylorreihe der Cosinusfunktion um x_0. Die Taylorreihen der Hyperbelfunktionen um $x_0 = 0$ sind

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

In all diesen Fällen konvergiert die Taylorreihe der entsprechenden Funktion überall gegen dieselbe Funktion. Aus (91) erhalten wir

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k, \qquad x \in (0,2) \tag{109}$$

also konvergiert die Taylorreihe des Logarithmus um $x_0 = 1$ auf $(0,2)$ gegen die Logarithmusfunktion. Aus (93) sehen wir, dass die Taylorreihe des Arcustangens um $x_0 = 0$ auf $(-1,1)$ gegen die Arcustangensfunktion konvergiert. Aus (94) erhalten wir, für $a \in \mathbb{R}$,

$$x^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k}(x-1)^k, \qquad x \in (0,2),$$

d.h. die Taylorreihe der Funktion $x \mapsto x^a$ konvergiert auf $(0,2)$ gegen dieselbe Funktion. Schließlich zeigt (97), dass auch die Taylorreihe des Arcussinus um $x_0 = 0$ auf $(-1,1)$ gegen die Arcussinusfunktion konvergiert.

4.7.9. Beispiel. Wir bestimmen die Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, um ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \text{und} \quad f^{(k)}(x_0) = e^{x_0} \qquad \text{für alle } 0 \leq k < \infty.$$

Daher ist die Taylorreihe von f um x_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k$$

Es bezeichne $R_n(x)$ das Lagrangesche Restglied der Taylorentwicklung von f um x_0, siehe Bemerkung 4.7.7. Nach dem Taylorschen Satz existiert ξ_x zwischen x und x_0, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-x_0)^n,$$

siehe Bemerkung 4.7.7. Da ξ_x zwischen x und x_0 liegt, gilt sicherlich $\xi_x \leq x_0 + |x - x_0|$ und daher

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-x_0)^n \right| = e^{\xi_x} \frac{|x-x_0|^n}{n!} \leq e^{x_0 + |x-x_0|} \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

Offensichtlich folgt daraus $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Also konvergiert die Taylorreihe von f um x_0 gegen f, d.h.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wesentlich einfacher lässt sich dies auch so herleiten:

$$e^x = e^{x_0+x-x_0} = e^{x_0}e^{x-x_0} = e^{x_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x-x_0)^k$$

Dabei haben wir das Additionstheorem der Exponentialfunktion und ihre Taylorreihe um $x_0 = 0$ verwendet.

4.7.10. Beispiel. Wir betrachten die Taylorreihe der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ um x_0. Da $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt für das Lagrangesche Restglied $R_n(x)$ der Taylorentwicklung von f um x_0

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\sin^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq \frac{|x-x_0|^n}{n!}.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ und damit konvergiert die Taylorentwicklung des Sinus um x_0 gegen die Sinusfunktion, d.h.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{110}$$

Für $x_0 = 0$ erhalten wir (108). Für $x_0 = \pi/2$ gilt

$$\sin^{(k)}(\pi/2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, 4, 8, 12, 16\ldots \\ -1 & \text{falls } k = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und (110) spezialisiert sich zu

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(x-\pi/2)^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe von (108) und $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ hätten wir dies auch direkt aus (108) herleiten können.

4.7.11. Beispiel. Wir bestimmen die Taylorreihe der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x)$, um $x_0 > 0$. Für die Ableitungen gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \qquad 1 \leq k < \infty$$

Also ist die Taylorreihe von f um x_0 gerade

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kx_0^k}(x-x_0)^k$$

Für das Lagrangesche Restglied $R_n(x)$ der Taylorentwicklung von f um x_0 gilt daher

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-x_0)^n\right| = \frac{1}{n}\left(\frac{|x-x_0|}{\xi_x}\right)^n$$

für ein ξ_x zwischen x_0 und x. Ist $x_0 \le x \le 2x_0$, dann $|x-x_0| \le x_0$, $x_0 < \xi_x$, also $\frac{|x-x_0|}{\xi_x} \le 1$ und daher

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n}, \qquad \text{für } x_0 \le x \le 2x_0.$$

Ist $x_0/2 < x \le x_0$, dann $|x-x_0| \le x_0/2$, $x_0/2 < \xi_x$, also $\frac{|x-x_0|}{\xi_x} \le 1$ und daher

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n}, \qquad \text{für } x_0/2 \le x \le x_0.$$

Insgesammt also

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \qquad x_0/2 < x < 2x_0.$$

Daher konvergiert die Taylorreihe des Logarithmus um x_0 auf $(x_0/2, 2x_0)$ gegen die Logarithmusfunktion

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kx_0^k}(x-x_0)^k, \qquad x \in (x_0/2, 2x_0).$$

Beachte, dass diese Potenzreihe daher auf $(0, 2x_0)$ konvergieren muss, wir aber durch unsere simple Abschätzung des Lagrangeschen Restglieds nicht zeigen können, dass sie dort gegen die Logarithmusfunktion konvergiert. Tatsächlich konvergiert sie auf $(0, 2x_0)$ gegen die Logarithmusfunktion was leicht aus (109) hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}
\ln(x) = \ln(x_0) + \ln(x/x_0) &= \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x/x_0 - 1)^k \qquad x/x_0 \in (0,2) \\
&= \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kx_0^k}(x-x_0)^k \qquad x \in (0, 2x_0)
\end{aligned}$$

4.7.12. Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$$

Wir werden nun zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Bei allen Punkten $x_0 \ne 0$ ist dies offensichtlich. Auch bemerken wir, dass f bei $x_0 = 0$ stetig ist, da $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$. Wir zeigen nun mittels vollständiger Induktion nach n, dass es Polynome p_n gibt, sodass gilt:

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} p_n(1/x)e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$$

Für $n = 0$ stimmt dies offensichtlich, p_0 ist das konstante Polynom, $p_0(y) = 1$. Nun zum Induktionsschritt von n auf $n+1$. Aus der Induktionsannahme erhalten wir zunächst für $x > 0$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(p_n(1/x)e^{-1/x}\Big) &= p_n'(1/x)\frac{-1}{x^2}e^{-1/x} + p_n(1/x)\frac{1}{x^2}e^{-1/x} \\ &= \big(p_n(1/x) - p_n'(1/x)\big) \cdot (1/x)^2 \cdot e^{-1/x} = p_{n+1}(1/x)e^{-1/x} \end{aligned}$$

wobei p_{n+1} das Polynom $p_{n+1}(y) := \big(p_n(y) - p_n'(y)\big)y^2$ bezeichnet. Weiters ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{p_n(1/x)e^{-1/x} - 0}{x} = \lim_{y\to\infty} p_n(y)ye^{-y} = 0,$$

siehe Beispiel 3.10.9. Da offensichtlich auch $\lim_{x\to 0-} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x} = 0$, sehen wir, dass

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = 0.$$

Also ist $f^{(n)}$ auch bei $x_0 = 0$ differenzierbar, und die Ableitung verschwindet dort. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen, und f also beliebig oft differenzierbar, alle Ableitungen bei $x_0 = 0$ verschwinden. Damit verschwinden alle Koeffizienten der Taylorreihe von f bei $x_0 = 0$, also hat diese Konvergenzradius $r = \infty$ und stellt daher die Konstante Funktion $T(x) = 0$ dar. Diese stimmt jedoch nicht mit f überein! Ganz analog läßt sich zeigen, dass auch die Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar sind, alle Ableitungen bei $x_0 = 0$ verschwinden, ihre Taylorreihen um $x_0 = 0$ also die konstante Nullfunktion, und nicht f oder g, darstellen.

4.8. Kurvendiskussion. Wir wollen hier noch auf die Kurvendiskussion anhand zweier konkreter Beispiele eingehen. Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^x = e^{x \ln x}.$$

Offensichtlich ist f beliebig oft differenzierbar. Ohne Mühe bestimmen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x(1 + \ln x) \\ f''(x) &= x^x\big((1 + \ln x)^2 + x^{-1}\big) \end{aligned}$$

Da $x^x > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$, hat f' nur eine Nullstelle, nämlich bei $x_0 = 1/e$. Offensichtlich gilt $f''(x_0) > 0$, also hat f bei $x_0 = 1/e$ ein lokales Minimum, siehe Proposition 4.2.17. Der Funktionswert bei diesem lokalen Minimum ist

$$f(x_0) = \frac{1}{e^{1/e}}. \tag{111}$$

Andere lokale Extrema können nicht existieren, siehe Proposition 4.2.2. Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x > x_0$, und $f'(x) < 0$ für alle $x < x_0$. Daher ist f auf $(0, x_0]$ streng monoton fallend und auf $[x_0, \infty)$ streng monoton wachsend, siehe Proposition 4.2.11 und Bemerkung 4.2.13. Also nimmt f bei x_0, und nur bei x_0, ihr globales Minimum an. Aus $\lim_{x\to\infty} x \ln x = \infty$ folgt $\lim_{x\to\infty} e^{x \ln x} = \infty$, also

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty. \tag{112}$$

Insbesondere hat die Funktion f kein globales Maximum. Für $x \geq e$ gilt $\ln x \geq 1$, also $x \ln x \geq x$ und damit $f(x) \geq e^x$, für alle $x \geq e$. Für $x \to \infty$ wächst daher $f(x)$ sehr schnell, mindestens so schnell wie die Exponentialfunktion. Weiters folgt mittels der Regel von de l'Hospital $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$, siehe (106), also $\lim_{x\to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$, und daher

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1. \tag{113}$$

Es liegt daher nahe die stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) = x^x & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

zu betrachten. Die Funktion $\tilde{f}$ hat bei $x_1 = 0$ ein lokales Maximum, denn sie ist auf $[0, x_0]$ streng monoton fallend, siehe oben. Dies ist aber kein globales Maximum. Aus $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$ und $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$ folgt

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty.$$

Für $x \to 0+$ wird die Funktion f daher sehr steil, beliebig steil. Offensichtlich gilt $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$, also ist f, und auch $\tilde{f}$, strikt konvex, siehe Satz 4.5.9. Insbesondere hat f keinen Wendepunkt.

Als zweites Beispiel wollen wir die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$$

diskutieren. Die Funktion f ist stetig und auf $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar mit Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x - 2x^2)(1 - x^2)^{-1/2} & \qquad x \in (-1, 1) \\ f''(x) &= (2x^3 - 3x - 1)(1 - x^2)^{-3/2} & \qquad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Die Ableitung $f' : (-1,1) \to \mathbb{R}$ hat nur eine Nullstelle, $x_0 = 1/2$. Es gilt $f''(x_0) < 0$, also hat f bei x_0 ein lokales Maximum, siehe Proposition 4.2.17. Der Funktionswert bei diesem lokalen Maximum ist

$$f(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Auf $(-1,1)$ kann f keine weiteren lokalen Extrema haben, siehe Proposition 4.2.2. Es ist $f'(x) > 0$ für $x \in (-1, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, 1)$. Also ist f auf $[-1, x_0]$ streng monoton wachsend, und auf $[x_0, 1]$ streng monoton fallend, siehe Proposition 4.2.11 und Bemerkung 4.2.13. Insbesondere nimmt die Funktion bei $x_0 = 1/2$ ihr globales Maximum an. Weiters gilt

$$f(-1) = 0 = f(1).$$

Daher sind -1 und 1 lokale Minima von f, und f nimmt sowohl bei -1 wie auch bei 1 ihr globales Minimum an. Offensichtlich gilt

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty$$

die Funktion f wir also für $x \to 1-$ beliebig steil. Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital, siehe Satz 4.6.1, finden wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1+} f'(x) &= \lim_{x\to -1+} \frac{1 - x - 2x^2}{(1-x^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{x\to -1+} \frac{-1-4x}{-x(1-x^2)^{-1/2}} = \lim_{x\to -1+} \frac{(1+4x)(1-x^2)^{1/2}}{x} = 0,\end{aligned}$$

die Funktion f wird also für $x \to -1+$ sehr flach. Da

$$(2x^3 - 3x - 1) = (x+1)(2x^2 - 2x - 1)$$

hat f'' auf $(-1,1)$ nur eine einzige Nullstellen, nämlich $x_1 = (1-\sqrt{3})/2$. Es gilt $f''(x) > 0$ auf $(-1, x_1)$ und $f''(x) < 0$ auf $(x_1, 1)$. Also ist f auf $[-1, x_1]$ strikt konvex und auf $[x_1, 1]$ strikt konkav, siehe Satz 4.5.9. Weiters schließen wir, dass x_1 der einzige Wendepunkt von f ist.

4.9. Extremwertaufgaben. Wir besprechen hier noch zwei Extremwertaufgaben. Zunächst wollen wir unter allen einem Kreis mit Radius $r > 0$ eingeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecken jenes mit maximaler Fläche bestimmen. Es bezeichnen h die Höhe (bezüglich der Basisseite) eines solchen Dreiecks. Für die Fläche $A(h)$ gilt dann

$$A(h) = h\sqrt{r^2 - (r-h)^2}, \qquad 0 \leq h \leq 2r.$$

Für die esrte Ableitungen gilt dann:

$$A'(h) = \frac{h(3r - 2h)}{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}, \qquad 0 < h < 2r.$$

Die einzige Stelle $h \in (0, 2r)$ an der $A'(h)$ verschwindet ist bei $h_0 = 3r/2$. Also besitzt die Funktion A auf $(0, 2r)$ nur ein einziges lokales Extremum, nämlich bei h_0. Aus

$$A(0) = 0, \qquad A(2r) = 0 \qquad \text{und} \qquad A(h_0) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 > 0$$

schließen wir, dass die Funktion A bei h_0, und nur dort, ihr globales Maximum annimmt. Also hat unser Extremwertproblem eine eindeutige Lösung, das gesuchte Dreieck mit maximaler Fläche hat Höhe $3r/2$. Die Länge der Basisseite ist dann $r\sqrt{3}$ und die Schenkellänge $r\sqrt{3}$. Also ist das gesuchte Dreieck ein gleichseitiges.

Als zweite Beispiel betrachten wir oberen und unteren Halbebene

$$H_+ := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0\big\} \quad \text{und} \quad H_- := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y < 0\big\}.$$

Die obere Halbebene H_+ sei mit einem Medium "gefüllt" in dem Licht mit Geschwindigkeit c_+ propagiert, und ebenso denken wir uns H_- mit einem Medium gefüllt in dem Licht mit Geschwindigkeit c_- propagiert. Weiters seien zwei Punkte

$$P_+ = (x_+, y_+) \in H_+ \qquad \text{und} \qquad P_- = (x_-, y_-) \in H_-$$

gegeben. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $Q_t := (t, 0)$ den Punkt in der Grenzlinie zwischen H_- und H_+ mit x-Koordinate t. Ein Lichtstrahl verbinde P_+ mit Q_t längs einer geraden Strecke und dann Q_t mit P_- längs einer geraden Strecke. Der Streckenzug von P_+ nach P_- besteht also aus zwei Geradenstücken die in Q_t möglicherweise gebrochen sind. Die Zeit $f(t)$ die so ein Lichtstrahl benötigt um von P_+ nach P_- zu gelangen beträgt dann:

$$f(t) = \frac{\sqrt{(t - x_+)^2 + y_+^2}}{c_+} + \frac{\sqrt{(t - x_-)^2 + y_-^2}}{c_-}$$

Zu gegebenen P_+ und P_- wollen wir nun jenen Punkt Q_t bestimmen, für den diese Reisezeit $f(t)$ minimal wird. Dazu bestimmen wir die Ableitungen:

$$f'(t) = \frac{t - x_+}{c_+\sqrt{(t - x_+)^2 + y_+^2}} + \frac{t - x_-}{c_-\sqrt{(t - x_-)^2 + y_-^2}}$$
$$f''(t) = \frac{y_+^2}{c_+((t - x_+)^2 + y_+^2)^{3/2}} + \frac{y_-^2}{c_-((t - x_-)^2 + y_-^2)^{3/2}}$$

Beachte, dass $f''(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher ist die Funktion f ist strikt konvex, siehe Satz 4.5.9, und ihre Ableitung f' streng monoton wachsend, siehe Proposition 4.5.8. Insbesondere kann f' höchstens eine Nullstelle haben, und damit kann f höchstens ein lokales Extremum besitzen. Tatsächlich muss die Funktion ihr globales Minimum an genau einer Stelle t_0 annehmen, denn es gilt offensichtlich

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty = \lim_{t \to -\infty} f(t).$$

Wir bezeichnen mit α_+ den Winkel zwischen der vertikalen Achse und der Geraden von Q_{t_0} nach P_+, d.h. den Einfallswinkel des Lichstrahls bei Q_{t_0}. Ebenso bezeichnen wir mit α_- den Winkel zwischen der vertikalen Achse und der Geraden von Q_{t_0} nach P_-, also den Ausfallswinkel des Lichstrahls bei Q_{t_0}. Dann gilt offensichtlich

$$\sin\alpha_+ = \frac{t_0 - x_+}{\sqrt{(t_0 - x_+)^2 + y_+^2}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha_- = -\frac{t_0 - x_-}{\sqrt{(t_0 - x_-)^2 + y_-^2}}.$$

Aus $f'(t_0) = 0$ erhalten wir also

$$\frac{\sin\alpha_+}{\sin\alpha_-} = \frac{c_+}{c_-}$$

Dies wird als Brechungsgesetz bezeichnet. Wir interpretieren diese naiven Betrachtungen so: An einer Grenzschicht zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Lichgeschwindigkeiten werden Lichstrahlen so gebrochen, dass das Verhältnis "Sinus Einfallswinkel durch Sinus Ausfallswinkel" konstant nämlich c_+/c_- ist.

5. Integrierbarkeit

5.1. Das Riemannintegral.

5.1.1. Definition. Unter einer *Zerlegung* eines Intervals $[a,b]$ verstehen wir endlich viele Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n$, sodass

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ dann heißen

$$O_{f,Z} := \sum_{k=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr)$$
$$U_{f,Z} := \sum_{k=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr)$$

Ober- bzw. *Untersumme* von f bezüglich der Zerlegung Z.

5.1.2. Lemma. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:*

a) *Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ ist $U_{f,Z} \le O_{f,Z}$.*
b) *Sind Z und Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$ und ist Z' feiner als Z, d.h. $Z \subseteq Z'$, dann gilt $U_{f,Z} \le U_{f,Z'}$ sowie $O_{f,Z'} \le O_{f,Z}$.*
c) *Für je zwei Zerlegungen Z und Z' von $[a,b]$ gilt $U_{f,Z} \le O_{f,Z'}$.*

Beweis. Behauptung (a) folgt sofort aus

$$\inf f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr) \le \sup f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr)$$

wobei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist. Ad (b): Sei also $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und zunächst $Z' = Z \cup \{y\}$, mit $x_{i_0-1} < y < x_{i_0}$. Dann ist

$$U_{f,Z'} = \sum_{i=1}^{i_0-1} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr) + (y - x_{i_0-1}) \cdot \inf f\bigl([x_{i_0-1}, y]\bigr)$$
$$+ (x_{i_0} - y) \cdot \inf f\bigl([y, x_{i_0}]\bigr) + \sum_{i=i_0+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f\bigl([x_{i-1}, x_i]\bigr)$$

Da $[x_{i_0-1}, y] \subseteq [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ und $[y, x_{i_0}] \subseteq [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ gilt

$$\inf f\bigl([x_{i_0-1}, y]\bigr) \ge \inf f\bigl([x_{i_0-1}, x_{i_0}]\bigr) \quad \text{und} \quad \inf f\bigl([y, x_{i_0}]\bigr) \ge \inf f\bigl([x_{i_0-1}, x_{i_0}]\bigr)$$

und wir erhalten

$$U_{f,Z'} \geq \sum_{i=1}^{i_0-1}(x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f\big([x_{i-1}, x_i]\big) + (x_{i_0-1} - x_{i_0-1}) \cdot \inf f\big([x_{i_0-1}, x_{i_0}]\big)$$
$$+ \sum_{i=i_0+1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f\big([x_{i-1}, x_i]\big) = U_{f,Z}.$$

Ist nun Z' eine beliebige Verfeinerung von Z so erhalten wir diese indem wir endlich viele Punkte zu Z hinzufügen. Daher folgt aus obigen Betrachtungen $U_{f,Z} \leq U_{f,Z'}$. Ganz analog lässt sich zeigen $O_{f,Z'} \leq O_{f,Z}$, womit (b) bewiesen wäre. Ad (c): Seien also Z und Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$. Dann ist $Z'' := Z \cup Z'$ eine Zerlegung von $[a,b]$ die feiner als Z und auch feiner als Z' ist, d.h. $Z \subset Z''$ und $Z' \subseteq Z''$. Aus (a) und (b) folgt daher

$$U_{f,Z} \leq U_{f,Z''} \leq O_{f,Z''} \leq O_{f,Z'}.$$

womit nun auch (c) gezeigt wäre. □

5.1.3. Definition. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißen

$$\overline{I}_a^b(f) := \inf\big\{O_{f,Z} \,\big|\, Z \text{ eine Zerlegung von } [a,b]\big\}$$
$$\underline{I}_a^b(f) := \sup\big\{U_{f,Z} \,\big|\, Z \text{ eine Zerlegung von } [a,b]\big\}$$

oberes bzw. *unteres Darbouxintegral* von f. Beachte, dass wegen Lemma 5.1.2(c) diese Suprema und Infima tatsächlich existieren.

5.1.4. Lemma. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\underline{I}_a^b(f) \leq \overline{I}_a^b(f). \tag{114}$$

Darüber hinaus sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

a) $\underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f)$.
b) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst (114). Nach Lemma 5.1.2(c) gilt $U_{f,Z} \leq \overline{I}_a^b(f)$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$, und damit auch $\underline{I}_a^b(f) \leq \overline{I}_a^b(f)$. Ad (a)⇒(b): Sei also $\underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Zerlegungen Z' und Z'' von $[a,b]$, sodass

$$O_{f,Z'} < \overline{I}_a^b(f) + \varepsilon/2 \qquad \text{und} \qquad U_{f,Z''} > \underline{I}_a^b f - \varepsilon/2.$$

Betrachte nun die Zerlegung $Z := Z' \cup Z''$ von $[a,b]$. Da Z feiner als Z' und auch feiner als Z'' ist, erhalten wir mit Hilfe von Lemma 5.1.2(b)

$$O_{f,Z} - U_{f,Z} \leq O_{f,Z'} - U_{f,Z''} < \overline{I}_a^b(f) + \varepsilon/2 - \big(\underline{I}_a^b(f) - \varepsilon/2\big) = \varepsilon.$$

Also ist Z eine Zerlegung mit der gewünschten Eigenschaft. Ad (b)⇒(a): Sei $\varepsilon > 0$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon$. Aus $\overline{I}_a^b(f) \leq O_{f,Z}$ und $U_{f,Z} \leq \underline{I}_a^b(f)$ erhalten wir sofort

$$\overline{I}_a^b(f) - \underline{I}_a^b(f) \leq O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $\overline{I}_a^b(f) - \underline{I}_a^b(f) \leq 0$ sein. Zusammen mit (114) folgt dann $\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$. □

5.1.5. Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* falls sie beschränkt ist und für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ existiert, sodass $O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon$. Ist f Riemann-integrierbar, dann wird

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$$

das *(Riemann)integral* von f genannt, vgl. Lemma 5.1.4. Weiters definiert man

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{sowie} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

5.1.6. Bemerkung. Wir interpretieren das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$ als den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei jedoch die Teile wo $f(x) < 0$ gilt, negativ zu verbuchen sind.

5.1.7. Bemerkung. Beachte, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha,$$

ähnlich wie in $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{l=1}^n a_l$.

5.1.8. Beispiel. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lambda$, eine konstante Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \lambda dx = (b - a)\lambda.$$

Dies ist offensichtlich, denn für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ ist $U_{f,Z} = (b - a)\lambda$ sowie $O_{f,Z} = (b - a)\lambda$ und damit $\underline{I}_a^b(f) = (b - a)\lambda = \overline{I}_a^b(f)$.

5.1.9. Beispiel. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}. \tag{115}$$

Um dies einzusehen betrachten wir die Zerlegungen $Z^n = \{x_0^n, \dots, x_n^n\}$ von $[a, b]$ mit Unterteilungspunkten $x_i^n := a + \frac{b-a}{n} i$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Dann gilt

$x_i^n - x_{i-1}^n = \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Für Unter- und Obersumme finden wir dann mit Hilfe der Summenformel für arithmetische Progressionen

$$U_{f,Z^n} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})x_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\Big(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\Big) = \frac{b-a}{2}\Big(a + b - \frac{b-a}{n}\Big)$$

und

$$O_{f,Z^n} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\Big(a + \frac{b-a}{n}i\Big) = \frac{b-a}{2}\Big(a + b + \frac{b-a}{n}\Big)$$

Da $\lim_{n\to\infty} U_{f,Z^n} = \frac{b^2-a^2}{2} = \lim_{n\to\infty} O_{f,Z^n}$, muss $\underline{I}_a^b(f) = \frac{b^2-a^2}{2} = \overline{I}_a^b(f)$ gelten. Also ist f tatsächlich Riemann-integrierbar, und es gilt (115).

5.1.10. Beispiel. Für $a \leq y \leq b$ ist die Funktion

$$\delta_y : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \delta_y(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq y \\ 1 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \delta_y(x)dx = 0.$$

Um dies einzusehen sei o.B.d.A. $a < y < b$, die beiden anderen Fälle $y = a$ und $y = b$ lassen sich ganz ähnlich behandeln. Beachte, dass $U_{\delta_y,Z} = 0$, für jede Zerlegung Z von $[a, b]$. Also ist $\underline{I}_a^b(\delta_y) = 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$, sodass $a < y - \varepsilon/3 < y + \varepsilon/3 < b$. Dann ist $Z = \{a, y - \varepsilon/3, y + \varepsilon/3, b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, mit $O_{\delta_y,Z} = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Also $O_{\delta_y,Z} - U_{\delta_y,Z} < \varepsilon$, und daher ist δ_y Riemann-integrierbar. Da $\underline{I}_a^b(\delta_y) = 0$ gilt auch $\int_a^b \delta_y(x)dx = 0$.

5.1.11. Beispiel. Die Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, denn für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt $U_{f,Z} = 0$ und $O_{f,Z} = b - a$ und damit auch $\underline{I}_a^b(f) = 0 \neq (b - a) = \overline{I}_a^b(f)$.

5.2. Elementare Eigenschaften des Riemannintegrals.

5.2.1. Lemma. *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen und $\lambda \geq 0$. Dann gilt:*

a) $\overline{I}_a^b(f + g) \leq \overline{I}_a^b(f) + \overline{I}_a^b(g)$ *und* $\underline{I}_a^b(f + g) \geq \underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_a^b(g)$
b) $\overline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \overline{I}_a^b(f)$ *und* $\underline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \underline{I}_a^b(f)$.
c) $\overline{I}_a^b(-f) = -\underline{I}_a^b(f)$ *und* $\underline{I}_a^b(-f) = -\overline{I}_a^b(f)$.

Beweis. Wir beginnen mit (c): Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt offensichtlich $O_{-f,Z} = -U_{f,Z}$, woraus sofort $\overline{I}_a^b(-f) = -\underline{I}_a^b(f)$ folgt.[68] Wenden wir das eben Bewiesene auf $-f$ an, erhalten wir auch die zweite Aussage von (c). Nun zu (b): Da $\lambda \geq 0$ gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ offensichtlich $O_{\lambda f,Z} = \lambda O_{f,Z}$, woraus wir sofort $\overline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \overline{I}_a^b(f)$ erhalten.[69] Mit Hilfe von (c) folgt dann $\underline{I}_a^b(\lambda f) = -\overline{I}_a^b(\lambda(-f)) = -\lambda \overline{I}_a^b(-f) = \lambda \underline{I}_a^b(f)$, also auch die zweite Aussage in (b). Kommen wir schließlich zu (a): Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt offensichtlich $O_{f+g,Z} \leq O_{f,Z} + O_{g,Z}$. Sind nun Z' und Z'' zwei beliebige Zerlegungen von $[a,b]$ dann erhalten wir zusammen mit Lemma 5.1.2(b)

$$\overline{I}_a^b(f+g) \leq O_{f+g,Z'\cup Z''} \leq O_{f,Z'\cup Z''} + O_{g,Z'\cup Z''} \leq O_{f,Z'} + O_{g,Z''}.$$

Bilden wir das Infimum über alle Z', so folgt $\overline{I}_a^b(f+g) \leq \overline{I}_a^b(f) + O_{g,Z''}$ für jede Zerlegung Z'' von $[a,b]$. Nehmen wir nun das Infimum über alle Z'', so erhalten wir $\overline{I}_a^b(f+g) \leq \overline{I}_a^b(f) + \overline{I}_a^b(g)$. Mit Hilfe von (c) folgt nun auch

$$\underline{I}_a^b(f+g) = -\overline{I}_a^b\big((-f)+(-g)\big) \geq -\overline{I}_a^b(-f) - \overline{I}_a^b(-g) = \underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_a^b(g),$$

womit auch die zweite Aussage in (a) gezeigt ist. □

5.2.2. Proposition. *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$ und λf Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{116}$$

sowie

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{117}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $f+g$. Aus Lemma 5.2.1(c), Lemma 5.1.4 und der Riemannintegrierbarkeit von f und g folgt

$$\underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_a^b(g) \leq \underline{I}_a^b(f+g) \leq \overline{I}_a^b(f+g) \leq \overline{I}_a^b(f) + \overline{I}_a^b(g) = \underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_a^b(g),$$

also $\overline{I}_a^b(f+g) = \underline{I}_a^b(f+g) = \underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_a^b(g)$. Damit ist $f+g$ Riemann-integrierbar und es gilt (116). Nun zu λf. Sei zunächst $\lambda \geq 0$. Mittels Lemma 5.2.1(b), Lemma 5.1.4 und der Riemannintegrierbarkeit von f erhalten wir

$$\lambda \underline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(\lambda f) \leq \overline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \overline{I}_a^b(f) = \lambda \underline{I}_a^b(f)$$

---

[68] Hier haben wir zweimal folgende Tatsache verwendet: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge, dann gilt $\sup(-A) = -\inf(A)$.

[69] Hier haben folgende beiden Tatsache verwendet: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und $\lambda \geq 0$, dann gilt $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ sowie $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

also $\underline{I}_a^b(\lambda f) = \overline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \underline{I}_a^b(f)$. Damit ist λf Riemann-integrierbar und es gilt (117) für $\lambda \geq 0$. Ebenso folgt aus Lemma 5.2.1(c) und Lemma 5.1.4

$$-\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(-f) \leq \overline{I}_a^b(-f) = -\underline{I}_a^b(f) = -\overline{I}_a^b(f)$$

also $\underline{I}_a^b(-f) = \overline{I}_a^b(-f) = -\overline{I}_a^b(f)$. Damit ist $-f$ Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Ist nun $\lambda \leq 0$, dann $-\lambda \geq 0$, also $\lambda f = (-\lambda)(-f)$ Riemann-integrierbar und $\int_a^b \lambda f(x)dx = \int_a^b (-\lambda)(-f(x))dx = -\lambda \int_a^b -f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$. Damit ist nun (117) auch für $\lambda \leq 0$ gezeigt. □

5.2.3. Proposition. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion die sich von f an höchstens endlich vielen Stellen unterscheidet. Dann ist auch g Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Ist $y \in [a,b]$, so bezeichnen wir mit δ_y die Funktion:

$$\delta_y : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \delta_y(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq y \\ 1 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Da sich f und g nur bei endlich vielen Stellen unterscheiden, existieren Punkte $y_1, y_2, \dots, y_n \in [a,b]$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$g = f + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{y_i}.$$

Nach Beispiel 5.1.10 und Proposition 5.2.2 ist daher g Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b \delta_{y_i}(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad \square$$

5.2.4. Bemerkung. Beachte, dass die Aussage von Proposition 5.2.3 i.A. falsch wird, wenn sich f und g auf einer abzählbaren Menge unterscheiden, siehe Beispiel 5.1.11.

5.2.5. Lemma. *Es sei $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $a < b < c$. Dann sind auch die Einschränkungen $f|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f|_{[b,c]} : [b,c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \tag{118}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und Z eine Zerlegung von $[a,c]$ mit $O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon$. Dann ist auch $\tilde{Z} := Z \cup \{b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,c]$, und nach Lemma 5.1.2(a) gilt

$$O_{f,\tilde{Z}} - U_{f,\tilde{Z}} \leq O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon. \tag{119}$$

Sei nun $Z' := \tilde{Z} \cap [a, b]$ und $Z'' := \tilde{Z} \cap [b, c]$. Dann ist Z' eine Zerlegung von $[a, b]$ und Z'' eine Zerlegung von $[b, c]$. Offensichtlich gilt

$$O_{f|_{[a,b]},Z'} + O_{f|_{[b,c]},Z''} = O_{f,\tilde{Z}} \qquad \text{sowie} \qquad U_{f|_{[a,b]},Z'} + U_{f|_{[b,c]},Z''} = U_{f,\tilde{Z}}. \tag{120}$$

Zusammen mit (119) erhalten wir

$$\big(O_{f|_{[a,b]},Z'} - U_{f|_{[a,b]},Z'}\big) + \big(O_{f|_{[b,c]},Z''} - U_{f|_{[b,c]},Z''}\big) = O_{f,\tilde{Z}} - U_{f,\tilde{Z}} < \varepsilon.$$

Da beide Summanden nicht-negativ sind, folgt daraus

$$O_{f|_{[a,b]},Z'} - U_{f|_{[a,b]},Z'} < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad O_{f|_{[b,c]},Z''} - U_{f|_{[b,c]},Z''} < \varepsilon.$$

Also sind $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f|_{[b,c]} : [b, c] \to \mathbb{R}$ beide Riemann-integrierbar. Aus (120) erhalten wir aber auch

$$\begin{aligned} U_{f,Z} \leq U_{f,\tilde{Z}} = U_{f|_{[a,b]},Z'} + U_{f|_{[b,c]},Z''} \leq \underline{I}_a^b(f) + \underline{I}_b^c(f) \; &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \\ &= \overline{I}_a^b(f) + \overline{I}_b^c(f) \leq O_{f|_{[a,b]},Z'} + O_{f|_{[b,c]},Z''} = O_{f,\tilde{Z}} \leq O_{f,Z} \end{aligned}$$

Da auch $U_{f,Z} \leq \int_a^c f(x)dx \leq O_{f,Z}$ erhalten wir

$$\Big| \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \Big| \leq O_{f,Z} - U_{f,Z} < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (118). □

5.2.6. Proposition. *Es sei $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $\alpha \leq a < b \leq \beta$ ist dann auch die Einschränkung $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Darüber hinaus gilt für beliebige $a, b, c \in [\alpha, \beta]$*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \tag{121}$$

Beweis. Nach Lemma 5.2.5 ist $f|_{[\alpha,b]}$ Riemann-integrierbar, und wenden wir Lemma 5.2.5 nochmals an so folgt, dass auch $f|_{[a,b]}$ Riemann-integrierbar ist. Für $a < b < c$ folgt (121) ebenfalls aus Lemma 5.2.5. Ist nun etwa $a < c < b$, dann liefert das eben Bewiesene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

womit wir (121) auch in diesem Fall gezeigt hätten. Analog verifiziert man (121) für alle möglichen Anordnungen der drei Punkte a, b, c. Stimmen zwei, oder gar alle drei, der Punkte a, b, c überein, dann ist $\int_a^a f(x)dx = 0$ zu verwenden.[70] □

[70] In der Vorlesung haben wir diese Proposition etwas anders bewiesen, aber dies scheint doch der einfachere Weg zu sein.

5.2.7. Proposition. *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beide Riemann-integrierbar und gilt $f \leq g$, dann auch*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt offensichtlich $U_{f,Z} \leq U_{g,Z}$. Bilden wir das Supremum über alle Zerlegungen, so erhalten wir $\underline{I}_a^b(f) \leq \underline{I}_a^b(g)$. Damit ist die Proposition auch schon bewiesen. □

5.2.8. Proposition. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intergrierbar, dann gilt*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \|f\|_{[a,b]} \cdot (b-a) \tag{122}$$

wobei $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ die Supremumsnorm von f bezeichnet, vgl. Proposition 3.2.9.

Beweis. Es gilt $f \leq \|f\|_{[a,b]}$. Mittels Proposition 5.2.7, Beispiel 5.1.8 erhalten wir daher

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \|f\|_{[a,b]}\, dx = \|f\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

Ebenso ist $-f \leq \|f\|_{[a,b]}$ und daher, siehe auch (117),

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx \leq \int_a^b \|f\|_{[a,b]}\, dx = \|f\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt sofort (122). □

5.3. Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium.

5.3.1. Definition. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge* falls zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele (offene) Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$, existieren, sodass

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^\infty |I_k| \leq \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $|I| := b - a$ die Länge des Intervalls $I = (a,b)$.

5.3.2. Proposition.

a) *Ist X eine Nullmenge und $Y \subseteq X$, dann ist auch Y eine Nullmenge.*
b) *Sind X_k, $k \in \mathbb{N}$, Nullmengen, dann ist auch $\bigcup_{k=1}^\infty X_k$ eine Nullmenge.*
c) *Jede endliche oder abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Nullmengen.*

Beweis. Behauptung (a) ist trivial. Ad (b): Sei also $\varepsilon > 0$. Da X_k eine Nullmenge ist, existieren Intervalle I_k^j, $j \in \mathbb{N}$, mit

$$X_k \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_k^j \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^\infty |I_k^j| \leq 2^{-k}\varepsilon.$$

Es ist $\{I_k^j \mid j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$ wieder eine abzählbare Menge von Intervallen, siehe Beispiel 1.7.2. Weiters gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_k^j \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_k^j| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon,$$

also ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ eine Nullmenge. Behauptung (c) folgt aus (b) und der offensichtlichen Tatsache, dass einpunktige Teilmengen von $\mathbb{R}$ Nullmengen sind. □

5.3.3. Beispiel. Es gibt auch überabzählbare Nullmengen. Sei z.B. C die *Cantormenge* aller reellen Zahlen $x \in [0,1]$ deren Dezimalbruchdarstellung[71], bezüglich der Basis 3 nicht die Ziffer 1 enthält. Dann ist C eine Nullmenge, die aber nicht abzählbar ist.

5.3.4. Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir bezeichnen mit Δ_f die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *fast überall stetig* wenn Δ_f eine Nullmenge ist.

5.3.5. Beispiel. Jede stetige Funktion ist fast überall stetig. Auch ist jede Funktion, die nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, fast überall stetig.

5.3.6. Satz. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und fast überall stetig ist.*

Beweis. Ein Beweis findet sich z.B. in [**H1**, Kapitel 84]. □

5.3.7. Korollar. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar. Auch ist jede beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, Riemann integrierbar.*

Beweis. Ist f stetig, dann ist f beschränkt, siehe Satz 3.4.6. Beide Behauptungen folgen daher aus Satz 5.3.6 und Beispiel 5.3.5. □

5.3.8. Korollar. *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist auch die Produktfunktion $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass mit f und g auch fg beschränkt ist. Nach Satz 5.3.6 sind Δ_f und Δ_g beides Nullmengen. Nach Proposition 3.1.8 ist die Funktion fg jedenfalls in jedem Punkt stetig, indem f und g stetig sind. Mit anderen Worten, die Produktfunktion fg kann nur dort unstetig sein, wo entweder f oder g unstetig ist, d.h. $\Delta_{fg} \subseteq \Delta_f \cup \Delta_g$. Nach Proposition 5.3.2(b) und (a) ist daher Δ_{fg} eine Nullmenge, also fg fast überall stetig. Nach Satz 5.3.6 ist daher auch fg Riemann-integrierbar. □

[71] Ternärsystem, oder auch Dreiersystem, indem nur die Ziffern 0, 1 und 2 verwendet werden, d.h. $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 10$.

5.3.9. Korollar. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist auch $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) := |f(x)|$, Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{123}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass mit f auch $|f|$ beschränkt ist. Nach Satz 5.3.6 ist Δ_f eine Nullmenge. Da der Asolutbetrag stetig ist, siehe Beispiel 3.1.4, ist die Funktion $|f|$ zumindest überall dort stetig, wo f stetig ist, siehe Proposition 3.1.11. Dh. $\Delta_{|f|} \subseteq \Delta_f$. Nach Proposition 5.3.2(a) ist daher auch $\Delta_{|f|}$ eine Nullmenge, und daher $|f|$ fast überall stetig. Nach Satz 5.3.6 ist also $|f|$ Riemann-integrierbar. Aus $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ folgt mittels Proposition 5.2.7

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad \text{sowie} \qquad -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Zusammen liefern diese beiden Ungleichungen nun (123) □

5.3.10. Korollar. *Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{124}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz und weil jedes f_k beschränkt ist, auch f beschränkt sein muss. Nach Satz 5.3.6 ist Δ_{f_n} eine Nullmenge, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 5.3.2(b) ist auch $\Delta := \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_{f_n}$ eine Nullmenge. Setze $D := [a,b] \setminus \Delta$. Dann ist jedes $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig. Da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f auf D stetig, siehe Proposition 3.2.5. Also ist f fast überall stetig. Nach Satz 5.3.6 ist f daher Riemann-integrierbar. Weiters gilt wegen Proposition 5.2.8

$$\Big|\int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)dx\Big| = \Big|\int_a^b f(x) - f_n(x)dx\Big| \leq \|f - f_n\|_{[a,b]} \cdot (b-a). \tag{125}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{[a,b]} = 0$, siehe Bemerkung 3.2.11. Aus (125) folgt daher

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)dx\Big| = 0$$

und damit (124). □

5.3.11. Korollar. *Es seien $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen, sodass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ gleichmäßig gegen $f = \sum_{k=1}^\infty f_k$ konvergiert. Dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)dx.$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar 5.3.10 angewandt auf die (gleichmä—ssig konvergente) Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. □

5.3.12. Bemerkung. Die Aussagen der Korollare 5.3.10 und 5.3.11 können vereinfacht auch so formuliert werden

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)dx.$$

In dieser Schreibweise wird sehr deutlich, dass diese beiden Korollare Bedingungen liefern, unter denen zwei Grenzübergänge vertauscht werden dürfen.

5.3.13. Definition. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $p \geq 1$, dann wird

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

die L^p-*norm* von f genannt. Beachte, dass die Funktion $|f|^p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tatsächlich Riemann-integrierbar ist, denn mit f muss auch $|f|^p$ beschränkt sein, und wegen $\Delta_{|f|^p} \subseteq \Delta_f$ folgt die Riemannintegrierbarkeit von $|f|^p$ aus Satz 5.3.6.

5.3.14. Proposition (Höldersche Ungleichung). *Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Weiters seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann sind auch $|fg|$, $|f|^p$ sowie $|g|^q$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{126}$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $|fg|$, $|f|^p$ und $|g|^q$ Riemann-integrierbar sind, siehe oben. Sei nun $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x)| &\leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \cdot \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x)| \\ &= \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x)|^q\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

wobei wir für das Gleichheitszeichen verwendet haben, dass die Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^p$, monoton wachsend ist. Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $x_i - x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})^{1/p} \cdot (x_i - x_{i-1})^{1/q}$, wir erhalten also

$$\begin{aligned}&(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x)| \\ &\qquad \leq \Big((x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big((x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x)|^q\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

und daher

$$
\begin{aligned}
O_{|fg|,Z} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\Big((x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big((x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x)|^q\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |g(x)|^q\Big)^{1/q} \\
&= \big(O_{|f|^p,Z}\big)^{1/p} \cdot \big(O_{|g|^q,Z}\big)^{1/q}
\end{aligned}
$$

wobei wir für das zweite Ungleichheitszeichen Proposition 4.5.22 verwendet haben. Für zwei Zerlegungen Z' und Z'' von $[a,b]$ erhalten wir daher

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_a^b(|fg|) &\leq O_{|fg|,Z'\cup Z''} \\
&\leq \big(O_{|f|^p,Z'\cup Z''}\big)^{1/p} \cdot \big(O_{|g|^q,Z'\cup Z''}\big)^{1/q} \leq \big(O_{|f|^p,Z'}\big)^{1/p} \cdot \big(O_{|g|^q,Z''}\big)^{1/q}
\end{aligned}
$$

Nehmen wir nun das Infimum über alle Z' und Z'', so folgt

$$
\overline{I}_a^b(|fg|) \leq \big(\overline{I}_a^b(|f|^p)\big)^{1/p} \cdot \big(\overline{I}_a^b(|g|^q)\big)^{1/q},
$$

und dies ist genau (126). □

5.3.15. Proposition (Minkowski Ungleichung). *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und $p \geq 1$. Dann gilt*

$$
\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.
$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 5.3.14 in der selben Art und Weise wie wir Proposition 4.5.24 aus Proposition 4.5.22 hergeleitet haben. Siehe Übungsaufgaben. □

5.3.16. Bemerkung. Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p \geq 1$. Dann gilt

a) $\|f\|_p \geq 0$
b) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$
c) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Beachte jedoch, dass aus $\|f\|_p = 0$ nicht $f = 0$ folgt, siehe Beispiel 5.1.10. Vergleiche dies mit Bemerkung 4.5.25.

5.4. Riemannsummen. In diesem Abschnitt wollen wir noch kurz einen anderen Weg zum Riemannintegral skizzieren. Wir betrachten eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Weiters sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, sodass $\xi_k \in [x_{i-1}, x_i]$. In dieser Situation definiert man die

Riemannsumme

$$R_{f,Z,\Xi} := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Unter dem *Feinheiteitsmaß* $|Z|$ der Zerlegung Z verstehen wir die Zahl

$$|Z| := \min\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt R-integrierbar, falls eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $|Z| < \delta$ und beliebige Zwischenpunkte Ξ wie oben stets gilt

$$\left| R_{f,Z,\Xi} - I \right| < \varepsilon.$$

In diesem Fall wird die (eindeutig bestimmte Zahl) I das R-Integral von f genannt. Es stellt sich heraus, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann R-intergierbar ist, wenn sie Riemann-integrierbar ist, und in dieser Situation stimmt das R-Integral mit dem Riemannintegral aus Definition 5.1.5 überein, siehe [**H1**, Kapitel 83]. Wir erhalten also den selben Integrationsbegriff wie wir ihn schon in den vorangehenden Kapiteln besprochen haben.

Schließlich sei noch bemerkt, dass das Riemannintegral einige Schwächen hat, und es sich oft mit dem sogenannten *Lebesgueintegral* besser arbeiten lässt.

5.5. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

5.5.1. Definition. Es sei I ein allgemeines Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls sie auf dem Inneren $\mathring{I}$ von I differenzierbar ist und in allen vorhandenen Randpunkten von I die sogenannten *einseitigen Ableitungen* existieren, d.h. für Intervalle der Form $I = [a, b)$, $I = [a, b]$ und $I = [a, \infty)$ soll die *rechtsseitige Ableitung*

$$f'(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existieren, und für Intervalle der Form $(a, b]$, $I = [a, b]$ und $I = (-\infty, b]$ soll die *linksseitige Ableitung*

$$f'(b) := \lim_{x \to b-} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

existieren.

5.5.2. Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist I ein allgemeines Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Funktion*

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis. Für $x, y \in I$ gilt nach Proposition 5.2.6

$$F(y) - F(x) = \int_{x_0}^{y} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{y} f(t)dt$$

und nach Beispiel 5.1.8 auch $\int_x^y f(x)dt = f(x)(y-x)$. Daher

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t) - f(x)dt, \qquad x \neq y.$$

Mittels Proposition 5.2.8 folgt

$$\Big|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\Big| = \frac{1}{|y-x|}\Big|\int_x^y f(t) - f(x)dt\Big| \leq \sup_{t\in[x,y]} |f(t)-f(x)|$$

Da f im Punkt x stetig ist, gilt $\lim_{y\to x}\sup_{t\in[x,y]} |f(t)-f(x)| = 0$ und daher auch

$$\lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) = 0.$$

Also ist F bei x differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$. □

5.5.3. Definition. Es sei I ein allgemeines Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter einer Stammfunktion von f verstehen wir jede differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$.

5.5.4. Bemerkung. Satz 5.5.2 besagt also, dass für stetiges $f : I \to \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist.

5.5.5. Bemerkung. Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch $F+c$ eine Stammfunktion von f, da ja die Ableitung konstanter Abbildungen verschwindet. Sind umgekehrt F und G zwei Stammfunktionen von f, dann gilt $(G-F)' = G'-F' = f-f = 0$, also existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F+c$, siehe Korollar 4.2.8. D.h. man erhält alle Stammfunktionen von f indem man zu einer beliebigen Stammfunktion Konstanten addiert. Die, bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Stammfunktion zu f wird oft auch mit $F(x) = \int f(x)dx$ oder $F(x) = \int f(x)dx + c$ notiert, und als *unbestimmtes Integral* bezeichnet. In diesem Zusammenhang wird $\int_a^b f(x)dx$ dann oft *bestimmtes Integral* genannt.

5.5.6. Definition. Es sei I ein allgemeines Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar* oder C^1, falls sie differenzierbar ist, und ihre Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist. Allgemeiner heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *n-mal stetig differenzierbar* oder C^n, falls sie n-mal differenzierbar ist und ihre n-te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig ist. Unter einer C^0-Funktion verstehen wir einfach eine stetige Funktion.

5.5.7. Bemerkung. Nach Satz 5.5.2, kann das unbestimmte Integral als Umkehrung des Differenzierens bestrachtet werden. Genauer gilt für jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

und für stetig differenzierbare f auch

$$\int \frac{df}{dx}(x)dx = f(x) + c.$$

5.5.8. KOROLLAR. *Ist I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann gilt für je zwei Punkte $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

BEWEIS. Sei $x_0 \in I$. Nach Satz 5.5.2 ist die Funktion $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$, eine Stammfunktion von f. Nach Bemerkung 5.5.5 existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt &= -\int_{x_0}^a f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt \\ &= -G(a) + G(b) = -(F(a) + c) + (F(b) + c) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

für beliebige zwei Punkte $a, b \in I$. □

5.5.9. BEMERKUNG. Mit Hilfe von Korollar 5.5.8 ist also die Berechnung des Integrals stetiger Funktion auf das Finden einer Stammfunktion zurückgeführt. Es ist üblich den dabei auftretenden Term $F(b) - F(a)$ mit $F|_a^b := F(b) - F(a)$ zu bezeichnen. Dann lautet die Aussage von Korollar 5.5.8

$$\int_a^b f(x)dx = F\Big|_a^b$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion der stetigen Funktion f ist.

5.5.10. BEISPIEL. Wir wollen die Fläche A_r des Kreises mit Radius $r > 0$ bestimmen. Nach Bemerkung 5.1.6 gilt für die Fläche dieses Kreises

$$A_r/2 = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Betrachte die Funktion

$$F : [-r, r] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin(x/r)\Big).$$

Eine einfache Rechnung zeigt $F'(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, also ist F eine Stammfunktion von f. Nach Korollar 5.5.8 gilt daher

$$\begin{aligned}\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = F(r) - F(-r) &= \frac{1}{2}\big(r^2 \arcsin(1) - r^2 \arcsin(-1)\big) \\ &= \frac{r^2}{2}\big(\pi/2 - (-\pi/2)\big) = \frac{r^2\pi}{2}.\end{aligned}$$

Also ist die Fläche des Kreises mit Radius r durch $A_r = r^2\pi$ gegeben.

5.5.11. Beispiel. Die Differentationsregeln aus Kapitel 4 liefern uns folgende Liste von Stammfunktionen:

a) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$
b) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
c) $\int e^x dx = e^x$
d) $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
e) $\int \cos(x)dx = \sin(x)$
f) $\int \sinh(x)dx = \cosh(x)$
g) $\int \cosh(x)dx = \sinh(x)$
h) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$
i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$

Bevor wir in den nächsten Kapiteln Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen behandeln, wollen wir hier noch eine andere Folgerung aus Satz 5.5.2 erwähnen.

5.5.12. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Beweis. Nach Satz 5.5.2 ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, differenzierbar und $F' = f$. Nach dem Mittelwertsatz 4.2.6 existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$F(b) - F(a) = F'(\xi) \cdot (b-a),$$

und für dieses ξ gilt dann

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a) = F'(\xi) \cdot (b-a) = f(\xi) \cdot (b-a). \qquad \square$$

5.6. Partielle Integration.

5.6.1. Proposition (Partielle Integration). *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiters bezeichne $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für je zwei Punkte $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (Fg)\big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{127}$$

Weiters gilt für das unbestimmte Integral

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Die Funktion $Fg : I \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $fg + Fg'$, denn $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$. Nach Korollar 5.5.8 gilt daher

$$\int_a^b f(x)g(x) + F(x)g'(x)dx = (Fg)\big|_a^b$$

woraus mittels Proposition 5.2.2 sofort (127) folgt. □

5.6.2. Beispiel. Es sei $\alpha \neq -1$. Mit Hilfe von Propostion 5.6.1 erhalten wir[72]

$$\int x^\alpha \ln(x)dx = \frac{x^{\alpha+1}\ln(x)}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^{\alpha+1}\ln(x)}{\alpha+1} - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}dx = \frac{x^{\alpha+1}\ln(x)}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}$$

also

$$\int x^\alpha \ln(x)dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\big((\alpha+1)\ln(x) - 1\big), \qquad \alpha \neq -1. \tag{128}$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir insbesondere

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x \tag{129}$$

Für $\alpha = -1$ verizifiziert man sofort

$$\int x^{-1}\ln(x)dx = \frac{\ln(x)^2}{2}. \tag{130}$$

5.6.3. Beispiel. Aus Proposition 5.6.1 erhalten wir[73]

$$\int \cos^k(x)dx = \int \cos(x)\cos^{k-1}(x)dx$$
$$= \sin(x)\cos^{k-1}(x) + (k-1)\int \sin^2(x)\cos^{k-2}(x)dx$$
$$= \sin(x)\cos^{k-1}(x) + (k-1)\int \big(1-\cos^2(x)\big)\cos^{k-2}(x)dx$$
$$= \sin(x)\cos^{k-1}(x) + (k-1)\int \cos^{k-2}(x)dx - (k-1)\int \cos^k(x)dx$$

also

$$\int \cos^k(x)dx = \frac{\sin(x)\cos^{k-1}(x)}{k} + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2}(x)dx, \qquad k \neq 0. \tag{131}$$

[72] $f(x) = x^\alpha$, $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha}$, $g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

[73] $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos^{k-1}(x)$, $F(x) = \sin(x)$, $g'(x) = -(k-1)\cos^{k-2}(x)\sin(x)$

Mit dieser Rekursionsformel können die unbestimmten Integrale $\int \cos^k(x)dx$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Etwa erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)dx &= \sin(x) \\
\int \cos^2(x)dx &= \tfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \tfrac{1}{2}x \\
\int \cos^3(x)dx &= \tfrac{1}{3}\sin(x)\cos^2(x) + \tfrac{2}{3}\sin(x) \\
\int \cos^4(x)dx &= \tfrac{1}{4}\sin(x)\cos^3(x) + \tfrac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + \tfrac{3}{8}x
\end{aligned}$$

Für das bestimmte Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^k(x)dx$ erhalten wir aus (131) die Rekursionsformel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^k(x)dx = \frac{k-1}{k}\int_0^{\pi/2} \cos^{k-2}(x)dx, \qquad k \neq 0, 1.$$

und damit

$$c_k := \int_0^{\pi/2} \cos^k(x)dx = \begin{cases} \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-3}{k-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-3}{k-2}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \tag{132}$$

Ganz ähnlich lassen sich die Integrale $\int \sin^k(x)dx$ behandeln. Wir wollen aus (132) noch das sogenannte *Wallische Produkt* berechnen:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2k)\cdot(2k)}{(2k-1)\cdot(2k+1)} \tag{133}$$

Beachte, dass für $x \in [0, \pi/2]$ sicherlich $\cos^k(x) \geq \cos^{k+1}(x) \geq \cos^{k+2}(x)$ gilt. Daraus erhalten wir $c_k \geq c_{k+1} \geq c_{k+2}$ und mit Hilfe von (132) dann

$$1 \geq \frac{c_{k+1}}{c_k} \geq \frac{c_{k+2}}{c_k} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Daher gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = 1$, also auch $\lim_{k\to\infty} \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} = 1$, woraus sofort (133) folgt.

5.6.4. Beispiel. Mit Hilfe von Proposition 5.6.1 erhalten wir[74]

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x = (x-1)e^x dx$$

und ebenso[75]

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

[74] $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $F(x) = e^x$, $g'(x) = 1$

[75] $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$

Allgemeiner liefert dies[76]

$$\int x^k e^x dx = x^k e^x - k \int x^{k-1} e^x dx.$$

Damit lassen sich die unbestimmten Integrale $\int x^k e^x dx$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ bestimmen. Also können wir auch für jedes Polynom $p(x)$ das Integral $\int p(x) e^x dx$ lösen.

5.6.5. Satz. *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Dann gilt für das $(n+1)$-ste Restglied der Taylorentwicklung von f um x_0, siehe Bemerkung 4.7.7,*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \qquad x \in I.$$

Mit anderen Worten, für jedes $x \in I$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 0$ besagt der Satz, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) dt.$$

Dies ist tatsächlich der Fall, siehe Korollar 5.5.8. Damit ist der Induktionsbeginn, also ist die Aussage des Satzes für $n = 0$, gezeigt. Wir kommen nun zum Induktionsschritt von n auf $n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \tag{134}$$

für jede $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f und jedes $x \in I$. Sei nun f $(n+2)$-mal stetig differenzierbar. Mittels partieller Integration, siehe Proposition 5.6.1, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt\end{aligned}$$

Zusammen mit (134) folgt daher

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

---

[76] $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = x^k$, $g'(x) = kx^{k-1}$

und dies ist genau die Aussage, des Satzes für $n+1$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, und das Resultat folgt. $\square$

5.6.6. Bemerkung. Der Fall $n = 0$ in Satz 5.6.5 ist gerade die Aussage des Hauptsatzes, siehe Satz 5.5.2 und Korollar 5.5.8. Wir betrachten Satz 5.6.5 daher als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

5.6.7. Bemerkung. Wir erinnern uns, dass die Taylorreihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer Funktion f um x_0 genau dann bei x gegen $f(x)$ konvergiert, wenn für das Restglied gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, siehe Bemerkung 4.7.7. Satz 5.6.5 liefert nun eine neue Beschreibung des Restglieds, die sich von der in Satz 4.7.4 unterscheidet. Gelingt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = 0,$$

so muss die Taylorreihe $T(x)$ bei x gegen $f(x)$ konvergieren. Dazu müssen wir gewisse Integrale die die Ableitungen von f involvieren, unter Kontrolle bringen. Dies ist eine etwas andere Situation als in Bemerkung 4.7.7, wo wir für die Konvergenz der Taylorreihe die Ableitungen punktweise abschätzen mussten.

5.6.8. Bemerkung. Die Regel der partiellen Integration lässt sich auch so formulieren: Ist I ein allgemeines Intervall, und sind $g, h : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\int_a^b h'(x)g(x)dx = (hg)\big|_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx$$

für je zwei Punkte $a, b \in I$. Dies folgt indem wir Proposition 5.6.1 auf g und $f = h'$ anwenden. Für die Stammfunktionen bedeuted dies

$$\int h'(x)g(x)dx = h(x)g(x) - \int h(x)g'(x)dx$$

oder noch kürzer $\int h'g = hg - \int hg'$.

5.7. Substitution.

5.7.1. Proposition. *Es sei I ein allgemeines Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, und $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$. Dann gilt die sogenannte* Substitutionsregel

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy.$$

Weiters gilt, ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$.

Beweis. Da f stetig ist existiert nach Satz 5.5.2 eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$, $F' = f$. Nach Korollar 5.5.8 gilt:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = F\Big|_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \tag{135}$$

Nach der Kettenregel ist die Komposition $F \circ g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $(F\circ g)' = (F'\circ g)g' = (f\circ g)g'$. Also ist $F\circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$. Aus Korollar 5.5.8 erhalten wir

$$\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy = (F \circ g)\Big|_\alpha^\beta = F\Big|_{g(\alpha)}^{g(\beta)}.$$

Zusammen mit (135) folgt nun die Behauptung. □

Wir wollen noch eine andere Version der Substitutionsformel formulieren.

5.7.2. Proposition. *Es sei $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, bijektiv und so, dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Weiters sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy,$$

und für die Stammfunktionen gilt:

$$\int f(x)dx = \Big[\int f((g(y))g'(y)dy\Big]_{y=g^{-1}(x)} \tag{136}$$

5.7.3. Bemerkung. Für die Substitutionsformel gibt es eine sehr einfache Merkregel: Soll $\int f(x)dx$ bestimmt werden, so setzen wir

$$x = g(y), \qquad \frac{dx}{dy} = g'(y), \qquad \text{also} \qquad dx = g'(y)dy. \tag{137}$$

Die Substitutionsformel (136) besagt dann gerade

$$\int f(x)dx = \Big[\int f(g(y))g'(y)dy\Big]_{y=g^{-1}(x)}$$

dh. wir erhalten die Stammfunktion $\int f(x)dx$ indem wir x durch $g(y)$ und dx durch $g'(y)dy$ ersetzen, siehe (137), dann die Stammfunktion dieser neuen Funktion (in y) bestimmen, und schließlich y durch $g^{-1}(x)$ rücksubstituieren. Hilfreich ist dies wenn es gelingt durch geschickte Wahl von g zu erreichen, dass das Integral $\int f(g(y))g'(y)dy$ berechenbar wird. Wir wollen dies nun an einigen Beispielen ausprobieren.

5.7.4. Beispiel. Es seien $a, b, c, k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, und f eine auf $[ka + d, kb + d]$ definierte stetige Funktion. Die Substitution $y = kx + d$[77] liefert

$$\int_a^b f(kx + d)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+d}^{kb+d} f(y)dy,$$

[77] $\frac{dy}{dx} = k$, also $dx = \frac{dy}{k}$

oder für die Stammfunktionen:

$$\int f(kx+d)dx = \frac{1}{k}\Big[\int f(y)dy\Big]_{y=kx+d}$$

Substitutionen dieser Art werden lineare Substitutionen genannt.

5.7.5. Beispiel. Will man etwa das Integral $\int(3x-7)^{109}dx$ bestimmen, so ist Ausmultiplizieren keine gute Idee, aber die Substitution $y=3x-7$ liefert sofort das Ergebnis

$$\int(3x-7)^{109}dx = \frac{1}{3}\int y^{109}dy = \frac{y^{110}}{3\cdot 110} = \frac{(3x-7)^{110}}{330}$$

Mit Hilfe der Substitution $y=4x+5$ erhalten wir[78]

$$\int e^{4x+5}dx = \frac{1}{4}\int e^y dy = \frac{e^y}{4} = \frac{e^{4x+5}}{4}.$$

Ebenso liefert die Substitution $y=3x-7$

$$\int \cos(3x-7)dx = \frac{1}{3}\int\cos(y)dy = \frac{\sin(y)}{3} = \frac{\sin(3x-7)}{3},$$

die Substitution $y=3x+1$ ergibt

$$\int\frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|3x+1|,$$

und $y=2x-9$ zusammen mit (129)

$$\int\ln(2x-9)dx = \frac{1}{2}\int\ln(y)dy = \frac{1}{2}(y\ln(y)-y) = \frac{(2x-9)\ln(2x-9)-2x+9}{2}.$$

5.7.6. Beispiel. Es seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Durch die Substitution $y=ax+b$ erhalten wir[79]

$$\int(ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\int y^\alpha dy = \frac{1}{a}\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \alpha\neq -1.$$

und

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int e^y dy = \frac{e^y}{a} = \frac{e^{ax+b}}{a}$$

sowie

$$\int\cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int\cos(y)dy = \frac{1}{a}\sin(y) = \frac{\sin(ax+b)}{a}$$

als auch

$$\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{dy}{y} = \ln|y| = \frac{\ln|ax+b|}{a}.$$

[78] $\frac{dy}{dx}=4$, also $dx=\frac{dy}{4}$

[79] $\frac{dy}{dx}=a$, also $dx=\frac{dy}{a}$

und auch

$$\int \ln(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \ln(y)dy = \frac{1}{a}(y\ln(y)-y) = \frac{(ax+b)\ln(ax+b)-ax-b}{a}.$$

5.7.7. Beispiel. Seien $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Die Substitution $y = ax+b$, $dx = \frac{dy}{a}$, liefert

$$\int x^k \ln(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \big((y-b)/a\big)^k \ln(y)dy = \frac{1}{a^{k+1}}\int (y-b)^k \ln(y)dy$$

und diese Integrale können wir mittels partieller Integration bestimmen, siehe Beispiel 5.6.2.

5.7.8. Beispiel. Wieder seien $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Die Substitution $y = ax$, $dx = \frac{dy}{a}$, liefert

$$\int x^k e^{ax+b}dx = \frac{e^b}{a^k}\int (ax)^k e^{ax}dx = \frac{e^b}{a^{k+1}}\int y^k e^y dy$$

und dieses Integral können wir rekursiv mittels partieller Integration bestimmen, siehe Beispiel 5.6.4. Damit können wir für jedes Polynom $p(x)$ das Integral $\int p(x)e^{ax+b}dx$ lösen.

5.7.9. Beispiel. Wieder seien $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Die Substitution $y = ax$, $dx = \frac{dy}{a}$, liefert

$$\int \cos^k(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \cos^k(y)dy$$

und diese Integrale können wir rekursiv mittels partieller Integration bestimmen, siehe Beispiel 5.6.3.

5.7.10. Beispiel. Da $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ gilt

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}$$

und nach Beispiel 5.7.6 daher

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big|\end{aligned}$$

5.7.11. Beispiel. Durch die Substitution $y = x/a$ erhalten wir[80]

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{a}\arctan(y) = \frac{1}{a}\arctan(x/a)$$

siehe auch Beispiel 5.5.11(h).

[80] $\frac{dy}{dx} = 1/a$, also $dx = ady$

5.7.12. Beispiel. Durch die Substitution $y = f(x)$ erhalten wir[81]

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \ln|f(x)|.$$

Etwa liefert dies

$$\int \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} dx = \ln|2+\sin(x)| \qquad \text{und} \qquad \int \frac{2x+5}{x^2+5x+7} dx = \ln|x^2+5x+7|.$$

5.7.13. Beispiel. Durch die Substitution $x^2 = y$ erhalten wir[82]

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{e^y}{2} = \frac{e^{x^2}}{2}.$$

Beachte jedoch, dass z.B. die Stammfunktion $\int e^{-x^2} dx$ nicht mittels "elementarer" Funktionen ausgedrückt werden kann.

5.8. Integration rationaler Funktionen. Wir wollen nun Integrale der Form

$$\int \frac{2x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 20x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$$

bestimmen. Eine einfache Polynomdivision liefert folgende Darstellung des Integranden:

$$\frac{2x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 20x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 2x - 3 + \frac{9x^2 - 14x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

und damit:

$$\int \frac{2x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 20x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = x^2 - 3x + \int \frac{9x^2 - 14x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Um das verbleibende Integral zu bestimmen, faktorisieren wir den Nenner des Integranden

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

und versuchen Zahlen $A, B, C \in \mathbb{R}$ zu finden, sodass gilt:

$$\frac{9x^2 - 14x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Nenner $x^3 - 3x^2 + 2x$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} 9x^2 - 14x + 4 &= A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2 - (3A+2B+C)x + 2A, \end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich gewinnen wir das lineare Gleichungssystem

$$A + B + C = 9, \qquad -(3A + 2B + C) = -14, \qquad 2A = 4.$$

[81] $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, also $dy = f'(x)dx$

[82] $\frac{dy}{dx} = 2x$, also $dy = 2xdx$

Mühelos bestimmen wir die eindeutige Lösung $A = 2$, $B = 1$, $C = 6$. Wir erhalten also folgende Darstellung des Integranden

$$\frac{9x^2 - 14x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{6}{x-2} \tag{138}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{9x^2 - 14x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + 6\int \frac{dx}{x-2} \\ = 2\ln|x| + \ln|x-1| + 6\ln|x-2|\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int \frac{2x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 20x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = x^2 - 3x + 2\ln|x| + \ln|x-1| + 6\ln|x-2|$$

Die Darstellung einer rationalen Funktion in der Gestalt (138) heißt Partialbruchzerlegung, und sie gestattet es, Stammfunktionen von beliebigen rationalen Funktionen zu bestimmen, wenn es nur gelingt den auftretenden Nenner zu faktorisieren, d.h. seine Nullstellen zu finden. I.A. treten dabei allerdings etwas kompliziertere Integrale auf als wir es in diesem ersten Beispiel gesehen haben. Wir wollen dies nun in voller Allgemeinheit besprechen.

Seien also $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ zwei Polynome mit reellen Koeffizienten $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ und $b_n \neq 0$. Wir wollen das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ lösen. Zunächst bestimmen wir mittels Polynomdivision Polynome $r(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$ und $t(x)$ mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = t(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

wobei nun der Grad des Polynoms $r(x)$ kleiner als der von $q(x)$ ist. Wegen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int t(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

ist damit das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ auf das Integral $\int \frac{r(x)}{q(x)}$ zurückgeführt, denn das Integral $\int t(x) dx$ lässt sich mühelos bestimmen. Damit ist der erste Schritt getan. Zusammenfassend können wir sagen: Das Integral einer beliebigen rationalen Funktion lässt sich stets auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen, dessen Zähler kleineren Grad als dessen Nenner hat.

Nun zum zweiten Schritt: Nach dem Hauptsatz der Algebra lässt sich das Polynom $q(x)$ in der Form

$$q(x) = b_n (x-y_1)^{n_1} \cdots (x-y_k)^{n_k} \cdot (x-z_1)^{m_1} \cdot (x-\bar{z}_1)^{m_1} \cdots (x-z_l)^{m_l} \cdot (x-\bar{z}_l)^{m_l} \tag{139}$$

schreiben. Dabei bezeichnen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ die reellen Nullstellen und $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ihre Vielfachheiten. Weiters bezeichnen $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_l, \bar{z}_l$ bezeichnen die nicht reellen Nullstellen von $q(x)$ und $m_1, m_2, \ldots, m_l$ ihre Vielfachheiten. Beachte, dass diese in komplex konjugierten Paaren z_i, $\bar{z}_i$ auftreten müssen, da unser Polynom reelle Koeffizienten hat. Obwohl die Existenz der Darstellung (139) für jedes $q(x)$ gesichert ist, kann das Auffinden der Nullstellen von $q(x)$ in konkreten Beispielen unmöglich sein. Ist eine der Nullstellen von $q(x)$ gleichzeitig eine Nullstelle von $p(x)$, dann kürzen wir diese, und dürfen so o.B.d.A. annehmen, dass $p(x)$ bei keinem der y_i, z_j oder $\bar{z}_j$ verschwindet. Ausmultiplizieren von $(x - z_i)(x - \bar{z}_i)$ ergibt reelle Polynome

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + e_i x + f_i, \qquad \text{mit } e_i = -2\operatorname{Re} z_i \text{ und } f_i = |z_i|^2$$

und damit:

$$q(x) = (x - y_1)^{n_1} \cdots (x - y_k)^{n_k} \cdot (x^2 + e_1 x + f_1)^{m_1} \cdots (x^2 + e_l x + f_l)^{m_l}$$

Beachte, dass stets

$$f_i \geq 0 \qquad \text{und} \qquad e_i^2 - 4f_i < 0.$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Partialbruchzerlegung von $\frac{r(x)}{q(x)}$, dh. wir versuchen reelle Zahlen A_{ij}, B_{ij} und C_{ij} zu finden, sodass gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{r(x)}{q(x)} =& \frac{A_{11}}{x - y_1} + \frac{A_{12}}{(x - y_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x - y_1)^{n_1}} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{A_{k1}}{x - y_k} + \frac{A_{k2}}{(x - y_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kn_k}}{(x - y_k)^{n_k}} \\
&+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + e_1 x + f_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + e_1 x + f_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2 + e_1 x + f_1)^{m_1}} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + e_l x + f_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2 + e_l x + f_l)^2} + \cdots + \frac{B_{lm_l}x + C_{lm_l}}{(x^2 + e_l x + f_l)^{m_l}}
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir diesen Ansatz mit $q(x)$ so erhalten wir eine Gleichung zwischen Polynomen und mittels Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für die Zahlen A_{ij}, B_{ij} und C_{ij}. Mit etwas linearer Algebra lässt sich zeigen, dass dieses Gleichungssystem stets eine eindeutige Lösung besitzt. Damit ist das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ also auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{(x - a)^k} \qquad \text{und} \qquad \int \frac{x + c}{(x^2 + ex + f)^k} dx \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } e^2 - 4f < 0$$

zurückgeführt.

Im letzten Schritt bestimmen wir nun diese Integrale. Der erste Typ ist besonders leicht, denn mit Hilfe der Substitution $y = x - a$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{(x - a)^k} = \int \frac{dy}{y^k} = \frac{1}{(1 - k)y^{k-1}} = \frac{1}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} \qquad \text{falls } k \neq 1$$

und

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \ln|x-a| \qquad \text{falls } k=1.$$

Für den anderen Typ gilt:[83]

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+ex+f} &= \frac{2}{\sqrt{4f-e^2}} \arctan \frac{2x+e}{\sqrt{4f-e^2}} \\
\int \frac{xdx}{x^2+ex+f} &= \frac{\ln(x^2+ex+f)}{2} - \frac{e}{2}\int \frac{dx}{x^2+ex+f} \\
\int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^k} &= \frac{2x+e}{(k-1)(4f-e^2)(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
&\quad + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4f-e^2)} \int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
\int \frac{xdx}{(x^2+ex+f)^k} &= -\frac{1}{2(k-1)(x^2+ex+f)^{k-1}} \\
&\quad - \frac{e}{2}\int \frac{dx}{(x^2+ex+f)^k} \qquad k \geq 2.
\end{aligned} \tag{140}$$

Mit Hilfe dieser Formeln können schließlich alle in der Partialbruchzerlegung auftretenden Integrale bestimmt werden.

5.8.1. Beispiel. Wir wollen die Diskussion der Partialbruchzerlegung mit einem weiteren Beispiel abschließen. Betrachte das Integral

$$\int \frac{3x^5+6x^4+6x^3+14x^2+x+2}{x^6+2x^4+x^2} dx$$

Das Zählerpolynnom hat bereits kleineren Grad als das Nennerpolynom, die Polynomdivision entfällt daher. Beachte, dass der Nenner wie folgt faktorisiert:

$$x^6+2x^4+x^2 = x^2(x-\mathbf{i})^2(x+\mathbf{i})^2$$

Daraus sehen wir auch, dass Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle haben. Da $(x-\mathbf{i})(x+\mathbf{i}) = x^2+1$ suchen wir reelle Zahlen $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sodass:

$$\frac{3x^5+6x^4+6x^3+14x^2+x+2}{x^6+2x^4+x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

Multiplikation mit dem Nenner und Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 & A_2 &= 2 & A_1+B_1 &= 3 \\
2A_1+B_1+B_2 &= 6, & A_2+C_1 &= 6 & 2A_2+C_1+C_2 &= 14
\end{aligned}$$

[83]Hier bezeichnet e nicht die Eulersche Zahl!

Diese hat die eindeutige Lösung $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $B_1 = 2$, $C_1 = 4$, $B_2 = 2$, $C_2 = 6$. Also erhalten wir folgende Darstellung unseres Integranden

$$\frac{3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 14x^2 + x + 2}{x^6 + 2x^4 + x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 4}{x^2 + 1} + \frac{2x + 6}{(x^2 + 1)^2}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 14x^2 + x + 2}{x^6 + 2x^4 + x^2} dx \\ = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx + 2\int \frac{x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (141)\end{aligned}$$

Den Formeln (140) entnehmen wir

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan(x) \qquad \int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{\arctan(x)}{2} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}$$

Zusammen mit (141) folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 14x^2 + x + 2}{x^6 + 2x^4 + x^2} dx \\ = \ln|x(x^2 + 1)| - \frac{2}{x} + 7\arctan(x) + \frac{3x - 1}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

5.8.2. Beispiel. Ist $R(y)$ eine rationale Funktion und $a \in \mathbb{R}$, dann liefert die Substitution $y = e^{ax}$, $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = ay$,

$$\int R(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{R(y)}{y} dy.$$

Da auch $\frac{R(y)}{y}$ eine rationale Funktion ist, lässt sich dieses Integral nun mittels Partialbruchzerlegung bestimmen. Wir wollen dies am Integral $\int \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} dx$ versuchen. Die Substitution $y = e^{ax}$, $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = ay$, liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1} dx = \int \frac{y - 1}{ay(y + 1)} dy = \frac{1}{a} \int \frac{2}{y + 1} - \frac{1}{y} dy \\ = \frac{2\ln|y + 1|}{a} - \frac{\ln|y|}{a} = \frac{2\ln(e^{ax} + 1)}{a} - x\end{aligned}$$

5.8.3. Beispiel. Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion, dh. es existieren Polynome $p(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ und $q(x, y) = \sum b_{ij} x^i y^j$, sodass $R(x, y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$. Dann liefert die Substitution

$$t = \tan(\varphi/2), \qquad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1+t^2}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

folgende Darstellung:

$$\int R(\sin\varphi, \cos\varphi) d\varphi = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \frac{2dt}{1+t^2} \tag{142}$$

Da $R\big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\big) \frac{2}{1+t^2}$ eine rationale Funktion ist, kann dieses Integral wieder mittels Partialbruchzerlegung bestimmt werden.

5.8.4. Beispiel. Es sei wieder $R(y, z)$ eine rationale Funktion. Dann liefert die Substitution $t = \sqrt[k]{ax+b}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{a}{kt^{k-1}}$

$$\int R\big(x, \sqrt[k]{ax+b}\big) dx = \frac{k}{a} \int R\Big(\frac{t^k - b}{a}, t\Big) t^{k-1} dt.$$

Da $R\Big(\frac{t^k-b}{a}, t\Big) t^{k-1}$ eine rationale Funktion ist, lassen sich diese Integrale ebenfalls mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung lösen.

5.9. Weitere Interpretationen des Integrals. Wir wollen zunächst Volumina von Rotationskörpern mit Hilfe des Integrals berechnen. Dazu sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \geq 0$. Wir betrachten den Rotationskörper

$$R_f := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; a \leq x \leq b,\; \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\Big\}. \tag{143}$$

Betrachte eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$. Dann ist

$$O_{\pi f^2, Z} = \sum_{i=1}^n \pi(x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)^2 = \sum_{i=1}^n \pi(x_i - x_{i-1}) \big(\sup f([x_{i-1}, x_i])\big)^2$$

gerade die Summe der Volumina von Zylindern der Höhe $x_i - x_{i-1}$ und Kreisförmiger Basis mit Radius $\sup f([x_{i-1}, x_i])$. Da R_f zur Gänze in der Vereinigung dieser Zylinder liegt, erwarten wir, dass das Volumen von R_f keiner als $O_{\pi f^2, Z}$ ist, für jede Zerlegung Z. Also sollte es auch kleiner als $\overline{I}_a^b(\pi f^2)$ sein. Ebenso ist

$$U_{\pi f^2, Z} = \sum_{i=1}^n \pi(x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)^2 = \sum_{i=1}^n \pi(x_i - x_{i-1}) \big(\inf f([x_{i-1}, x_i])\big)^2$$

die Summe der Volumina von Zylindern der Höhe $x_i - x_{i-1}$ und Kreisförmiger Basis mit Radius $\inf f([x_{i-1}, x_i])$. Die Vereinigung dieser Zylinder liegt zur Gänze in R_f, daher sollte das Volumen von R_f gößer als $U_{\pi f^2, Z}$ sein, für jede Zerlegung Z von $[a, b]$. Damit sollte es auch größer als $\underline{I}_a^b(\pi f^2)$ sein. Ist nun f^2 Riemann-integrierbar, dann $\overline{I}_a^b(\pi f^2) = \underline{I}_a^b(\pi f^2) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$, und wir werden auf folgende Formel geführt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, und f^2 Riemann-integrierbar, dann interpretieren wir das Integral

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx \tag{144}$$

als das Volumen des Rotationskörpers R_f, siehe (143).

5.9.1. Beispiel. Wir berechnen das Volumen der Kugel mit Radius $r > 0$. Beachte, dass diese Kugel mit R_f übereinstimmt, wo $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$. Nach (144) ist ihr Volumen durch folgendes Integral gegeben:

$$\pi \int_{-r}^r f(x)^2 dx = \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi\big(r^2 x - \tfrac{x^3}{3}\big)\big|_{-r}^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Also hat die Kugel mit Radius $r > 0$ Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Als nächstes wollen wir die Länge des Graphen einer Funktion durch ein Integral ausdrücken. Sei also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Summe

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \tag{145}$$

ist genau die Länge eines Polygons durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$ bestehend aus n Geradenstücken. Wir erwarten, dass für gute f und hinreichend feine Zerlegungen Z diese Summen die gesuchte Länge des Graphen von f gut approximiert. Ist f differenzierbar, dann existieren nach Satz 4.2.6 Stellen $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

und die obige Summe lässt sich wie folgt schreiben:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}$$

Dies ist eine Riemannsumme der Funktion $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, siehe Abschnitt 5.4. Ist $x \mapsto \sqrt{1 + f'(x)^2}$ Riemann-integrierbar, dann sind für hinreichend feine Zerlegungen Z die Summen (145) beliebig nahe an $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, und wir werden auf folgende Formel geführt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass $x \mapsto \sqrt{1 + f'(x)^2}$ Riemann-integrierbar ist, dann interpretieren wir das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \tag{146}$$

als die Länge des Graphen von f.

5.9.2. Beispiel. Wir wollen den Umfang des Kreises mit Radius $r > 0$ bestimmen. Nach (146) ist dieser durch das Integral

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

gegeben, wobei $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

und für den Umfang des Kreises erhalten wir daher die Darstellung

$$\begin{aligned}2\int_{-r}^{r}\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}} &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^2\cos(t)dt}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2(t)}}\\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^2\cos(t)dt}{r\sqrt{1-\sin^2(t)}} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^2\cos(t)dt}{r\cos(t)} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}rdt = 2\pi r\end{aligned}$$

wobei dir die Substitution $x = r\sin(t)$, also $dx = r\cos(t)dt$, benutzt haben. Daher hat der Kreis mit Radius $r > 0$ den Umfang $2\pi r$.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, dann bezeichnen wir mit

$$F_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\right\}$$

die Rotationsfläche die von f erzeugt wird. Ist die Funktion $x \mapsto f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$ Riemann-integrierbar, dann interpretieren wir den Wert des Integrals

$$2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

als den Flächeninhalt der Rotationsfläche F_f. Dies kann ähnlich wie die Integralformel für die Länge des Graphen einer Funktion motiviert werden.

5.9.3. Beispiel. Wir wollen die Oberfläche der Kugel mit Radius $r > 0$ bestimmen. Beachte, dass die Oberfläche dieser Kugel mit F_f übereinstimmt, wo $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$. Daher ist ihr Flächeninhalt durch folgendes Integral gegeben:

$$2\pi\int_{-r}^{r}f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = r$$

und wir erhalten folgende Darstellung für den gesuchten Flächeninhalt:

$$2\pi\int_{-r}^{r}rdx = 4\pi r^2$$

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius $r > 0$ ist daher $4\pi r^2$.

Ist $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\rho \geq 0$, so können wir diese als die Dichte eines auf $[a,b]$ verteilten Mediums interpretieren. Der Wert des Integrals

$$\int_a^b \rho(x)dx$$

entspricht dann der Gesamtmasse. Ist darüberhinaus $x_0 \in \mathbb{R}$, so entspricht der Wert des Integrals

$$\int_a^b (x - x_0)\rho(x)dx$$

dem Drehmoment bezüglich der Achse x_0. Der Schwerpunkt soll jenes $x_s \in \mathbb{R}$ sein, bei dem das Drehmoment verschwindet, dh.

$$0 = \int_a^b (x - x_s)\rho(x)dx = \int_a^b x\rho(x)dx - x_s \int_a^b \rho(x)dx.$$

Für den Schwerpunkt erhalten wir daher die Formel:

$$x_s = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$$

Aus Proposition 5.2.7 erhalten wir übrigens $a \leq x_s \leq b$, dh. der Schwerpunkt muss im Intervall $[a,b]$ liegen. Die Liste der Interpretationen des Integrals ließe sich natürlich beliebig verlängern.

5.10. Uneigentliche Integrale. Wir wollen nun auch über nicht kompakte Intervalle wie etwa $[a,\infty)$, (a,b), $(a,b]$ oder $\mathbb{R}$ integrieren.

5.10.1. Definition. Es sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $r > a$ die Einschränkung $f|_{[a,r]} : [a,r] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx$$

so nennen wir das *uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent. In diesem Fall sei der Wert des uneigentlichen Integrals eben dieser Grenzwert, dh.

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx.$$

Konvergiert das uneigentliche Integral nicht, so heißt es *divergent.*

5.10.2. Beispiel. Folgendes uneigentliche Integral ist konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

denn für jedes $r > 0$ ist $\int_0^r e^{-x}dx = -e^{-x}\big|_0^r = 1 - e^{-r}$, und daher

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty} 1 - e^{-r} = 1.$$

5.10.3. Beispiel. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$ konvergiert genau dann wenn $\lambda > 0$, und in diesem Fall gilt

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst den Fall $\lambda = 0$. Dann ist

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-0\cdot x} dx = \lim_{r\to\infty} r = \infty,$$

also konvergiert das Integral nicht. Für $\lambda \neq 0$ folgt die Behauptung aus

$$\int_0^r e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{x=0}^{x=r} = \frac{1-e^{-\lambda r}}{\lambda}$$

mit $r \to \infty$. Beachte, dass der Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \frac{1-e^{-\lambda r}}{\lambda}$ genau dann existiert, wenn $\lambda > 0$, und in diesem Fall gilt $\lim_{r\to\infty} \frac{1-e^{-\lambda r}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.

5.10.4. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \cos(x) dx$$

konvergiert nicht, denn $\int_0^r \cos(x) dx = \sin(x)\big|_0^r = \sin(r)$, aber der Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \sin(r)$ existiert nicht.

5.10.5. Proposition. *Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f(x)dx$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ beide konvergieren. Weiters sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren auch die folgenden uneigentlichen Integrale und haben die angegebenen Werte:*

$$\int_a^\infty f(x) + g(x) dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx$$

$$\int_a^\infty \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^\infty f(x)dx$$

Beweis. Nach Voraussetzung existieren die folgenden Grenzwerte und es gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \qquad \lim_{r\to\infty} \int_a^r g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx$$

Nach Proposition 5.2.2 ist weiters

$$\int_a^r f(x) + g(x) dx = \int_a^r f(x)dx + \int_a^r g(x)dx.$$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte, siehe Abschnitt 3.9, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x) + g(x) dx &= \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)dx + \lim_{r\to\infty} \int_a^r g(x)dx \\ &= \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx\end{aligned}$$

Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)+g(x)dx$ und hat den angegebenen Wert. Ganz analog lässt sich die Aussage über das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \lambda f(x)dx$ zeigen. □

5.10.6. Proposition. *Es seien $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f(x)dx$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ beide konvergieren. Gilt $f \leq g$, dann auch*

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Beweis. Nach Proposition 5.2.7 gilt $\int_a^r f(x)dx \leq \int_a^r g(x)dx$, für jedes $r > a$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt daher

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)dx \leq \lim_{r\to\infty}\int_a^r g(x)dx,$$

und dies ist genau die Aussage der Proposition. □

5.10.7. Proposition. *Es sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert. Weiters sei $b \in [a,\infty)$. Dann konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_b^\infty f(x)dx$ und es gilt*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$$

Beweis. Nach Proposition 5.2.6 gilt für jedes $r > b$

$$\int_a^r f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^r f(x)dx. \tag{147}$$

Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert $\lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)dx$. Wegen (147) muss auch der Grenzwert $\lim_{r\to\infty}\int_b^r f(x)dx$ existieren, und die behauptete Formel gelten. □

5.10.8. Proposition. *Es sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $r > a$ die Einschränkung $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist. Weiters sei $f \geq 0$. Dann sind äquivalent:*

a) *Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert.*
b) *Es existiert $K \in \mathbb{R}$, sodass für alle $r \geq a$ gilt $\int_a^r f(x)dx \leq K$.*

Beweis. Da $f \geq 0$, ist die Funktion $F(r) := \int_a^r f(x)dx$ monoton wachsend. Also existiert der Grenzwert $\lim_{r\to\infty} F(r)$ genau dann, wenn die Funktion F nach oben beschränkt ist. □

5.10.9. Satz. *Es sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $r > a$ die Einschränkung $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist. Dann sind äquivalent:*

a) *Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert.*
b) *Das folgende Cauchykriterium ist erfüllt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $r_0 \geq a$ mit folgender Eigenschaft: Sind $r, s \geq r_0$ dann ist $\left|\int_s^r f(x)dx\right| < \varepsilon$.*

Beweis. Für $r, s \geq a$ haben wir
$$\int_a^r f(x)dx - \int_a^s f(x)dx = \int_s^r f(x)dx.$$
Die Aussage folgt daher sofort aus Satz 3.9.9. □

5.10.10. Bemerkung. Beachte, dass Satz 5.10.9 ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz uneigentlicher Integrale liefert, dessen Formulierung nicht den Grenzwert verwendet.

5.10.11. Definition. Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $r > a$ die Einschränkung $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist. Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$, so nennen wir $\int_a^\infty f(x)dx$ *absolut konvergent.*

5.10.12. Proposition. *Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, sodass $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergiert. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$, und es gilt*
$$\Big|\int_a^\infty f(x)dx\Big| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{148}$$

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert $\int_a^\infty |f(x)|dx$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Satz 5.10.9 existiert $r_0 \geq a$, sodass $\int_s^r |f(x)|dx < \varepsilon$ für alle $r, s \geq r_0$. Nach Korollar 5.3.9 ist daher auch
$$\Big|\int_s^r f(x)dx\Big| \leq \int_s^r |f(x)|dx < \varepsilon,$$
für alle $r, s \geq r_0$. Nach Satz 5.10.9 konvergiert daher das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$. Aus
$$\Big|\int_a^r f(x)dx\Big| \leq \int_a^r |f(x)|dx$$
folgt mit $r \to \infty$ auch (148). □

5.10.13. Proposition (Majorantenkriterium). *Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, deren Einschränkungen auf $[a, r]$ Riemann-integrierbar sind, für jedes $r > a$. Weiters sei $|f| \leq g$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergiere. Dann ist $\int_a^\infty f(x)dx$ (absolut) konvergent.*

Beweis. Da $g \geq 0$ und weil $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergiert, existiert $K \geq 0$, sodass $\int_a^r g(x)dx \leq K$, für alle $r \geq a$, siehe Proposition 5.10.8. Wegen $|f| \leq g$ gilt dann auch $\int_a^r |f(x)|dx \leq K$, für alle $r \geq a$. Nach Proposition 5.10.8 konvergiert daher $\int_a^\infty |f(x)|dx$. Also ist $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergent, und nach Proposition 5.10.12 auch konvergent. □

5.10.14. Proposition (Minorantenkriterium). *Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, deren Einschränkungen auf $[a, r]$ Riemann-integrierbar sind, für jedes $r > a$. Weiters sei $0 \leq f \leq g$, und $\int_a^\infty f(x)dx$ divergiere. Dann divergiert auch $\int_a^\infty g(x)dx$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 5.10.13. □

5.10.15. Beispiel. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha < -1$, und in diesem Fall gilt

$$\int_1^\infty x^\alpha = \frac{-1}{\alpha+1}, \qquad \alpha < -1.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = -1$. Dann ist

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r x^{-1} dx = \lim_{r\to\infty} \ln(r) = \infty,$$

also divergiert das Integral. Sei nun $\alpha \neq -1$. Dann gilt

$$\int_1^r x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{x=1}^{x=r} = \frac{r^{\alpha+1}-1}{\alpha+1},$$

der Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \frac{r^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$ existiert genau dann, wenn $\alpha < -1$, und in diesem Fall hat er den angegebenen Wert $\frac{-1}{\alpha+1}$.

5.10.16. Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Wir erinnern uns, dass f auch bei $x = 0$ stetig ist, denn $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \tag{149}$$

konvergiert, aber es ist nicht absolut konvergent. Nach Proposition 5.10.7 genügt es zu zeigen, dass $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_1^r \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^r - \int_1^r \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Beachte, dass

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^r = \lim_{r\to\infty} \cos(1) - \frac{\cos(r)}{r} = \cos(1).$$

Daher konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ genau dann, wenn $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ konvergiert. Beachte, dass $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq x^{-2}$. Nach Beispiel 5.10.15 ist daher $\int_1^\infty x^{-2} dx$ eine konvergente Majorante von $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. Nach Proposition 5.10.13 konvergiert daher auch $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. Damit ist gezeigt, dass (149) konvergiert.[84] Nun zu der Behauptung,

[84]Der Wert des Integrals (149) ist übrigens $\pi/2$, aber das können wir hier noch nicht beweisen.

dass (149) nicht absolut konvergiert. Dazu beobachten wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{(k+1)\pi} dx = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Daraus schließen wir

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$ folgt auch $\lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \infty$. Also divergiert $\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$, und damit ist $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ nicht absolut konvergent.

5.10.17. Bemerkung. Analog zu den uneigentlichen Integralen $\int_a^{\infty} f(x)dx$ können wir auch die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ behandeln. Für alle bisherigen Resultate gelten entsprechende Aussagen auch für diese neuen uneigentlichen Integrale.

5.10.18. Definition. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $r > 0$ die Einschränkung $f|_{[-r,r]}$ Riemann-integrierbar ist. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ heißt konvergent, falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass sowohl $\int_a^{\infty} f(x)dx$ als auch $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ beide konvergieren. In diesem Fall sei der Wert des uneigentlichen Integrals wie folgt definiert:[85]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

5.10.19. Beispiel. Das folgende uneigentliche Integral konvergiert und hat den angegebenen Wert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Dazu erinnern wir uns, dass

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)\Big|_a^b = \arctan(b) - \arctan(a).$$

Damit folgt

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} \arctan(r) = \pi/2$$

und ebenso

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} -\arctan(-r) = \pi/2.$$

[85]Nach Proposition 5.10.7 hängt der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ nicht von der Wahl von a ab.

5.10.20. Bemerkung. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)dx$$

so wird dieser der *Hauptwert* des Integrals genannt. Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ im Sinn von Definition 5.10.18, dann existiert natürlich auch sein Hauptwert. Existiert der Hauptwert, dann muss das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ i.A. aber nicht konvergieren. Etwa ist

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\sin(x)dx = \lim_{r\to\infty} -\cos(x)\Big|_{-r}^{r} = \lim_{r\to\infty}\cos(-r)-\cos(r) = 0,$$

aber das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x)dx$ konvergiert nicht, denn $\int_0^{\infty}\sin(x)dx$ konvergiert nicht, vgl. Beispiel 5.10.4.

5.10.21. Definition. Es sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $a < r < b$ die Einschränkung $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ heißt konvergent, falls der Grenzwert $\lim_{r\to b-}\int_a^r f(x)dx$ existiert. In diesem Fall wird der Wert des uneigentlichen Integrals wie folgt definiert:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{r\to b-}\int_a^r f(x)dx.$$

Analog definiert man uneigentliche Integrale von Funktionen die auf $(a,b]$ definiert sind. Für Funktionen die auf Intervallen der Form (a,b), $(-\infty,b)$ oder (a,∞) definiert sind, defnieren wir die uneigentlichen Integrale wie in Definition 5.10.18.

5.10.22. Bemerkung. Entsprechend modifizierte Aussagen der Resultate dieses Abschnitts gelten auch für die uneigentlichen Integrale aus Definition 5.10.21.

5.10.23. Beispiel. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha dx$ konvergeirt genau dann, wenn $\alpha > -1$, und in diesem Fall gilt

$$\int_0^1 x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \qquad \alpha > -1.$$

Für $\alpha = -1$ folgt dies aus $\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(\varepsilon) = -\infty$, und für $\alpha \neq -1$ aus

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1-\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

5.10.24. Bemerkung. Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann gilt $\lim_{r\to b-}\int_a^r f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ wo die rechte Seite das übliche Riemannintegral bezeichnet, siehe Proposition 5.2.8. In diesem Fall stimmt daher das übliche Riemann-integral mit dem uneigentlichen Integral überein.

5.10.25. Beispiel. Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \tag{150}$$

konvergiert genau dann wenn $s > 0$. Die Funktion

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

wird die *Gammafunktion* genannt. Wir betrachten zunächst $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dx$. Da $\lim_{t\to\infty} t^{s-1}e^{-t/2} = 0$ existiert eine Konstante $C_s > 0$, sodass $t^{s-1}e^{-t/2} \leq C_s$ für alle $t \in [1, \infty)$. Damit gilt

$$t^{s-1}e^{-t} \leq C_s e^{-t/2} \qquad \text{für alle } t \in [1, \infty).$$

Nach Beispiel 5.10.3 ist daher $\int_1^\infty C_s e^{-t/2} dt$ eine konvergente Majorante von $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$, also konvergiert $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ für jedes $s \in \mathbb{R}$, siehe Proposition 5.10.13. Nun zu $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$: Es gilt

$$e^{-1}t^{s-1} \leq t^{s-1}e^{-t} \leq t^{s-1} \qquad \text{für alle } t \in (0, 1].$$

Für $s > 0$ ist daher $\int_0^1 t^{s-1}dt$ eine konvergente Majorante von $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$, siehe Beispiel 5.10.23, also konvergiert auch $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$, siehe Proposition 5.10.13. Ist $s \leq 0$, dann ist $e^{-1}t^{s-1}$ eine divergente Minorante von $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$, also divergiert auch $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$, siehe Proposition 5.10.14. Daher sehen wir, dass (150) tatsächlich genau für $s > 0$ (absolut) konvergiert. Offensichtlich ist

$$\Gamma(1) = 1. \tag{151}$$

Die Gammafunktion erfüllt die folgende Funktionalgleichung:

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s + 1), \qquad s > 0 \tag{152}$$

denn mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_\varepsilon^r t^s e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=r} + \int_\varepsilon^r s t^{s-1} e^{-t} dt$$

und mit $\varepsilon \to 0$ und $r \to \infty$ folgt sofort (152). Aus (151) und (152) folgt mittels Induktion

$$\Gamma(n + 1) = n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Gammafunktion interpoliert daher zwischen den Fakultäten, die ja nur für natürliche Zahlen definiert sind.

6. Differentialgleichungen

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n-ter Ordnung* ist eine Gleichung die eine gesuchte Funktion $x \mapsto y(x)$ und ihre ersten n Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(n)}$ in Beziehung setzt:

$$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0. \tag{153}$$

Dabei ist $F : U \to \mathbb{R}$ eine auf einer Teilmenge U von $\mathbb{R}^{n+2}$ definierte Funktion. Unter einer Lösung der Differentalgleichung (153) verstehen wir jede auf einem Intervall definierte und n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Damit dies Sinn macht, müssen wir natürlich auch

$$\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in U \qquad \text{für alle } x \in I$$

fordern. Besonders interessiert sind wir an *maximalen Lösungen,* dh. Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ die nicht auf ein echt größeres Intervall $\tilde{I} \supsetneq I$ ausgedehnt werden können, alle anderen Lösungen erhalten wir dann durch Einschränkung aus den maximalen Lösungen.

Liegt die Gleichung in der Form

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\big)$$

vor, so sprechen wir von einer *expliziten* Differentialgleichung. Die Form (153) wird hingegen als *implizite* Differentialgleichung bezeichnet.

Ist die Differentialgleichung vom Typ

$$F\big(y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y^{(n)} = f\big(y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{154}$$

so sprechen wir von einer *autonomen* Differentialgleichung. Ist y eine Lösung der autonomen Gleichung (154) dann ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ offensichtlich auch die Abbildung $x \mapsto y(x - x_0)$ eine Lösung von (154).

6.1. Einige Beispiele.

6.1.1. Beispiel. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte die autonome gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \lambda y. \tag{155}$$

Offensichtlich ist für jedes $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x) = Ce^{\lambda x}$ eine maximale Lösung von (155). Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass dies *alle* maximalen Lösungen von (154) sind. Sei dazu $y : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y'(x) = \lambda y(x)$ für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} y(x)e^{-\lambda x} = y'(x)e^{-\lambda x} - y(x)\lambda e^{-\lambda x} = \lambda y(x)e^{-\lambda x} - y(x)\lambda e^{-\lambda x} = 0$$

also muss die Funktion $x \mapsto y(x)e^{-\lambda x}$ konstant sein, dh. es existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $y(x)e^{-\lambda x} = C$, also $y(x) = Ce^{\lambda x}$, für alle $x \in I$. Damit sehen wir, dass die Menge der maximalen Lösungen von (154) durch

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = Ce^{\lambda x}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{156}$$

gegeben ist, eine für jedes $C \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung (154) hat also unendlich viele maximale Lösungen. Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so sehen wir aus (156), dass es genau eine maximale Lösung y von (154) gibt, die zusätzlich der *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0$$

genügt, es muss nämlich $C = y_0 e^{-\lambda x_0}$ gewählt werden. Wir können dies auch so formulieren: Zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine maximale Lösung von (154) deren Graph durch den Punkt (x_0, y_0) geht.

6.1.2. Beispiel. Betrachte die autonome gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y^2. \tag{157}$$

Offensichtlich ist die Nullfunktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := 0 \tag{158}$$

eine maximale Lösung von (157). Eine einfache Rechnung zeigt, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$y : (a, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := \frac{1}{a - x} \tag{159}$$

und

$$y : (-\infty, a) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := \frac{1}{a - x} \tag{160}$$

maximale Lösungen von (157) sind. Beachte, dass außer (158) keine dieser Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, dann wird genau eine der Lösungen (158)–(160) die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllen. Ist nämlich $y_0 = 0$ dann tut dies (158); ist $y_0 \neq 0$ dann sei $a = x_0 + \frac{1}{y_0}$ und es wird, abhängig vom Vorzeichen von y_0, entweder (159) (falls $y_0 < 0$) oder (160) (falls $y_0 > 0$) der Anfangsbedingung genügen. Nach Satz 6.1.4 unten, müssen dies daher alle maximalen Lösungen von (157) sein. Wieder existiert daher zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine maximale Lösung von (157) deren Graph durch den Punkt (x_0, y_0) geht.

6.1.3. Beispiel. Betrachte die autonome gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Wieder haben wir die triviale maximale Lösung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := 0. \tag{161}$$

Darüber hinaus ist für jedes $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, auch

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{falls } x \leq a \\ 0 & \text{falls } a \leq x \leq y \\ (x-b)^2 & \text{falls } x \geq b \end{cases}$$

eine maximale Lösung von (161). Zu gegebenen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ finden wir daher wieder eine maximale Lösung von (161) die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genügt. Diesmal gibt es aber unendlich viele Lösungen dieses Anfangswertproblems.

6.1.4. Satz (Picard–Lindelöf). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Teilmenge. Weiters sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in den letzten n Variablen. Schließlich sei $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in U$. Dann existiert genau eine maximale Lösung von*

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{162}$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{163}$$

genügt.

6.1.5. Bemerkung. Wir wissen zwar noch nicht was eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, auch nicht was eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sein soll, noch was unter lokal Lipschitz-stetig in den letzten n Variablen gemeint ist. Es soll hier nur angemerkt werden, dass dies relative schwache, und meist leicht verifizierbare, Voraussetzungen an f sind. Etwa erfüllt jedes stetig differenzierbare $f : U \to \mathbb{R}$ diese Bedingungen. Satz 6.1.4 liefert uns daher, unter realtiv schwachen Voraussetzungen, eindeutige maximale Lösungen des Anfangswertproblems (162) und (163). Etwa sind diese Voraussetzungen in den Beispielen 6.1.1 und 6.1.2 erfüllt. Die Funktion $y \mapsto \sqrt{|y|}$ aus Beispiel 6.1.3 ist bei 0 nicht lokal Lipschitz-stetig, also ist Satz 6.1.4 nicht anwendbar, und tatsächlich haben wir dort ja unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems gefunden. Beachte, dass Satz 6.1.4 auch bei ganz konkreten Beispielen hilfreich ist, denn haben wir einmal zu jeder Anfangsbedingnung eine Lösung gefunden, dann kann es keine weiteren mehr geben, siehe Satz 6.1.4, und wir wissen damit, dass wir tatsächlich schon alle Lösungen gefunden haben. Schließlich sei noch angemerkt, dass der Beweis von Satz 6.1.4 eine Folge von Funktionen liefert die rasch gegen die gesucht Lösung konvergiert.

6.2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Wir wollen in diesem Abschnitt gewöhnliche Differentialgleichungen der Bauart

$$y' = f(x)g(y) \tag{164}$$

besprechen. Aus Satz 6.1.4 erhalten wir zunächst:

6.2.1. Korollar. *Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig und $g : K \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig,*[86] *wobei J und K offene Intervalle bezeichnen. Weiters seien $x_0 \in J$ und $y_0 \in K$. Dann existiert genau eine maximale Lösung y des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x)g(y) \qquad \textit{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Um nun tatsächlich Lösungen dieser Gleichung zu finden gehen wir wie folgt vor. Wir schreiben die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ in der Form

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

und erhalten

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Gelingt es diese Stammfunktionen zu bestimmen, so brauchen wir die resultierende Gleichung nur noch nach y aufzulösen und erhalten Lösungen unserer Differentialgleichung. Durch entsprechende Wahl der Integrationskonstanten C stellen wir dann noch sicher, dass auch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist.

6.2.2. Beispiel. Wir wollen folgende Differentialgleichung behandeln:

$$y' = 2xe^y$$

Wir schreiben dies in der Form

$$e^{-y}dy = 2xdx$$

und erhalten

$$\int e^{-y}dy = \int 2xdx - C.$$

Integration liefert nun

$$-e^{-y} = x^2 - C$$

und damit

$$y(x) = -\ln(-x^2 + C).$$

Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, und wählen wir $C = x_0^2 + e^{-y_0}$, so erhalten wir eine Lösung mit $y(x_0) = y_0$. Genauer, ist

$$y(x) = -\ln\bigl(-x^2 + x_0^2 + e^{-y_0}\bigr), \qquad |x| < \sqrt{x_0^2 + e^{-y_0}}$$

die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = 2xe^y$ und $y(x_0) = y_0$, denn für $x \to \pm\sqrt{x_0^2 + e^{-y_0}}$ gilt $y(x) \to \infty$, die Lösungen können daher nicht ausgedehnt werden, sind also maximal. Damit haben wir alle maximalen Lösungen der Gleichung $y' = 2xe^y$ bestimmt, vgl. Korollar 6.2.1.

[86] Dies ist z.B. immer dann der Fall wenn g stetig differenzierbar ist.

6.2.3. Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung:

$$y' = y + y^2. \tag{165}$$

Wieder schreiben wir dies in der Form

$$\frac{dy}{y(y+1)} = dx,$$

und erhalten:

$$\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int dx - C$$

Da $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ folgt $\int \frac{dy}{y(y+1)} = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$ also

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x - C.$$

Ist $\frac{y}{y+1} > 0$ so liefert dies

$$y = \frac{1}{e^{C-x} - 1}$$

und ist $\frac{y}{y+1} < 0$ dann

$$y = \frac{-1}{e^{C-x} + 1}$$

Daraus erhalten wir drei Familien maximaler Lösungen:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y(x) = \frac{-1}{e^{C-x} + 1} \qquad C \in \mathbb{R} \tag{166}$$

$$y : (C, \infty) \to \mathbb{R} \qquad y(x) = \frac{1}{e^{C-x} - 1} \qquad C \in \mathbb{R} \tag{167}$$

$$y : (-\infty, C) \to \mathbb{R} \qquad y(x) = \frac{1}{e^{C-x} - 1} \qquad C \in \mathbb{R} \tag{168}$$

Wollen wir die Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ bedienen, so müssen wir $C = x_0 - \ln\left|\frac{y_0}{y_0+1}\right|$ wählen. Mit diesem C erfüllt dann (166) (falls $-1 < y_0 < 0$); (167) (falls $y_0 < -1$); oder (168) (falls $0 < y_0$) die Anfangsbedingung. Für $y_0 = 0$ bzw. $y_0 = -1$ haben wir die beiden konstanten Lösungen

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = -1.$$

Damit haben wir zu jeder Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ eine maximale Lösung von (165) gefunden. Nach Korollar 6.2.1 müssen dies daher alle maximalen Lösungen von (165) sein.

6.2.4. Bemerkung. Ist in (164) sogar $g = 1$, dann lautet die Gleichung bloss $y'(x) = f(x)$, dh. y ist eine Stammfunktion von f. Wir können daher Stammfunktionen als Lösungen sehr einfacher Differentialgleichungen verstehen.

6.3. Lineare Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung der Art

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x) \tag{169}$$

wird *lineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung* genannt. Dabei sind $a_i, b : I \to \mathbb{R}$ stetige, auf einem gemeinsamen Intervall I definierte, Funktionen. Verschwindet der Term $b(x)$, und hat die Gleichung also die Form

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} \tag{170}$$

so sprechen wir von einer *homogenen* Differentialgleichung. Entsprechend wird (169) auch als *inhomogene* lineare Differentialgleichung bezeichnet. Die Differentialgleichung (170) heißt die zu (169) *assoziierte homogene* Differentialgleichung. Aus Satz 6.1.4 erhalten wir sofort

6.3.1. Korollar. *Für jedes $x_0 \in I$ und beliebige $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ existiert genau eine maximale Lösung y von* (169) *die der Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

genügt. Jede dieser maximalen Lösungen ist auf ganz I definiert.[87]

6.3.2. Proposition. *Die Menge der maximalen Lösungen von* (170) *bildet einen Vektorraum der Dimension n.*

Beweis. Sind $y, \tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen von (170) und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind natürlich auch $y + \tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ sowie $\lambda y : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (170). Also bildet die Menge der Lösungen einen Vektorraum. Es bezeichne $\mathcal{L}$ diesen Vektorraum. Fixiere $x_0 \in I$ und definiere eine lineare Abbildung durch

$$\Phi : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(y) := \big(y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\big).$$

Nach Korollar 6.2.1 ist Φ bijektiv. Also hat $\mathcal{L}$ die Dimension n. □

Unter einem *Fundamentalsystem* der homogenen Gleichung (170) verstehen wir jede Basis des Vektorraums aller maximalen Lösungen von (170), vgl. Proposition 6.3.2. Will man die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen Gleichung (170) beschreiben, so ist es zweckmäßig einfach ein Fundamentalsystem von Lösungen $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ anzugeben. Jede beliebige andere Lösung erhalten wir dann als (eindeutige) Linearkombination dieses Fundamentalsystems:

$$y(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(x), \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Soll (169) gelöst werden so ist die folgende Beobachtung sehr hilfreich: Die Differenz zweier Lösungen von (169) ist eine Lösung der homogenen Gleichung (170). Ist also $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem von (170) und ist ψ eine beliebige maximale Lösung von (169), dann lässt sich jede Lösung von (169) eindeutig in der Form

$$y(x) = \psi(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(x) \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

[87] Die letzte Aussage folgt nicht aus Satz 6.1.4. Auf den nicht besonders schweren Beweis wollen wir aber nicht eingehen.

schreiben.[88] Die Bestimmung aller Lösungen von (169) zerfällt daher in zwei Teilprobleme: 1) Bestimmung eines Fundamentalsystems $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ der assoziierten homogenen Gleichung; und 2) Bestimmung einer beliebigen (möglichst einfachen) Lösung ψ von (169).

6.4. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir wollen in diesem Abschnitt lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{171}$$

behandeln. wieder sind hier $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige, auf einem gemeinsamen Intervall I definierte, Funktionen. Wir beginnen mit der assoziierten homogenen Gleichung $y' = a(x)y$.

6.4.1. Proposition. *Es sei $a : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big)$$

die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y \qquad \textit{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Beweis. Durch Differenzieren erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{d}{dx} y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big) &= y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big) \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} a(t)dt \\ &= y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big) a(x) = y(x)a(x) \end{aligned}$$

Also ist dies tatsächlich eine Lösung, die offensichtlich auch maximal ist und die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt. Nach Korollar 6.3.1 sind dies alle maximalen Lösungen. □

6.4.2. Bemerkung. Nach Proposition 6.3.2 hat der Vektorraum der Lösungen von $y' = a(x)y$ die Dimension 1. Nach Proposition 6.4.1 bildet etwa

$$\varphi = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big)$$

ein Fundamentalsystem.

Um (171) zu lösen müssen wir noch eine beliebige Lösung von (171) finden. Es stellt sich heraus, dass hier der folgende Ansatz stets zum Ziel führt:

$$y(x) = C(x) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\Big) \tag{172}$$

[88] Die Menge der Lösungen von (169) bildet einen affinen Raum.

Dies wird als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Differenzieren wir diesen Ansatz so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y'(x) = C'(x)\exp\Big(\int_{x_0}^x a(t)dt\Big) + C(x)a(x)\exp\Big(\int_{x_0}^x a(t)dt\Big)\\
= \big(C'(x) + C(x)a(x)\big)\exp\Big(\int_{x_0}^x a(t)dt\Big)
\end{aligned}
$$

Daher erfüllt (172) die Gleichung (171) genau dann wenn gilt

$$\big(C'(x) + C(x)a(x)\big)\exp\Big(\int_{x_0}^x a(t)dt\Big) = a(x)C(x)\exp\Big(\int_{x_0}^x a(t)dt\Big) + b(x)$$

oder äquivalent:

$$C'(x) = b(x)\exp\Big(-\int_{x_0}^x a(t)dt\Big)$$

Daraus lässt sich jetzt aber $C(x)$ mittels Integration bestimmen:

$$C(x) = \int_{x_0}^x b(s)\exp\Big(-\int_{x_0}^s a(t)dt\Big)ds$$

Wir fassen dies zusammen:

6.4.3. Proposition. *Es seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Setze*

$$A(x) := \int_{x_0}^x a(t)dt \qquad \text{und} \qquad \psi(x) := \int_{x_0}^x b(s)e^{-A(s)}ds \cdot e^{A(x)}.$$

Dann ist

$$y(x) = \psi(x) + y_0 e^{A(x)}$$

die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad \text{und} \qquad y(x_0) = y_0.$$

6.4.4. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen folgender linearen Differentialgleichung erster Ordnung bestimmen:

$$y' = \frac{y}{x} + x^3, \qquad x > 0 \tag{173}$$

Nach Proposition 6.4.1 ist

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_1^x \frac{dt}{t}\Big) = \exp\big(\ln(x) - \ln(1)\big) = x$$

eine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$. Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung (173) zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten, machen also folgenden Ansatz:

$$\psi(x) = C(x)x \tag{174}$$

Dann gilt

$$\psi'(x) = C'(x)x + C(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\psi(x)}{x} + x^3 = C(x) + x^3$$

Also löst (174) die Gleichung (173) genau dann wenn

$$C'(x) = x^2.$$

Durch Integrieren finden wir nun $C(x) = x^3/3$, und damit ist

$$\psi(x) = C(x)x = x^4/3$$

eine Lösung von (173). Jede Lösung von (173) lässt sich daher eindeutig in der Form

$$y(x) = x^4/3 + \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

schreiben.

6.4.5. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichung erster Ordnung bestimmen:

$$y' = xy + e^{x^2/2} \tag{175}$$

Nach Proposition 6.4.1 ist

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_0^x t dt\Big) = e^{x^2/2}$$

eine Lösung der assoziierten homogenen Differentialgleichung $y' = xy$. Um eine Lösung von (175) zu finden, variieren wir wieder die Konstante und machen folgenden Ansatz:

$$\psi(x) = C(x)e^{x^2/2}$$

Dann gilt

$$\psi'(x) = C'(x)e^{x^2/2} + C(x)xe^{x^2/2} \quad \text{und} \quad x\psi(x) + e^{x^2/2} = C(x)xe^{x^2/2} + e^{x^2/2}$$

also löst $\psi(x)$ die Gleichung (175) genau dann wenn $C'(x) = 1$ gilt. Durch Intergration finden wir $C(x) = x$. Damit ist

$$\psi(x) = C(x)e^{x^2/2} = xe^{x^2/2}$$

eine Lösung von (175). Jede Lösung von (175) lässt sich daher eindeutig in der Form

$$y(x) = xe^{x^2/2} + \lambda e^{x^2/2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

schreiben.

6.5. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir schränken uns nun auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ein. Darunter verstehen wir eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x) \tag{176}$$

wobei nun $a_i \in \mathbb{R}$ Konstanten und $b : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion sind. In diesem Fall ist es besonders leicht ein Fundamentalsystem von Lösungen der assoziierten homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{177}$$

anzugeben, siehe Proposition 6.5.1 unten. Unter dem *charakteristischen Polynom* der Differentialgleichung verstehen wir das Polynom

$$p(\xi) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + a_{n-2}\xi^{n-2} + \cdots + a_1\xi + a_0, \tag{178}$$

wir erhalten es indem wir in der homogenen Gleichung die k-te Ableitung $y^{(k)}$ durch die k-te Potenz ξ^k ersetzen.[89] Kennt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, so lässt sich ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung sofort hinschreiben. Genauer haben wir folgende

6.5.1. Proposition. *Es sei*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{179}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, und

$$p(\xi) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + a_{n-2}\xi^{n-2} + \cdots + a_1\xi + a_0$$

ihr charakteristisches Polynom. Ist λ eine k-fache reelle Nullstelle von p, dann sind die Funktionen

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2e^{\lambda x}, \dots \quad x^{k-1}e^{\lambda x} \tag{180}$$

Lösungen von (179). *Ist $\alpha \pm \mathbf{i}\beta$ ein Paar komplex konjugierter Nullstellen*[90] *der Vielfachheit k, dann sind die Funktionen*

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\sin(x), \quad x^2e^{\alpha x}\sin(x), \quad \dots \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(x) \tag{181}$$

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x}\cos(x), \quad x^2e^{\alpha x}\cos(x), \quad \dots \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(x) \tag{182}$$

Lösungen von (179). *Alle diese Funktionen zusammen, dh.* (180) *(für jede reelle Nullstelle λ) und* (181)–(182) *(für jedes Paar komplex konjugierter Nullstellen $\alpha \pm \mathbf{i}\beta$) liefern ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung* (179).

[89] Etwa ist $p(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 3$ das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y'' - 2y' + 3y = 0$.

[90] Wir erinnern uns, dass die nicht reellen Nullstellen in komplex konjugierten Paaren auftreten müssen, da das Polynom p reelle Koeffizienten hat.

6.5.2. Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0. \tag{183}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\xi) = \xi^3 - 6\xi^2 + 11\xi - 6 = (\xi - 1)(\xi - 2)(\xi - 3)$$

mit Nullstellen 1, 2 und 3, alle haben Vielfachheit 1. Daher bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^x, \qquad \varphi_2(x) = e^{2x}, \qquad \varphi_3(x) = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung (183). Jede Lösung von (183) lässt sich daher eindeutig in der Form

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

schreiben.

6.5.3. Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y'''' - 9y''' + 30y'' - 44y' + 24y = 0. \tag{184}$$

Ihr charakteristisches Polynom

$$p(\xi) = \xi^4 - 9\xi^3 + 30\xi^2 - 44\xi + 24 = (\xi - 2)^3(\xi - 3)$$

hat die dreifache Nullstelle 2 und eine einfache Nullstelle bei 3. Nach Proposition 6.5.1 bilden daher die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{2x}, \qquad \varphi_1(x) = xe^{2x}, \qquad \varphi_3(x) = x^2e^{2x}, \qquad \varphi_4(x) = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (184). Jede Lösung von (184) lässt sich also eindeutig als Linearkombination dieser Funktionen schreiben,

$$y(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 xe^{2x} + \lambda_3 x^2 e^{2x} + \lambda_4 e^{3x}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

6.5.4. Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y''' - 9y'' + 33y' - 65y = 0. \tag{185}$$

Ihr charakteristisches Polynom

$$p(\xi) = \xi^3 - 9\xi^2 + 33\xi - 65 = \big(\xi - (2 + 3\mathbf{i})\big)\big(\xi - (2 - 3\mathbf{i})\big)(\xi - 5)$$

besitzt die einfache reelle Nullstelle 5 und ein Paar komplex konjugierter Nullstellen $2 + 3\mathbf{i}$, $2 - 3\mathbf{i}$, beide mit Vielfachheit 1. Nach Proposition 6.5.1 bilden daher die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{5x}, \qquad \varphi_2(x) = e^{2x}\cos(3x), \qquad \varphi_3(x) = e^{2x}\sin(3x)$$

ein Fundamentalsystem von (185). Jede Lösung von (185) lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser φ_i schreiben.

6.5.5. Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y''''' + 2y''' + y' = 0. \tag{186}$$

Ihr charakteristisches Polynom

$$p(\xi) = \xi^5 + 2\xi^3 + \xi = \xi(\xi - \mathbf{i})^2(\xi + \mathbf{i})^2$$

hat die einfache reelle Nulstelle 0, und ein Paar komplex konjugierter Nullstellen $\mathbf{i}$ und $-\mathbf{i}$, beide mit Vielfachheit 2. Nach Proposition 6.5.1 bilden daher die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{0x} = 1, \quad \varphi_2(x) = \sin(x), \quad \varphi_3(x) = x\sin(x),$$
$$\varphi_4(x) = \cos(x), \quad \varphi_5(x) = x\cos(x)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (186).

6.5.6. Bemerkung. Soll die inhomogene Gleichung (176) gelöst werden genügt es wieder eine einzige Lösung von (176) zu finden, alle anderen erhalten wir dann auf Grund der Linearität durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung, vgl. Abschnitt 6.3. Eine solche spezielle Lösung von (176) kann wieder mittels der Methode der Variation der Konstanten bestimmt werden [**K1**, Kapitel 10.5]. Wir wollen dies aber nur für Gleichungen zweiter Ordnung diskutieren, siehe unten.

6.6. Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir wollen in diesem Abschnitt die allgemeine lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2dy' + ky = b(x) \tag{187}$$

untersuchen. Dabei sind $d, k \in \mathbb{R}$ Konstanten und $b : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion. Wir beginnen mit der assoziierten homogenen Gleichung

$$y'' + 2dy' + ky = 0. \tag{188}$$

Ihr charakteristisches Polynom

$$p(\xi) = \xi^2 + 2d\xi + k$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}.$$

Aus Proposition 6.5.1 erhalten wir sofort

6.6.1. Proposition.

a) *Ist $d^2 - k > 0$, dann bilden $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ ein Fundamentalsystem von* (188)*, wobei $\lambda_1 = -d + \sqrt{d^2 - k}$ und $\lambda_2 = -d - \sqrt{d^2 - k}$.*
b) *Ist $d^2 - k = 0$, dann bilden die Funktionen e^{-dx} und xe^{-dx} ein Fundamentalsystem von* (188).
c) *Ist $d^2 - k < 0$, dann bilden $e^{-dx}\sin(\omega x)$ und $e^{-dx}\cos(\omega x)$ ein Fundamentalsystem von* (188)*, wobei $\omega = \sqrt{k - d^2}$.*

Die Lösung der homogenen Gleichung (188) bereitet also keine Schwierigkeiten. Kommen wir nun zur inhomogenen Differentialgleichung (187).

6.6.2. Proposition. *Es seien $d, k \in \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Bezeichne mit φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem der zu*

$$y'' + 2dy' + ky = b(x) \tag{189}$$

assoziierten homogenen Differentialgleichung $y'' + 2dy' + ky = 0$. Weiters seien C_1' und C_2' Funktionen, sodass

$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = b(x)$$

für alle $x \in I$. Dann ist

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x)$$

eine Lösung von (189)*, wobei C_1 und C_2 Stammfunktionen von C_1' und C_2' sind.*

Beweis. Wir zeigen dies durch direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}\psi' &= C_1'\varphi_1 + C_1\varphi_1' + C_2'\varphi_2 + C_2\varphi_2' \\ \psi'' &= C_1''\varphi_1 + 2C_1'\varphi_1' + C_1\varphi_1'' + C_2''\varphi_2 + 2C_2'\varphi_2' + C_2\varphi_2''\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\varphi_i'' + 2d\varphi_i' + k\varphi_i = 0$ erhalten wir

$$\psi'' + 2d\psi' + k\psi = 2d\big(C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2\big) + C_1''\varphi_1 + 2C_1'\varphi_1' + C_2''\varphi_2 + 2C_2'\varphi_2'$$

Da $C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0$ ergibt dies

$$\psi'' + 2d\psi' + k\psi = C_1''\varphi_1 + 2C_1'\varphi_1' + C_2''\varphi_2 + 2C_2'\varphi_2' \tag{190}$$

Differenzieren wir $C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0$ so erhalten wir $C_1''\varphi_1 + C_1'\varphi_1' + C_2''\varphi_2 + C_2'\varphi_2' = 0$. Subtrahieren wir dies von (190) so folgt

$$\psi'' + 2d\psi' + k\psi = C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = b(x). \qquad \square$$

6.6.3. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \tag{191}$$

bestimmen. Nach Proposition 6.5.1 bildet

$$\varphi_1(x) = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x) = \cos(x)$$

ein Fundamentalsystem der assoziierten homogenen Gleichung $y'' + y = 0$. Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten verwenden wir Proposition 6.6.2 und lösen daher das lineare Gleichungssystem:

$$C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad C_1'\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Dies führt auf

$$C_1'(x) = 1, \qquad C_2'(x) = -\tan(x).$$

Integration liefert dann

$$C_1(x) = x \qquad \text{und} \qquad C_2(x) = \ln|\cos(x)|$$

Nach Proposition 6.6.2 ist daher

$$\psi(x) = x\sin(x) + (\ln|\cos(x)|)\cos(x)$$

eine Lösung von (191). Jede Lösung von (191) lässt sich daher in der Form

$$x\sin(x) + (\ln|\cos(x)|)\cos(x) + \lambda_1\sin(x) + \lambda_2\cos(x), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

schreiben.

6.6.4. Beispiel. Wir wollen die Differentialgleichung, $0 \neq \omega_0 \in \mathbb{R}$,

$$y'' + 2dy' + ky = K\cos(\omega_0 x) \tag{192}$$

lösen. Wegen Proposition 6.6.1 genügt es eine spezielle Lösung dieser Gleichung zu finden. Wir betrachten zunächst den Fall: $\mathbf{i}\omega_0$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p, dh. $d \neq 0$ oder $k \neq \omega_0^2$. Es sei $A := |K/p(\mathbf{i}\omega_0)|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass $K/p(\mathbf{i}\omega_0) = Ae^{\mathbf{i}\varphi}$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\psi(x) = A\cos(\omega_0 x + \varphi)$$

eine spezielle Lösung von (192) ist. Alle Lösungen von (192) erhalten wir nun durch Addition von Lösungen der homogenen Gleichung $y'' + 2dy' + ky$, siehe Proposition 6.6.1.

Nun zum zweiten Fall: $\mathbf{i}\omega_0$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dh. $d = 0$ und $k = \omega_0^2$, und die Gleichung lautet daher

$$y'' + \omega_0^2 y = K\cos(\omega_0 x). \tag{193}$$

In diesem Fall bilden $\sin(\omega_0 x)$ und $\cos(\omega_0 x)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, siehe Proposition 6.6.1, und

$$\psi(x) = \frac{K}{2\omega_0} x\sin(\omega_0 x)$$

ist eine spezielle Lösung von (193). Jede Lösung von (193) lässt sich daher in der Form

$$y(x) = \frac{K}{2\omega_0} x\sin(\omega_0 x) + \lambda_1\sin(\omega_0 x) + \lambda_2\cos(\omega_0 x), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

schreiben.

Literatur

[C] J. Cigler, *Grundideen der Mathematik.* Mathematische Texte **5**, BI-Wissenschaftsverlag.

[H1] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Mathematische Leitfäden, Teubner.

[H2] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Mathematische Leitfäden, Teubner.

[J1] K. Jänich, *Mathematik 1, Geschrieben für Physiker.* Springer Verlag.

[J2] K. Jänich, *Mathematik 2, Geschrieben für Physiker.* Springer Verlag.

[K1] K. Königsberger, *A*nalysis 1. Springer Verlag.

[K2] K. Königsberger, *A*nalysis 2. Springer Verlag.

[M1] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1.* Springer Verlag.

[M2] K. Meyberg und P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 2.* Springer Verlag.