Informationen zur Prüfung
Analysis für Physik und verwandte Fächer I

Stefan Haller

1. Ablauf und Benotung

Die Prüfungen werden schriftlich sein und zwei Stunden dauern. Hilfsmittel wie Taschenrechner, Formelsammlung, Skriptum, etc. sind nicht zugelassen. Die Aufgaben werden dementsprechend so gestaltet sein, dass sie ohne Zuhilfenahme von Taschenrechnern problemlos lösbar sind. Ist das Ergebnis einer Rechnung etwa π, $\ln(2)$, e^2 oder $\frac{1}{3}$, dann schreiben Sie dies so hin. Der Test wird aus vier Beispielen bestehen die jeweils mit 0–10 Punkten bewertet werden. Die Note ergibt sich aus der Gesamtpunkteanzahl und folgendem Schema:

Punkte:	0–20	21–25	26–30	31–35	36–40
Note:	Nicht Genügend	Genügend	Befriedigend	Gut	Sehr Gut

Ausreichend Papier wird von mir zur Verfügung gestellt. Vergessen Sie nicht Ihren StudentInnenausweis mitzubringen.

2. Typische Beispiele

Die Prüfungsangabe könnte in etwa wie unten aussehen. Dies bedeuted aber nicht, dass genau diese Beispiel nur mit "anderen Zahlen" kommen. Auch die Fußnoten mit den Lösungshinweisen werden natürlich nicht Teil der Angabe sein.

Beispiel A)

a) Berechne folgende Integrale: (3 Punkte)[1]

$$\int x^2 \sin(x)dx, \qquad \int_4^5 \frac{dx}{x^2-5x+6}, \qquad \int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

b) Für $a \geq b > 0$ betrachte die Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$$

[1] Das erste Integral lässt sich durch zweimalige partielle Integration berechnen; das zweite mittels Partialbruchzerlegung; und das dritte durch die naheliegende Substitution $x^2 = u$.

Berechne ihren Flächeninhalt. (3 Punkte)[2]

c) Gib eine genaue Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (2 Punkte)[3]

d) Beweise den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. (2 Punkte)

Beispiel B) Betrachte die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x \ln(x) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

a) Zeige, dass f stetig ist. (1 Punkt)[4]

b) Bestimme alle Nullstellen von f. (1 Punkt)[5]

c) Bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (1 Punkt)[6]

d) Bestimme $\lim_{x\to 0+} f'(x)$. (1 Punkt)[7]

e) Bestimme alle lokalen Maxima und Minima von f. (1 Punkt)[8]

f) Wo ist f monoton wachsend und wo monoton fallend? (1 Punkt)[9]

g) Nimmt die Funktion f ihr globales Maximum bzw. Minimum an, und wenn wo? (1 Punkt)[10]

h) Zeige, dass f konvex ist. (1 Punkt)[11]

i) Beweise folgende Aussage: Ist $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum von g, dann gilt $g'(x_0) = 0$. (2 Punkte)

Beispiel C)

a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^k}{k}$ und die dadurch dargestellte Funktion (3 Punkte).[12]

---

[2] Die Fläche dieser Ellipse ist durch das Integral $2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-(x/a)^2}dx$ gegeben, und dieses lässt sich durch die Subsitution $u = x/a$ auf ein bekanntes Integral zurückführen.

[3] Formulierung des Hauptsatzes: Ist I ein allgemeines Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Funktion $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

[4] Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital zeigt man $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Damit ist f bei $x = 0$ stetig. Für $x > 0$ ist f ein Produkt zweier stetiger Funktionen und damit stetig.

[5] f besitzt zwei Nullstellen, $x = 0$ und $x = 1$.

[6] Aus $\lim_{x\to\infty} x = \infty = \lim_{x\to\infty} \ln(x)$ folgt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

[7] Da $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$ gilt $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$.

[8] Beachte, dass f bei $x = 0$, und nur dort, ein lokales Maximum besitzt. Das einzige lokale Minimum liegt bei $1/e$.

[9] f ist auf dem Intervall $[0, 1/e]$ streng monoton fallend, und auf dem Intervall $[1/e, \infty)$ streng monoton wachsend.

[10] Die Funktion ist unbeschränkt und hat daher kein globales Maximum. Ihr globales Minimum wird bei ihrem einzigen lokalen Extremum angenommen.

[11] Dies folgt aus $f''(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

[12] Der Konvergenzradius ist 1/3, die dargestellte Funktion ist $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln(1+3x)$, was aus der Logarithmischen Reihe $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, $|x| < 1$, folgt.

b) In welchen der beiden Randpunkte des Konvergenzintervalls konvergiert die obige Potenzreihe und in welchen nicht? (1 Punkt)[13]
c) Bestimme alle Häufungswerte der Folge $z_n := \mathbf{i}^n(1 - 2^{-n})$. (2 Punkte)[14]
d) Wann heißt eine Folge reeller Zahlen konvergent? Gib eine genaue Definition. (2 Punkte)[15]
e) Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente reelle Folgen. Zeige, dass dann auch die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert und folgende Formel gilt: (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beispiel D)

a) Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen: (2 Punkte)

$$f_1(x) := \ln\Big(2 - \sqrt{1 + \sin^2(x)}\Big), \quad f_2(x) := \frac{e^{4x^2-3x+7}\cosh(x)}{x^2+1}$$

b) Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

und zeige, dass f' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. (4 Punkte)[16]
c) Bestimme die folgenden Grenzwerte, $a \in \mathbb{R}$ fix: (2 Punkte)[17]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{\tan^2(x)}, \qquad \lim_{x\to\infty}\Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x$$

d) Unter gewissen Voraussetzungen gilt für eine Folge von Funktionen f_n

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)'.$$

Gib eine genaue Formulierung des entsprechenden Resultats aus der Vorlesung. (2 Punkte)

[13]Beim Randpunkt $x = -1/3$ divergiert die Reihe (harmonische Reihe); beim Randpunkt $x = 1/3$ konvergiert sie (alternierende harmonische Reihe.)

[14]Die Häufungspunkte sind 1, $\mathbf{i}$, -1 und $-\mathbf{i}$.

[15]Definition: Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt konvergent falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass folgendes der Fall ist: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a - a_n| < \varepsilon$.

[16]Wegen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)/x-1}{x-0} = 0$ ist f bei $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ berechnet man $f'(x) = \frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$. Für die Stetigkeit der Ableitung ist dann noch $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ zu zeigen.

[17]Regel von de l'Hospital

3. Stoff

Es ist wesentlich, dass Sie die Begriffe die in der Vorlesung behandelt wurden genau verstehen und auch in der Lage sind präzise Definitionen zu geben. Dh. alle Definitionen sind Teil des Prüfungsstoffs.

Auch ist es wichtig, dass Sie die besprochenen Resultate verstehen und formulieren können. Dh. die Aussagen aller Sätze, Propositionen, Lemmata, Korollare etc. sind Teil des Prüfungsstoffes.

Weiters sollen Sie in der Lage sein die besprochene Theorie an konkreten Beispielen anzuwenden. Beispiele haben wir in der Vorlesung behandelt, aber auch die Übungsaufgaben zum Proseminar bieten eine gute Quelle an möglichen Beispielen.

Beweise werde ich nur von folgenden ausgewählten Resultaten verlangen, wobei sich die Nummern auf das zur Verfügung gestellte Skriptum beziehen: 1.8.4, 2.1.8, 2.1.13, 2.1.19, 2.1.22, 2.6.7, 2.6.8, 2.6.11, 2.8.5, 2.8.8, 2.9.2, 2.10.1, 3.1.6, 3.2.5, 4.1.2, 4.1.8, 4.1.9, 4.2.2, 4.2.11, 4.5.20, 4.5.22, 4.5.24, 4.6.1, 4.7.4, 5.2.8, 5.5.2, 5.5.8, 5.6.1, 5.7.1