I. Die Fundamentalgruppe

Der Begriff des einfachen Zusammenhangs ist in mehreren Gebieten der Mathematik anzutreffen. Etwa besagt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$ biholomorph zu $\mathbb{C}$ oder der Einheitsscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist. Etwas allgemeiner, jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche (d.h. komplexe 1-dimensionale Mannigfaltigkeit) ist zu genau einer der Flächen $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ oder $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ biholomorph.

Ein Resultat aus der Theorie der Lie-Gruppen besagt, dass für eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G und jede weitere Lie-Gruppe H die Abbildung die einem Lie-Gruppenhomomorphismus $G \to H$ den entsprechenden Lie-Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zuordnet bijektiv ist. Daher sind zwei einfach zusammenhängende Lie-Gruppen genau dann isomorph wenn es ihre Lie-Algebren sind. Damit ist die Klassifikation der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen auf die Klassifikation der Lie-Algebren zurückgeführt.

Eine vollständige einfach zusammenhängende n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung (o.B.d.A. $\kappa = -1, 0, 1$) ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ (falls $\kappa = 0$, euklidische Geometrie), S^n (falls $\kappa = 1$, sphärische Geometrie) oder H^n (falls $\kappa = -1$, hyperbolische Geometrie).

Jedem (zusammenhängenden) topologischen Raum mit Basispunkt kann seine Fundamentalgruppe zugeordnet werden. Ihre Elemente sind Homotopieklassen geschlossener Wege beim Basispunkt, die Konkatenation von Wegen liefert die Gruppenstruktur. Ein zusammenhängender Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Die Fundamentalgruppe liefert daher eine feine Abstufung zwischen den beiden Begriffen *einfach zusammenhängend* und *nicht einfach zusammenhängend.*

Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, dh. homöomorphe zusammenhängende Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Gelingt es von zwei Räumen die Fundamentalgruppen auszurechnen, und sind diese nicht isomorph, dann waren die beiden Räume nicht homöomorph. Da die Fundamentalgruppe eine Homotopieinvariante ist, lässt sich sogar schließen, dass die beiden Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein können. Dies macht die Fundamentalgruppe für die Topologie interessant.

Mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen kann für einige interessante Räume die Fundamentalgruppe tatsächlich bestimmt werden. Etwa lassen sich die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen berechnen, woraus dann folgt, dass geschlossene Flächen unterschiedlichen Geschlechts nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph sind. Andere Beipiele kommen aus der Knotentheorie, haben die Komplemente zweier Knoten in $\mathbb{R}^3$ nicht-isomorphe Fundamentalgruppen, dann können die Knoten nicht äquivalent sein.

Die Fundamentalgruppe hat gute funktorielle Eigenschaften, stetigen Abbildungen zwischen Räumen entsprechen Homomorphismen zwischen ihren Fundamentalgruppen. Dies ist eine typische Situation in der algebraischen Topologie: topologischen Räumen werden algebraische Objekte (Gruppen, Ringe, ...) zugeordnet, stetige Abbildungen entsprechen dabei in funktorieller Weise Homomorphismen zwischen diesen Objekte. Weitere Beipiele solcher topologischer Invarianten liefern die höheren Homotopiegruppen, die Homologiegruppen oder der Kohomologiering.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, führt rasch zu einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra und auch zu einem Beweis des Browerschen Fixpunktsatzes für stetige Abbildungen $D^2 \to D^2$. Sie erlaubt es auch für stetige Abbildungen $S^1 \to S^1$ einen Abbildungsgrad zu definieren. Für stetig differenzierbare Abbildungen kann dieser auch als Integral geschrieben werden und liefert daher ein erstes einfaches Beispiel für den Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie.

Der in diesem Kapitel behandelte Stoff ist Standardmaterial das sich in vielen Lehrbüchern findet. Die Darstellung hier orientiert sich eng an jenen in [**4**, Chapter 1] und [**13**, Kapitel 5], es seien aber auch [**8**], [**10**] und [**14**] erwähnt.

I.1. Homotopie von Wegen. Es sei X ein topologischer Raum. Weiters bezeichne $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall versehen mit der üblichen Teilraumtopologie. Unter einem *Weg* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $f : I \to X$. Wir nennen f einen Weg von $f(0)$ nach $f(1)$. Stimmen die beiden Endpunkte eines Weges f überein, dh. gilt $f(0) = x = f(1)$, dann wird f ein *geschlossener* Weg oder eine *Schleife* bei x genannt. Ist $x \in X$, dann bezeichnen wir mit $c_x : I \to X$ den *konstanten Weg,* $c_x(s) := x$.

Unter einer *Homotopie von Wegen* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$, sodass $H(0, t) = x_0$ und $H(1, t) = x_1$ unabhängig von t sind. Für jedes $t \in I$ ist dann $H_t : I \to X$, $H_t(s) := H(s, t)$, ein Weg von $H_t(0) = x_0$ nach $H_t(1) = x_1$. Zwei Wege $f, g : I \to X$ heißen *homotop* falls eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to X$ existiert, sodass $H_0 = f$ und $H_1 = g$, dh. $H(s, 0) = f(s)$ und $H(s, 1) = g(s)$ für alle $s \in I$. In diesem Fall wird H eine Homotopie von f nach g genannt, und wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \overset{H}{\simeq} g$. Um zu betonen, dass die Endpunkte fix sind, sprechen wir auch von einer *Homotopie relativ Endpunkten* und sagen f ist homotop zu g relativ Endpunkten.

I.1.1. Proposition. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in X.*

Beweis. Zur *Reflexivität:* Ist f ein Weg in X, dann ist $H : I \times I \to X$, $H(s, t) := f(s)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = f$, also gilt $f \overset{H}{\simeq} f$. Zur *Symmetrie:* Sei also $f \overset{H}{\simeq} g$. Dann ist $G : I \times I \to X$, $G(s, t) := H(s, 1 - t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_1 = g$ nach

$G_1 = H_0 = f$, also gilt $g \overset{G}{\simeq} f$. Zur *Transitivität:* Seien also $f \overset{H'}{\simeq} g$ und $g \overset{H''}{\simeq} h$. Dann ist

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} H'(s,2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(s,2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = H'_0 = f$ nach $H_1 = H''_1 = h$, also gilt $f \overset{H}{\simeq} h$. Die Stetigkeit von H folgt aus Lemma I.1.2 unten. □

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\simeq$ heißen *Homotopieklassen.* Wir schreiben $[f]$ für die Homotopieklasse eines Weges f.

I.1.2. Lemma. *Es seien X und Y zwei topologische Räume und $f : Y \to X$ eine Abbildung. Weiters seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von Y, sodass $Y = A \cup B$. In dieser Situation gilt: f ist genau dann stetig, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \to X$ und $f|_B : B \to X$ beide stetig sind.*

Beweis. Mit f sind natürlich auch die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ stetig. Es bleibt daher zu zeigen, dass aus der Stetigkeit der Einschränkungen auch die Stetigkeit von f folgt. Sei dazu C eine abgeschlossene Teilmenge von X und $D := f^{-1}(C) \subseteq Y$. Es ist zu zeigen, dass D in Y abgeschlossen ist. Aus der Stetigkeit von $f|_A$ folgt, dass $D \cap A = f|_A^{-1}(D)$ abgeschlossen in A ist. Da A in Y abgeschlossen ist folgt, dass $D \cap A$ auch in Y abgeschlossen ist. Ebenso folgt aus der Stetigkeit von $f|_B$ und der Abgeschlossenheit von B, dass $D \cap B$ abgeschlossen in Y ist. Also ist auch ihre Vereinigung $(D \cap A) \cup (D \cap B) = D \cap (A \cup B) = D$ abgeschlossen in Y. □

I.1.3. Beispiel. Ist $f : I \to X$ ein Weg und $\varphi : I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann gilt $f \circ \varphi \simeq f$. Es ist nämlich $H : I \times I \to X$, $H(s,t) := f\big((1-t)\varphi(s) + ts\big)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f \circ \varphi$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass $(1-t)\varphi(s) + ts$ stets in I liegt und H daher wohldefiniert ist.

I.1.4. Beispiel. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $f, g : I \to X$ zwei Wege mit $f(0) = g(0)$ und $f(1) = g(1)$. Dann gilt $f \simeq g$, denn $H : I \times I \to X$, $H(s,t) := (1-t)f(s) + tg(s)$, ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Beachte, dass wegen der Konvexität von X diese Homotopie tatsächlich Werte in X hat.

I.2. Konstruktionen mit Wegen. Es sei X ein topologischer Raum. Sind f und g zwei Wege in X mit $f(1) = g(0)$, dann ist

$$fg : I \to X, \qquad (fg)(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von $f(0)$ nach $g(1)$. Er wird der *Produktweg*, die *Konkatenation* oder auch *Zusammensetzung* von f und g genannt.

I.2.1. Lemma. *Es seien f_0, f_1, g_0 und g_1 Wege in X, sodass $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, $f_0(1) = g_0(0)$ und daher auch $f_1(1) = g_1(0)$. Dann gilt $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$.*

Beweis. Sind $F : I \times I \to X$ und $G : I \times I \to X$ Homotopien von Wegen mit $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1$, dann definiert

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ G(2s-1,t) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f_0 g_0$ nach $H_1 = f_1 g_1$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. □

I.2.2. Lemma. *Sind f, g und h drei Wege in X mit $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$, dann gilt $(fg)h \simeq f(gh)$.*

Beweis. $(fg)h$ ist eine Reparametrisierung von $f(gh)$, denn es gilt $(fg)h = (f(gh)) \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \to I, \qquad \varphi(s) := \begin{cases} \text{2s} & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \text{s+1/4} & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ \text{s/2+1/2} & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $(fg)h \simeq f(gh)$. □

I.2.3. Lemma. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0)$, $y := f(1)$. Dann gilt für die Konkatenationen mit den konstanten Wegen $fc_y \simeq f$ sowie $c_x f \simeq f$.*

Beweis. Der Weg fc_y ist eine Reparametrisierung von f, denn es gilt $fc_y = f \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \to I, \qquad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $fc_y \simeq f$. Analog lässt sich $c_x f \simeq f$ zeigen. □

Für einen Weg $f : I \to X$ ist $\bar{f} : I \to X$, $\bar{f}(s) := f(1-s)$, ein Weg von $f(1)$ nach $f(0)$. Er wird als der zu f *inverse Weg* bezeichnet.

I.2.4. Lemma. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0)$, $y := f(1)$. Dann gilt $f\bar{f} \simeq c_x$ und $\bar{f} f \simeq c_y$.*

Beweis. Es ist

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/2, \\ f(t) & \text{falls } t/2 \leq s \leq 1 - t/2, \\ f(2-2s) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = c_x$ nach $H_1 = f\bar{f}$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. Analog lässt sich $\bar{f} f \simeq c_y$ zeigen. □

I.3. Definition der Fundamentalgruppe. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Homotopieklassen geschlossener Wege bei x_0, genauer

$$\pi_1(X, x_0) := \big\{\text{Wege } f : I \to X \text{ mit } f(0) = x_0 = f(1)\big\}/\simeq$$

wobei $\simeq$ die in Abschnitt I.1 besprochene Äquivalenzrelation der Homotopie relativ Endpunkten bezeichnet. Ist f ein Weg in X mit $f(0) = x_0 = f(1)$ dann schreiben wir $[f]$ für seine Äquivalenzklasse in $\pi_1(X, x_0)$. Nach Lemma I.2.1 definiert die Konkatenation von Wegen eine Multiplikation

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \qquad ([f], [g]) \mapsto [f][g] := [fg]$$

die nach Lemma I.2.2 assotiativ ist, $\big([f][g]\big)[h] = [f]\big([g][h]\big)$. Die Äquivalenzklasse des konstanten Weges c_{x_0} ist nach Lemma I.2.3 neutrales Element dieser Multiplikation, $[f][c_{x_0}] = [f] = [c_{x_0}][f]$. Nach Lemma I.2.4 gilt weiters $[f][\bar{f}] = [c_{x_0}] = [\bar{f}][f]$. Zusammenfassend erhalten wir

I.3.1. Proposition. *Die Konkatenation von Wegen definiert auf $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur, $[f][g] = [fg]$. Das neutrale Element wird durch den konstanten Weg c_{x_0} repräsentiert, $1 = [c_{x_0}]$. Das zu $[f]$ inverse Element wird durch den inversen Weg repräsentiert, $[f]^{-1} = [\bar{f}]$.*

I.3.2. Definition (Fundamentalgruppe). Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird als die *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* von X beim Basispunkt x_0 bezeichnet.

I.3.3. Bemerkung. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist i.A. nicht kommutativ und wird daher i.A. multiplikativ notiert. Insbesondere schreiben wir $1 \in \pi_1(X, x_0)$ für das neutrale Element und σ^{-1} für das Inverse von $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist die Fundamentalgruppe abelsch, so wird sie manchmal auch additiv notiert. Ist sie trivial, dh. besteht sie nur aus dem neutralen Element $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, dann wird dies üblicherweise durch die additive Schreibweise $\pi_1(X, x_0) = 0$ ausgedrückt.

I.3.4. Beispiel. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in X$ so gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$, siehe Beispiel I.1.4.

Wir wenden uns nun der Frage zu, inwiefern die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines Raumes X vom Basispunkt x_0 abhängt.

I.3.5. Proposition. *Es sei $h : I \to X$ ein Weg und $x_0 := h(0)$, $x_1 := h(1)$. Dann definiert $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, $\beta_h([f]) := [hf\bar{h}]$, einen Isomorphismus von Gruppen, $\beta_h^{-1} = \beta_{\bar{h}}$.*

Beweis. Nach den Beobachtungen in Abschnitt I.2 ist β_h wohldefiniert,[1] und für $[f], [g] \in \pi_1(X, x_1)$ gilt $\beta_h\big([f][g]\big) = [hfg\bar{h}] = [hfc_{x_1}g\bar{h}] = [hf\bar{h}hg\bar{h}] =$

[1]Genaugenommen müssten wir hier Klammern setzten, $\beta_h([f]) = [(hf)\bar{h}]$ oder $\beta_h([f]) = [h(f\bar{h})]$, nach Lemma I.2.2 stimmen die Homotopieklassen $[(hf)\bar{h}]$ und $[h(f\bar{h})]$ aber überein.

$[hf\bar{h}][hg\bar{h}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$, also ist β_h ein Gruppenhomomorphismus. Verwenden wir noch die triviale Tatsache $\bar{\bar{h}} = h$ so erhalten wir $\big(\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h\big)([f]) = \beta_{\bar{h}}\big([hf\bar{h}]\big) = [\bar{h}hf\bar{h}\bar{\bar{h}}] = [\bar{h}hf\bar{h}h] = [c_{x_1}fc_{x_1}] = [f]$. Daher gilt $\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$. Ebenso lässt sich $\beta_h \circ \beta_{\bar{h}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ zeigen, also sind β_h und $\beta_{\bar{h}}$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

I.3.6. Bemerkung. Sind x_0 und x_1 zwei Basispunkte in X die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X liegen, dann sind nach Proposition I.3.5 die Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph. Für wegzusammenhängendes X schreiben wir daher oft auch $\pi_1(X)$. Liegen x_0 und x_1 nicht in derselben Wegzusammenhangskomponente, dann dürfen wir uns i.A. keinerlei Relation zwischen den Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ erwarten.

I.3.7. Bemerkung. Der Isomorphismus β_h aus Proposition I.3.5 hängt nur von der Homotopieklasse von h ab, dh. aus $h \simeq h'$ folgt $\beta_h = \beta_{h'}$. Genauer, für zwei Wege h, h' von x_0 nach x_1 gilt $\beta_h = \beta_{h'}$ genau dann, wenn $[h\bar{h}']$ im Zentrum[2] $Z(\pi_1(X, x_0))$ der Fundamentalgruppe liegt, vgl. Aufgabe 6. Ist $\pi_1(X, x_0)$ nicht abelsch, dann gilt $Z(\pi_1(X, x_0)) \neq \pi_1(X, x_0)$ und der in Proposition I.3.5 konstruierte Isomorphismus hängt tatsächlich von $[h]$ ab. Ist die Fundamentalgruppe nicht abelsch, erhalten wir daher *keine kanonische Idendifikation* von $\pi_1(X, x_0)$ mit $\pi_1(X, x_1)$.

I.3.8. Definition (Einfacher Zusammenhang). Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend,* falls $\pi_1(X) = 0$.

I.3.9. Beispiel. Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.3.4.

I.3.10. Proposition. *Für einen topologischer Raum X sind äquivalent:*

(i) *X ist einfach zusammenhängend.*
(ii) *Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1.*

Beweis. Wir zeigen zunächst (i)⇒(ii): Seien dazu $x_0, x_1 \in X$. Aus dem Wegzusammenhang von X folgt, dass es zumindest eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 gibt. Sind $f, g : I \to X$ zwei Wege von x_0 nach x_1, dann ist $f\bar{g}$ eine Schleife bei x_0 die wegen $\pi_1(X, x_0) = 0$ homotop zum konstanten Weg c_{x_0} sein muss, $f\bar{g} \simeq c_{x_0}$. Es folgt $f \simeq fc_{x_1} \simeq f(\bar{g}g) \simeq (f\bar{g})g \simeq c_{x_0}g \simeq g$, also kann es höchstens eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 geben. Nun zur Implikation (ii)⇒(i): Da eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 existiert, muss X wegzusammenhängend sein. Betrachten wir nun $x_1 = x_0$, so folgt $\pi_1(X, x_0) = 0$ aus der Annahme, dass nur eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 existiert. □

[2]Das Zentrum einer Gruppe G ist $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$. Das Zentrum ist stets ein abelscher Normalteiler. Es gilt $Z(G) = G$ genau dann, wenn G abelsch ist.

I.4. Die Fundamentalgruppe des Kreises. Wir wollen in diesen Abschnitt die Fundamentalgruppe von $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bestimmen. Als Basispunkt verwenden wir $x_0 := 1 \in S^1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den Weg

$$\omega_n : I \to S^1, \qquad \omega_n(s) := e^{2\pi \mathbf{i} ns} = \cos(2\pi ns) + \mathbf{i}\sin(2\pi ns). \tag{I.1}$$

Da $\omega_n(0) = \omega_n(1) = 1$ ist jedes ω_n eine Schleife bei x_0 und definiert daher eine Homotopieklasse $[\omega_n] \in \pi_1(S^1) := \pi_1(S^1, x_0)$.

I.4.1. Satz. *Die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$, $\phi(n) := [\omega_n]$, siehe* (I.1)*, ist ein Isomorphismus von Gruppen, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Für den Beweis von Satz I.4.1 betrachten wir die Abbildung

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p(s) := e^{2\pi \mathbf{i} s}. \tag{I.2}$$

Drei Eigenschaften von p werden wesentlich in den Beweis von Satz I.4.1 eingehen. Erstens ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.3.9, weiters ist $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und schließlich hat p die sogenannte Homotopieliftungseigenschaft.

I.4.2. Proposition (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $H : Y \times I \to S^1$ und $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*[3]

I.4.3. Bemerkung. Bezeichnen wir mit $\iota_0 : Y \to Y \times I$, $\iota_0(y) := (y, 0)$, die Inklusion bei 0, so lässt sich die Aussage von Proposition I.4.2 schön an nebenstehenden Diagramm veranschaulichen. Die Voraussetzung in Proposition I.4.2 besagt gerade, dass das äußere Quadrat kommutiert, dh. die Komposition $p \circ \tilde{h}$ stimmt mit der Komposition $H \circ \iota_0$ überein. Die Konklusion von Proposition I.4.2 besagt nun, dass eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$ existiert, die die beiden Dreiecke kommutativ macht, dh. die Komposition $\tilde{H} \circ \iota_0$ stimmt mit $\tilde{h}$ überein, und $p \circ \tilde{H}$ stimmt mit H überein.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\iota_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{H}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

I.4.4. Bemerkung. Sind $f : X \to S^1$ und $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen mit $p \circ \tilde{f} = f$, dann wird $\tilde{f}$ ein *Lift* von f genannt. In diesem Fall sagen wir auch f kann über p zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}$ geliftet werden. Nicht jede Abbildung lässt sich stetige über p liften, etwa besitzt die identische Abbildung $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$ keinen Lift, siehe Satz I.4.1. Existiert ein Lift $\tilde{f}$ von f, dann ist dieser nicht eindeutig, denn durch Translation mit ganzen Zahlen erhalten wir unendlich viele weitere Lifte.

Wir verschieben den Beweis von Proposition I.4.2 auf das Ende dieses Abschnittes und betrachten zunächst die folgenden beiden Spezialfälle $Y = \{*\}$, der einpunktige Raum, sowie $Y = I$, siehe die Propositionen I.4.5 und I.4.7 unten.

[3]Ist $G : Y \times I \to X$ eine Abbildung und $t \in I$ so schreiben wir $G_t : Y \to X$ für die durch $G_t(y) := G(y, t)$ definierte Abbildung. In dieser Proposition also $H_0(y) := H(y, 0)$ und $\tilde{H}_0(y) := \tilde{H}(y, 0)$.

I.4.5. Proposition. *Es sei $f : I \to S^1$ ein Weg und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Beweis. Wenden wir Proposition I.4.2 auf den einpunktigen Raum $Y := \{*\}$, die Abbildung $\tilde{h} : \{*\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{h}(*) := \tilde{x}$, und $H : \{*\} \times I \to S^1$, $H(*, t) := f(t)$, an so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : \{*\} \times I \to \mathbb{R}$ die $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erfüllt. Offensichtlich hat dann $\tilde{f}(t) := \tilde{H}(*, t)$ alle gewünschten Eigenschaften. □

I.4.6. Beispiel. Für die Wege $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}_n(s) := ns$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt $\tilde{\omega}_n(0) = 0$, $\tilde{\omega}_n(1) = n$ und $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. Insbesondere ist $\tilde{\omega}_n$ ein Lift von ω_n, siehe (I.1). Beachte, dass $\tilde{\omega}_n$ nur für $n = 0$ geschlossen ist. Wir werden die Wege $\tilde{\omega}_n$ auch im Beweis von Satz I.4.1 unten verwenden.

I.4.7. Proposition. *Es sei $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ ein Weg und $H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen mit $H_0 = p \circ \tilde{h}$. Dann existiert eine eindeutige Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

Beweis. Wenden wir Proposition I.4.2 mit $Y := I$ an, so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Es ist noch zu zeigen, dass $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten ist. Für $i = 0, 1$ betrachten wir dazu den Weg $\tilde{\sigma}_i : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma}_i(t) := \tilde{H}(i, t)$. Aus $p \circ \tilde{H} = H$ folgt $(p \circ \tilde{\sigma}_i)(t) = H(i, t)$ und dies ist konstant in t, da H eine Homotopie von Wegen ist. Aus $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erhalten wir weiters $\tilde{\sigma}_i(0) = \tilde{H}(i, 0) = \tilde{h}(i)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 folgt daher, dass $\tilde{\sigma}_i$ mit dem konstanten Weg $c_{\tilde{h}(i)}$ übereinstimmen muss. Also ist $\tilde{H}$ tatsächlich eine Homotopie von Wegen. □

Beweis von Satz I.4.1. *Zur Surjektivität von ϕ:* Sei $f : I \to S^1$ eine Schleife bei $x_0 = 1$. Zu zeigen ist, dass $n \in \mathbb{Z}$ mit $\phi(n) = [f]$ existiert. Nach Proposition I.4.5, und da $p(0) = x_0$, existiert ein Weg $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = 0$. Da $p(\tilde{f}(1)) = f(1) = x_0$, und weil $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$, muss $\tilde{f}(1)$ ganzzahlig sein, $n := \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Beobachte nun, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{\omega}_n$ aus Beispiel I.4.6 beides Wege in $\mathbb{R}$ sind die bei 0 starten und bei n enden. Aus dem einfachen Zusammenhang von $\mathbb{R}$, siehe Beispiel I.3.9, und Proposition I.3.10 erhalten wir eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\omega}_n \overset{H}{\simeq} \tilde{f}$. Es ist dann $p \circ H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen mit $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n \overset{p \circ H}{\simeq} p \circ \tilde{f} = f$, also $\phi(n) = [\omega_n] = [f]$.

Zur Injektivität von ϕ: Seien also $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\phi(m) = \phi(n)$. Zu zeigen ist $n = m$. Da $\phi(m) = \phi(n)$ existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to S^1$ mit $\omega_m \overset{H}{\simeq} \omega_n$. Nach Proposition I.4.7, und da $p \circ \tilde{\omega}_m = \omega_m$, existiert eine Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_m$. Da $\tilde{H}$ die Endpunkte fixiert gilt insbesondere $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{\omega}_m(0) = 0$ und $\tilde{H}_1(1) = \tilde{H}_0(1) = \tilde{\omega}_m(1) = m$. Weiters ist $p \circ \tilde{H}_1 = H_1 = \omega_n$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 folgt daher $\tilde{H}_1 = \tilde{\omega}_n$, und wir erhalten $m = \tilde{H}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$.

Zur Homomorphismus Eigenschaft von ϕ: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Es ist zu zeigen $\phi(m+n) = \phi(m)\phi(n)$. Betrachte dazu die Translation $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_m(s) := m+s$. Dann ist $\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ ein Weg in $\mathbb{R}$ der bei 0 startet und bei $m+n$ endet. Auch $\tilde{\omega}_{m+n}$ ist ein Weg von 0 nach $m+n$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, schließen wir, siehe Proposition I.3.10, $\tilde{\omega}_{m+n} \overset{H}{\simeq} \tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$, für eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to \mathbb{R}$. Es folgt $\omega_{m+n} = p \circ \tilde{\omega}_{m+n} \overset{p\circ H}{\simeq} p \circ \big(\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)\big) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tilde{\omega}_n) = \omega_m\omega_n$, also $\omega_{m+n} \simeq \omega_m\omega_n$ und damit $\phi(m+n) = \phi(m)\phi(n)$. $\square$

Es bleibt schließlich noch Proposition I.4.2 zu beweisen. Wir beginnen mit einigen Lemmata. Für den Rest des Abschnitts seien $H : Y \times I \to S^1$ und $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$ wie in Proposition I.4.2.

I.4.8. Lemma (Überlagerungseigenschaft). *Es existieren offene Teilmengen $U_\alpha \subseteq S^1$ und offene Teilmengen $\tilde{U}_\alpha^j \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \{0,1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $U_0 \cup U_1 = S^1$.
(ii) $p^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{U}_\alpha^j$.
(iii) $\tilde{U}_\alpha^j \cap \tilde{U}_\alpha^k = \emptyset$, *falls* $j \neq k$.
(iv) $p|_{\tilde{U}_\alpha^j} : \tilde{U}_\alpha^j \to U_\alpha$ *ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Setzen wir $U_0 := S^1 \setminus \{1\}$ und $U_1 := S^1 \setminus \{-1\}$, so ist $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von S^1, und es gilt $p^{-1}(U_0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sowie $p^{-1}(U_1) = \mathbb{R} \setminus \big(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\big)$. Die Intervalle $\tilde{U}_0^j := (j, j+1)$ und $\tilde{U}_1^j := (j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, $j \in \mathbb{Z}$, haben dann die gewünschten Eigenschaften. $\square$

I.4.9. Lemma. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}$, sodass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

Beweis. Zu jedem $s \in I$ existiert $\alpha_s \in \{0,1\}$ mit $H(y,s) \in U_{\alpha_s}$, siehe Lemma I.4.8(i). Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s\in I}$ eine offene Überdeckung von I. Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.4.12 unten. Betrachte nun die offene Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y. Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq H\big(N_{s_i} \times J_{s_i}\big) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. $\square$

I.4.10. Lemma. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V\times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

Beweis. Nach Lemma I.4.9 existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}$, sodass

$$H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i} \qquad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \tag{I.3}$$

Wegen (I.3) und $p \circ \tilde{h} = H_0$ ist $p(\tilde{h}(y)) = H_{t_0}(y) \in U_{\alpha_1}$, also existiert $j_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{h}(y) \in \tilde{U}^{j_1}_{\alpha_1}$, siehe Lemma I.4.8(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^1 := N \cap \tilde{h}^{-1}(\tilde{U}^{j_1}_{\alpha_1})$ von y und die Abbildung

$$\tilde{G}^1 : V^1 \times [t_0, t_1] \to \tilde{U}^{j_1}_{\alpha_1} \subseteq \mathbb{R}, \qquad \tilde{G}^1 := \big(p|_{\tilde{U}^{j_1}_{\alpha_1}}\big)^{-1} \circ H|_{V^1 \times [t_0,t_1]}.$$

Nach (I.3) und Lemma I.4.8(iv) ist $\tilde{G}^1$ wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1\times[t_0,t_1]}$. Aus $H_0 = p \circ \tilde{h}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G}^1_{t_0} = H_{t_0}|_{V^1} = p \circ \tilde{h}|_{V^1}$, und da p auf $\tilde{U}^{j_1}_{\alpha_1}$ injektiv ist folgt $\tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1}$.

Wegen (I.3) und $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1\times[t_0,t_1]}$ ist $p(\tilde{G}_{t_1}(y)) = H_{t_1}(y) \in U_{\alpha_2}$, also existiert $j_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{G}^1_{t_1}(y) \in \tilde{U}^{j_2}_{\alpha_2}$, siehe Lemma I.4.8(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^2 := V^1 \cap (\tilde{G}^1_{t_1})^{-1}(\tilde{U}^{j_2}_{\alpha_2})$ von y und die Abbildung

$$\tilde{G}^2 : V^2 \times [t_1, t_2] \to \tilde{U}^{j_2}_{\alpha_2} \subseteq \mathbb{R}, \qquad \tilde{G}^2 := \big(p|_{\tilde{U}^{j_2}_{\alpha_2}}\big)^{-1} \circ H|_{V^2 \times [t_1,t_2]}.$$

Nach (I.3) und Lemma I.4.8(iv) ist $\tilde{G}^2$ wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^2 = H|_{V^2\times[t_1,t_2]}$. Es folgt $p \circ \tilde{G}^2_{t_1} = H_{t_1}|_{V^2} = p \circ \tilde{G}^1_{t_1}|_{V^2}$, und da p auf $\tilde{U}^{j_2}_{\alpha_2}$ injektiv ist, erhalten wir $\tilde{G}^2_{t_1} = \tilde{G}^1_{t_1}|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1 \supseteq V^2 \supseteq \cdots \supseteq V^n$ von y und stetige Abbildungen $\tilde{G}^i : V^i \times [t_{i-1}, t_i] \to\subseteq \tilde{U}^{j_i}_{\alpha_i} \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, sodass

$$p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]}, \quad \tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1} \quad \text{und} \quad \tilde{G}^i_{t_{i-1}} = \tilde{G}^{i-1}_{t_{i-1}}|_{V^i} \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V := V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}|_{V\times[t_{i-1},t_i]} := \tilde{G}^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$. Da $\tilde{G}^i_{t_{i-1}}|_V = \tilde{G}^{i-1}_{t_{i-1}}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde{G}^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass $\tilde{G}$ stetig ist. Aus $p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G} = H|_{V\times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1}$ auch $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$. Also hat $\tilde{G}$ alle gewüschten Eigenschaften. □

I.4.11. Lemma. *Sind $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ zwei Wege mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, dann gilt $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $Z := \big\{s \in I : \tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)\big\}$. Da $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ beide stetig sind, ist Z eine abgeschlossene Teilmenge von I. Da $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ ist $0 \in Z$, also $Z \neq \emptyset$. Wir werden unten zeigen, dass Z auch offen in I ist. Aus dem Zusammenhang von I folgt dann $Z = I$, also $\tilde{f} = \tilde{g}$. Um die Offenheit von I zu zeigen, sei $s \in Z$. Nach Lemma I.4.8 existieren $\alpha \in \{0, 1\}$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) \in \tilde{U}^j_\alpha$. Betrachte die offene Umgebung $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}^j_\alpha) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U}^j_\alpha)$ von s. Da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$, und da $p|_{\tilde{U}^j_\alpha} : \tilde{U}^j_\alpha \to U_\alpha$ injektiv ist, siehe Lemma I.4.8(iv), erhalten wir $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$. Also ist $W \subseteq Z$ und daher Z offen in I. □

Beweis von Proposition I.4.2. Nach Lemma I.4.10 existiert zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G}^y : V^y \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y\times I}$ und $\tilde{G}^y_0 = \tilde{h}|_{V^y}$. Sind $y_1, y_2 \in Y$, so stimmen die Abbildungen

$\tilde{G}^{y_1}$ und $\tilde{G}^{y_2}$ auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ überein, denn ist $y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$ dann gilt für die Wege $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{G}^{y_1}(y,t)$, und $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{G}^{y_2}(y,t)$ sowohl $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y,t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, als auch $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$, und daher $\tilde{G}^{y_1}(y,t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{G}^{y_2}(y,t)$ für alle $t \in I$, siehe Lemma I.4.11. Wir erhalten daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y \times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Da die Einschränkung von $\tilde{H}$ auf jede der offenen Mengen $V^y \times I$ stetig ist, muss $\tilde{H}$ stetig sein. Aus $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ erhalten wir $p \circ \tilde{H} = H$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}^y_0 = \tilde{h}|_{V^y}$ auch $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Damit ist die Existenz der Abbildung $\tilde{H}$ in Proposition I.4.2 gezeigt. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu verifizieren. Seien dazu $\tilde{H}^1, \tilde{H}^2 : Y \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H}^1 = H = p \circ \tilde{H}^2$ und $\tilde{H}^1_0 = \tilde{h} = \tilde{H}^2$. Zu $y \in Y$ betrachten wir die Wege $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{H}^1(y,t)$, und $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{H}^2(y,t)$. Dann gilt $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y,t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, sowie $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$. Aus Lemma I.4.11 folgt daher $\tilde{H}^1(y,t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{H}^2(y,t)$ für alle $t \in I$, also stimmen $\tilde{H}^1$ und $\tilde{H}^2$ überein. □

Im Beweis von Lemma I.4.9 haben wir von der Lebesguesche Überdeckungszahl Gebrauch gemacht, und wollen daher dieses elementare Resultat kurz wiederholen.

I.4.12. Lemma (Überdeckungszahl von Lebesgue). *Es sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass jeder Ball mit Radius ε zur Gänze in einer der Überdeckungsmengen von $\mathcal{U}$ enthalten ist. Genauer, für jedes $x \in X$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ den offenen Ball mit Mittelpunkt x und Radius ε bezeichnet.*

Beweis. Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $x \in X$ ein $r_x > 0$ und $U_x \in \mathcal{U}$ mit $B_{2r_x}(x) \subseteq U_x$. Die Bälle $B_{r_x}(x)$ bilden eine offene Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X überdecken schon endlich viele davon ganz X, dh. $B_{r_{x_1}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{r_{x_n}}(x_n) = X$ für gewisse $x_1, \dots, x_n \in X$. Wir zeigen nun, dass $\varepsilon := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_n}\} > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Sei dazu $x \in X$. Wähle $1 \leq i \leq n$ mit $x \in B_{r_i}(x_i)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i)$, und daher $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i) \subseteq U_{x_i}$. Also liegt $B_\varepsilon(x)$ zur Gänze in der Überdeckungsmenge U_{x_i}. □

I.5. Erste Anwendungen. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt* von X, falls eine stetige Abbildung $r : X \to A$ existiert mit $r(x) = x$ für alle $x \in A$. Jede solche Abbildung r wird *Retraktion von X auf A* genannt. Eine Retraktion ist also nichts anderes als eine stetige *Linksinverse* der kanonischen Inklusion $\iota : A \to X$, dh. $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$.

Es bezeichne

$$D^n := \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\big\}$$

den abgeschlossenen n-dimensionalen *Einheitsball,* versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzieten Teilraumtopologie. Weiters bezeichne

$$S^n := \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\big\}$$

die n-dimensionale *Einheitssphäre,* versehen mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Teilraumtopologie. Beachte, dass S^{n-1} ein Teilraum von D^n ist, $S^{n-1} \subseteq D^n$. Etwa ist $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ und $D^1 = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Da D^1 zusammenhängend ist, kann es keine Retraktion von D^1 auf S^0 geben, jede stetige Abbildung $r : D^1 \to S^0$ muss entweder konstant 1 oder konstant -1 sein.

I.5.1. Satz. *S^1 ist nicht Retrakt von D^2, dh. es gibt keine stetige Abbildung $r : D^2 \to S^1$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$.*

Beweis. Indirekt angenommen $r : D^2 \to S^1$ ist eine Retraktion von D^2 auf S^1, dh. $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ wobei $\iota : S^1 \to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Wir fassen S^1 und D^2 als Teilräume von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auf, und verwenden $x_0 := 1 \in S^1 \subseteq D^2 \subseteq \mathbb{C}$ als Basispunkt. Betrachte die Schleife $\omega_1 : I \to S^1$, $\omega_1(s) := e^{2\pi \mathbf{i} s}$, siehe (I.1). Da D^2 einfach zusammenhängend ist, siehe Beispiel I.3.9, existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to D^2$ mit $\iota \circ \omega_1 \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$. Es ist dann $r \circ H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen in S^1. Mittels $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ folgt $\omega_1 = r \circ \iota \circ \omega_1 \overset{r\circ H}{\simeq} r \circ c_{x_0} = c_{x_0}$, also repräsentiert ω_1 das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Dies widerspricht aber Satz I.4.1, also kann S^1 nicht Retrakt von D^2 sein. □

I.5.2. Bemerkung. Die Aussage von Satz I.5.1 bleibt auch in höheren Dimensionen richtig, S^{n-1} ist nicht Retrakt von D^n, $n \in \mathbb{N}$. Wir werden dies später zeigen, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus.

I.5.3. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Indirekt angenommen $f : D^2 \to D^2$ hat keinen Fixpunkt. Dann können wir eine stetige Abbildung $r : D^2 \to S^1$ definieren, indem wir $x \in D^2$ den eindeutig bestimmten Schnittpunkt des Halbstrahls $\{x + t(x - f(x)) : t \geq 0\}$ mit S^1 zuordnen. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Abbildung durch die Formel $r : D^2 \to S^1$, $r(x) := x + t(x)\big(x - f(x)\big)$ gegeben ist, wobei $t : D^2 \to [0, \infty)$,

$$t(x) := \frac{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \sqrt{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle^2 + \big(1 - |x|^2\big)\big|f(x) - x\big|^2}}{\big|f(x) - x\big|^2}.$$

In dieser Darstellung ist auch die Stetigkeit von r evident. Für $x \in S^1$ gilt $r(x) = x$, denn aus $1 \geq \big|f(x)\big|^2 = \big|x + f(x) - x\big|^2 = \big|x\big|^2 + 2\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \big|f(x) - x\big|^2 \geq 1 + 2\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + 0$ folgt $\langle x, f(x) - x\rangle \leq 0$ und damit $t(x) = 0$. Also ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1, ein Widerspruch zu Satz I.5.1. Daher muss f einen Fixpunkt besizten. □

I.5.4. Bemerkung. Auch Satz I.5.3 bleibt in beliebigen Dimensionen richtig, jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt, $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt dies aus dem Zwischenwertsatz der Analysis. Für $n > 2$ werden wir dies mit Hilfe derselben Konstruktion aus der höherdimensionalen Version von Satz I.5.1 herleiten, vgl. Bemerkung I.5.2. Es lässt sich auch umgekehrt Satz I.5.1 auf elementare Weise aus Satz I.5.3 herleiten, denn setzen wir eine Retraktion $r : D^2 \to S^1$ mit einer Drehung $\rho : S^1 \to S^1$ zusammen, würden wir eine fixpunktfreie Abbildung $\iota \circ \rho \circ r : D^2 \to D^2$ erhalten.

I.5.5. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei also

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad n \geq 0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$$

ein Polynom und $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist $n = 0$. Die Schleife

$$f : I \to S^1, \qquad f(s) := \frac{p(e^{2\pi \mathbf{i} s})/p(1)}{|p(e^{2\pi \mathbf{i} s})/p(1)|}$$

definiert ein Element $[f] \in \pi_1(S^1, x_0)$, wobei $x_0 := 1 \in S^1$. Die Abbildung

$$H : I \times I \to S^1, \qquad H(s,t) := \frac{p(te^{2\pi \mathbf{i} s})/p(t)}{|p(te^{2\pi \mathbf{i} s})/p(t)|}$$

ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Daher repräsentiert f das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Andererseits ist

$$\tilde{G} : I \times I \to \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\tilde{G}(s,t) := t^n p(e^{2\pi \mathbf{i} s}/t) = a_n e^{2\pi \mathbf{i} n s} + t a_{n-1} e^{2\pi \mathbf{i}(n-1)s} + \cdots + t^{n-1} a_1 e^{2\pi \mathbf{i} s} + t^n a_0$$

eine stetige Abbildung, und

$$G : I \times I \to S^1, \qquad G(s,t) := \frac{\tilde{G}(s,t)/\tilde{G}(0,t)}{|\tilde{G}(s,t)/\tilde{G}(0,t)|}$$

definiert eine Homotopie relative Endpunkten von $G_0 = w_n$ nach $G_1 = f$, vgl. (I.1). Also gilt $[\omega_n] = [f] \in \pi_1(S^1, x_0)$, und daher ist auch $[\omega_n]$ das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Aus Satz I.4.1 folgt nun $n = 0$. □

I.6. Induzierte Homomorphismen. Unter einem *punktierten Raum* verstehen wir ein Paar (X, x_0) wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt ist. Punktierte Räume werden auch als *Räume mit Basispunkt* bezeichnet. Jedem punktierten Raum (X, x_0) haben wir in Abschnitt I.3 seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet.

Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume und ist $\varphi : X \to Y$ stetig mit $\varphi(x_0) = y_0$, dann nennen wir φ eine *Abbildung punktierter Räume* oder auch *basispunkterhaltende stetige Abbildung* und schreiben $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Ist $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ eine Abbildung punktierter Räume. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$ ist basispunkterhaltend. Unter einem Homöomorphismus punktierter Räume verstehen wir einen basispunkterhaltenden Homöomorphismus.

I.6.1. Proposition. *Eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Ist $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann gilt $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ sowie $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.*

Beweis. Sei also $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildung punktierter Räume, und f eine Schleife bei x_0. Dann ist $\varphi \circ f$ eine Schleife bei y_0. Sind f_0, f_1 zwei Schleife bei x_0 mit $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$, so ist $\varphi \circ H : I \times I \to Y$ eine Homtopie von Wegen mit $\varphi \circ f_0 \overset{\varphi \circ H}{\simeq} \varphi \circ f_1$, also $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1] \in \pi_1(Y, y_0)$. Dies zeigt, dass φ_* wohldefiniert ist. Für zwei Schleifen f, g bei x_0 gilt offensichtlich $\varphi \circ (fg) = (\varphi \circ f)(\varphi \circ g)$, also ist φ_* ein Homomorphismus. Die verbleibenden Aussagen sind trivial. □

I.6.2. Proposition. *Ist $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus punktierter Räume, so ist die induzierte Abbildung $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Es bezeichne $\varphi^{-1} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ die Umkehrabbildung. Aus Proposition I.6.1 erhalten wir $(\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Daher sind φ_* und $(\varphi^{-1})_*$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

I.6.3. Bemerkung. Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwei Homöomorphismen punktierter Räume, dann stimmen die induzierten Isomorphismen φ_* und ψ_* i.A. nicht überein, siehe etwa Beispiel I.6.5 unten.

I.6.4. Proposition. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und es bezeichne X_0 die Wegzusammenhangskomponente von x_0. Dann induzierte die kanonische Inklusion $\iota : (X_0, x_0) \to (X, x_0)$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(X_0, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. *Zur Surjektivität von ι_*:* Ist $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0, dann liegt diese zur Gänze in X_0 und kann daher als Schleife $f' : I \to X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ f' = f$. Diese repräsentiert ein Element $[f'] \in \pi_1(X_0, x_0)$ für das offensichtlich $\iota_*[f'] = [\iota \circ f'] = [f]$ gilt. *Zur Injektivität von ι_*:* Es sei $f' : I \to X_0$ eine Schleife bei x_0 mit $\iota_*[f'] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Dann existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $H : I \times I \to X$ mit $\iota \circ f' \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$. Da $I \times I$ wegzusammenhängend ist, nimmt H nur Werte in X_0 an, kann daher als Homotopie $H' : I \times I \to X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ H' = H$. Aus der Injektivität von ι folgt $f' \overset{H'}{\simeq} c_{x_0}$, also ist $[f'] = 1 \in \pi_1(X_0, x_0)$, und ι_* daher injektiv. □

I.6.5. Beispiel. Betrachte $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und den Basispunkt $x_0 := 1 \in S^1$. Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne $p_k : (S^1, x_0) \to (S^1, x_0)$, $p(z) := z^k$. Die induzierte Abbildung $(p_k)_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$ erfüllt dann $\big(\phi^{-1} \circ (p_k)_* \circ \phi\big)(n) = kn$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ den Isomorphismus aus Satz I.4.1 bezeichnet. Es ist nämlich $(p_k \circ \omega_n)(s) = (e^{2\pi \mathbf{i} ns})^k = e^{2\pi \mathbf{i} kns} = \omega_{kn}(s)$, vgl. (I.1), und daher $\big(\phi^{-1} \circ (p_k)_* \circ \phi\big)(n) = \phi^{-1}\big((p_k)_*[\omega_n]\big) = \phi^{-1}([p_k \circ \omega_n]) = \phi^{-1}[\omega_{kn}] = kn$. In anderen Worten, das

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "\cdot k"] & \pi_1(S^1, x_0) \arrow[d, "(p_k)_*"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & \pi_1(S^1, x_0) \end{tikzcd}$$

nebenstehende Diagramm ist kommutativ, wobei $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z}$ den Gruppenhomomorphismus bezeichnet der durch Multiplikation mit k gegeben ist, $n \mapsto nk$. Beachte, dass p_1 und p_{-1} beides Homöomorphismen sind, die induzierten Homomorphismen $(p_1)_*$ und $(p_{-1})_*$ aber nicht übereinstimmen.

I.6.6. Beispiel. $S^n \setminus \{P\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und daher einfach zusammenhängend, $P \in S^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Um dies einzusehen betrachten wir zunächst die Inversion mit Pol P,

$$\nu_P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\}, \qquad \nu_P(x) := P + \frac{2}{\|x-P\|^2}(x-P).$$

Eine einfache Rechnung zeigt $\nu_P^2 = \nu_P \circ \nu_P = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{P\}}$, insbesondere ist ν_P ein Homöomorphismus. Weiters gilt

$$\|\nu_P(x)\|^2 = 1 + \frac{4\langle x, P\rangle}{\|x-P\|^2}$$

und daher ist $\nu_P(x) \in S^n$ genau dann, wenn $x \in P^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, P\rangle = 0\}$. Die Einschränkung von ν_P liefert daher einen Homöomorphismus

$$\varphi_P : P^\perp \to S^n \setminus \{P\}, \qquad \varphi_P(x) = P + \frac{2}{\|x-P\|^2}(x-P).$$

Dieser Homöomorphismus wird die *stereographische Projektion mit Pol P* genannt.[4] Als Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist $P^\perp$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, daher ist auch $S^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Nach Proposition I.6.2 und Beispiel I.3.9 ist daher $S^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend.

I.6.7. Satz. *S^n ist einfach zusammenhängend, für $n \geq 2$.*

Beweis. Bezeichne mit $N := (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ den Nordpol und mit $x_0 := S := (-1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ den Südpol. Weiters betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{S\}$. Nach Beispiel I.6.6 ist $\pi_1(U, x_0) = 0$, es genügt daher zu zeigen, dass die von der kanonischen Inklusion $\iota : (U, x_0) \to (S^n, x_0)$ induzierte Abbildung $\iota_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(S^n, x_0)$ surjektiv ist. Sei dazu $f : I \to S^n$ eine Schleife bei x_0. Es ist zu zeigen, dass f homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in U ist. Da $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von S^n ist, bilden auch

[4] Unter *der* stereographischen Projektion wird üblicherweise die stereographische Projektion mit Pol $P = N = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ verstanden.

die beiden Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung des Intervalls I. Nach Lemma I.4.12 finden wir daher $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$, sodass für jedes $i = 1, \dots, m$ entweder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ oder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ gilt. Durch Weglassen gewisser s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \neq N$, für jedes $0 \leq i \leq m$, denn ist $f(s_i) = N$ dann muss $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ und $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq V$ gelten. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \to S^n$, $f_i(s) := f\big((1-s)s_{i-1}+ss_i\big)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Nach Beispiel I.1.3 gilt dann $f \simeq f_1 f_2 \cdots f_m$, wobei wir wieder auf die Klammersetzung verzichten, da sie für die Aussage unwesentlich ist, vgl. Lemma I.2.2. Es genügt nun zu zeigen, dass jedes f_i homotop relativ Endpunkten zu einem Weg in U ist, denn dann ist auch f homotop relativ Endpunkten zu einer Schkeife in U, siehe Lemma I.2.1. Für die i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ ist nichts zu zeigen. Betrachten wir also ein i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$, dh. $f_i(I) \subseteq V$. Die stereographischen Projektion $\varphi_S : \mathbb{R}^n = S^\perp \to S^n \setminus \{S\} = V$ aus Beispiel I.6.6 ist ein Homöomorphismus mit $\varphi_S(0) = N$. Also ist $\varphi_S^{-1} \circ f_i : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $(\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0) \neq 0 \neq (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$, denn $f(s_i) \neq N$. Da $n \geq 2$ finden wir einen Weg $g_i : I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g_i(0) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0)$ und $g_i(1) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$. Nach Konstruktion ist $\varphi_S \circ g_i$ ein Weg in $V \setminus \{N\} \subseteq U$. Da $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, sind die beiden Wege $\varphi_S^{-1} \circ f_i$ und g_i homotop relativ Endpunkten in $\mathbb{R}^n$, siehe Proposition I.3.10, also sind auch f_i und $\varphi_S \circ g_i$ homotop relativ Endpunkten in $V \subseteq S^n$. $\square$

I.6.8. Beispiel. Wir erinnern uns, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die Menge aller 1-dimensionalen komplexen linearen Teilräume von $\mathbb{C}^{n+1}$ bezeichnet, $n \in \mathbb{N}_0$. Führen wir auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \lambda v = w$ ein, dann können wir $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim$ identifizieren, $\mathbb{C}v \leftrightarrow [v]$. Wir versehen $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim.$$

Betrachten wir S^{2n+1} als Teilraum von $\mathbb{C}^{n+1}$, $S^{2n+1} = \big\{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \|v\| = 1\big\}$, dann induziert die kanonische Inklusion $S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus $S^{2n+1}/\sim \;\cong \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim$. Seine Inverse ist die von der radialen Projektion $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^{2n+1}$, $v \mapsto \frac{1}{\|v\|}v$, induzierte stetige Abbildung $\big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim \;\to S^{2n+1}/\sim$. Da S^{2n+1} kompakt ist, und da auch die Äquivalenzklassen in S^{2n+1} abgeschlossen sind, sehen wir, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ein kompakter Hausdorffraum ist. $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist homöomorph zu S^2 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2. Tatsächlich induziert die Abbildung $\varphi : S^3 \to S^2$, $\varphi(z, w) := \big(2\bar{z}w, |w|^2 - |z|^2\big)$, einen Homöomorphismus $S^3/\sim \;\cong S^2$, siehe Aufgabe 8. Wir werden später sehen, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einfach zusammenhängend ist, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, siehe Beispiel I.9.17 unten.

I.6.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die spezielle unitäre Gruppe

$$\mathrm{SU}_n := \big\{U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : U^*U = I_n,\ \det U = 1\big\},$$

versehen mit der von $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Hier bezeichnet $I_n \in \mathrm{SU}_n$ die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Da durch stetige Gleichungen gegeben, ist SU_n abgeschlossen in $\mathbb{C}^{n^2}$. Da die Spalten einer unitären Matrix Einheitsvektoren bilden, ist $\mathrm{SU}_n \subseteq \mathbb{C}^{n^2}$ auch beschränkt. Nach dem Satz von Heine–Borel ist SU_n daher kompakt. SU_1 ist ein einpunktiger Raum. SU_2 ist homöomorph zu S^3 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2. Um einen Homöomorphismus $S^3 \cong \mathrm{SU}_2$ anzugeben betrachten wir S^3 als Teilraum von $\mathbb{C}^2$, $S^3 = \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\big\}$. Es ist dann

$$\varphi : S^3 \to \mathrm{SU}_2, \qquad \varphi(z,w) := \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus, siehe Aufgabe 7. Wir werden später sehen, dass SU_n einfach zusammenhägend ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

I.6.10. Satz. *Es existiert keine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $f : S^2 \to S^1$ ist eine stetige Abbidung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$. Weiters betrachten wir die Inklusion von S^1 als Äquator in S^2, $\iota : (S^1, x_0) \to (S^2, y_0)$, $\iota(z) := (z, 0)$, wobei $x_0 = 1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ den üblichen Basispunkt bezeichnet und wir $y_0 := \iota(x_0) \in S^2$ als Basispunkt von $S^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ verwenden. Die Abbildung $g : S^2 \to S^1$, $g(y) := f(y)/f(y_0)$, ist dann basispunkterhaltend, $g : (S^2, y_0) \to (S^1, x_0)$, und hat ebenfalls die Eigenschaft $g(-y) = -g(y)$, $y \in S^2$. Schließlich betrachten wir die Komposition $h := g \circ \iota : (S^1, x_0) \to (S^1, x_0)$, für die dann natürlich $h(-z) = -h(z)$ gilt, $z \in S^1$. Betrachte nun den induzierten Homomorphismus

$$h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0). \tag{I.4}$$

Nach Satz I.6.7 ist $\pi_1(S^2, y_0) = 0$, aus $h_* = (g \circ \iota)_* = g_* \circ \iota_*$ folgt daher, dass h_* mit dem trivialen (konstanten) Homomorphismus übereinstimmt. Unter Verwendung der Relation $h(-z) = -h(z)$ werden wir nun einen Widerspruch herleiten indem wir zeigen, dass (I.4) nicht der triviale Homomorphismus sein kann.

Dazu betrachten wir wieder die Schleife $\omega_1 : I \to S^1$, siehe (I.1). Da $(h \circ \omega_1)(0) = h(x_0) = x_0 = p(0)$ existiert ein Weg $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{h} = h \circ \omega_1$ und $\tilde{h}(0) = 0$, siehe Proposition I.4.5. Es gilt $p(\tilde{h}(\frac{1}{2})) = h(\omega_1(\frac{1}{2})) = h(-x_0) = -h(x_0) = -1$, also existiert $q \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{h}(\frac{1}{2}) = q + \frac{1}{2}$. Weiters ist

$$\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2} + \tfrac{1}{2}\big) = \tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big) + q + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{für alle } s \in I. \tag{I.5}$$

Um dies einzusehen betrachte die durch die beiden Seiten dieser Gleichung gegebenen Wege $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$, $\alpha(s) := \tilde{h}(\frac{s}{2} + \frac{1}{2})$, $\beta(s) := \tilde{h}(\frac{s}{2}) + q + \frac{1}{2}$. Da $\alpha(0) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) = q + \frac{1}{2}$ und $\beta(0) = \tilde{h}(0) + q + \frac{1}{2} = q + \frac{1}{2}$ sehen wir, dass α und β beim gleichen Punkt starten, $\alpha(0) = \beta(0)$. Für $s \in I$ gilt

$$(p \circ \alpha)(s) = p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2} + \tfrac{1}{2}\big)\big) = h\big(\omega_1\big(\tfrac{s}{2} + \tfrac{1}{2}\big)\big) = h\big(-\omega_1\big(\tfrac{s}{2}\big)\big) = -h\big(\omega_1\big(\tfrac{s}{2}\big)\big),$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Relation $h(-z) = -h(z)$ verwendet haben. Andererseits gilt auch

$$(p \circ \beta)(s) = p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big) + q + \tfrac{1}{2}\big) = p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big) + \tfrac{1}{2}\big) = -p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big)\big) = -h\big(\omega_1\big(\tfrac{s}{2}\big)\big).$$

Daher liften α und β denselben Weg in S^1, dh. $p \circ \alpha = p \circ \beta$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 erhalten wir daher $\alpha = \beta$ womit (I.5) gezeigt wäre. Setzen wir in (I.5) $s = 1$ so erhalten wir $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + q + \frac{1}{2} = 2q + 1 \neq 0$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, schließen wir $\tilde{h} \simeq \tilde{\omega}_{2q+1}$, wobei $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}_n(s) := ns$, siehe Beispiel I.4.6. Durch Komposition mit p erhalten wir $h \circ \omega_1 = p \circ \tilde{h} \simeq p \circ \tilde{\omega}_{2q+1} = \omega_{2q+1}$, also $h_*([\omega_1]) = [h \circ \omega_1] = [\omega_{2q+1}]$. Aus Satz I.4.1 folgt nun, dass $h_*([\omega_1])$ nicht das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$ sein kann. Also ist der induzierte Homomorphismus (I.4) nicht trivial und wir erhalten einen Widerspruch. Daher kann es keine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ geben. □

I.6.11. Bemerkung. Wir werden später sehen, dass Satz I.6.10 in höheren Dimensionen richtig bleibt: ist $f : S^m \to S^n$ stetig und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^m$, dann muss $m \leq n$ sein. Für $m \leq n$ existieren tatsächlich solche Abbildungen, etwa $f : S^m \to S^n$, $f(x) := (x, 0, \dots, 0)$.

I.6.12. Satz (Borsuk–Ulam). *Ist $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Indirekt angenommen es gilt $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Die stetige Abbildung

$$g : S^2 \to S^1, \qquad g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\big|f(x) - f(-x)\big|}$$

erfüllt dann $g(-x) = -g(x)$ und wir erhalten einen Widerspruch zu Satz I.6.10. Also muss $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$ existieren. □

I.6.13. Bemerkung. Inbesondere sehen wir, dass es nicht möglich ist S^2 injektiv und stetig nach $\mathbb{R}^2$ abzubilden, dh. S^2 kann nicht homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^2$ sein. Auch Satz I.6.12 bleibt in höheren Dimensionen richtig: ist $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Dies folgt analog aus der Verallgemeinerung von Satz I.6.10. Umgekehrt lässt sich Satz I.6.10 auf elementare Weise aus Satz I.6.12 herleiten, denn eine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ können wir als stetige Abbildung $S^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen für die dann sicherlich $f(x) \neq f(-x)$ gilt.

I.7. Produkte. Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen wie die Fundamentalgruppe eines Produktraumes mit den Fundamentalgruppen der Faktoren zusammenhängt. Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume, dann ist auch

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) := \big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$$

ein punktierter Raum, der als das *Produkt der punktierten Räume* (X, x_0) und (Y, y_0) bezeichnet wird. Die Projektionen auf die beiden Komponenten liefern zwei Abbildungen punktierter Räume $p_X : (X, x_0) \times (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $p_Y : (X, x_0) \times (Y, y_0) \to (Y, y_0)$, die als *kanonische Projektionen* bezeichnet werden. Das Produkt punktierter Räume hat die folgende *universelle Eigenschaft:* Ist (Z, z_0) ein weiterer punktierter Raum und sind $\varphi_X : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ sowie $\varphi_Y : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$, sodass $p_X \circ \varphi = \varphi_X$ und $p_Y \circ \varphi = \varphi_Y$ gilt. Das nebenstehende kommutative Diagramm soll dies verdeutlichen. Diese Abbildung φ ist durch $\varphi(x, y) = (\varphi_X(x), \varphi_Y(x))$ gegeben und wird mit (φ_X, φ_Y) bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} & & (X,x_0) \\ (Z,z_0) \arrow[urr, bend left, "\varphi_X"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_Y"'] \arrow[rr, dashed, "\exists!\varphi"] & & (X,x_0)\times(Y,y_0) \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\ & & (Y,y_0) \end{tikzcd}$$

Das Produkt punktierter Räume ist durch seine universelle Eigenschaft bis auf kanonischen Homöomorphismus eindeutig bestimmt. Genauer meinen wir hier folgendes: Sei (P, p_0) ein punktierter Raum und seien $\pi_X : (P, p_0) \to (X, x_0)$ und $\pi_Y : (P, p_0) \to (Y, y_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume die ebenfalls die universelle Eigenschaft haben, dh. zu je zwei Abbildungen punktierter Räume $\varphi_X : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ und $\varphi_Y : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ gibt es eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \to (P, p_0)$ mit $\pi_X \circ \varphi = \varphi_X$ und $\pi_Y \circ \varphi = \varphi_Y$. Dann gibt es genau einen Homöomorphismus punktierter Räume $\psi : (P, p_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$ mit $p_X \circ \psi = \pi_X$ und $p_Y \circ \psi = \pi_Y$.[5] Das Tripel $\big((P, p_0), \pi_X, \pi_Y\big)$ kann daher in kanonischer Weise mit dem Tripel $\big((X, x_0) \times (Y, y_0), p_X, p_Y\big)$ identifiziert werden.

Sind G und H zwei Gruppen, dann ist $G \times H$ bezüglich komponentenweiser Multiplikation wieder eine Gruppe. Die beiden kanonischen Projektionen $p_G : G \times H \to G$ und $p_H : G \times H \to H$ sind Gruppenhomomorphismen. Das Produkt $G \times H$ hat die folgende *universelle Eigenschaft:* Sind $\varphi_G : K \to G$ und $\varphi_H : K \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \to G \times H$ mit $p_G \circ \varphi = \varphi_G$ und $p_H \circ \varphi = \varphi_H$. Dieser Homomorphimus ist durch $\varphi(k) = (\varphi_G(k), \varphi_H(k))$ gegeben und wird mit (φ_G, φ_H) bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} & & G \\ K \arrow[urr, bend left, "\varphi_G"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_H"'] \arrow[rr, dashed, "\exists!\varphi"] & & G\times H \arrow[u, "p_G"'] \arrow[d, "p_H"] \\ & & H \end{tikzcd}$$

Das Produkt von Gruppen ist bis auf kanonischen Isomorphimus durch seine universelle Eigenschaft eindeutig

[5] Wir erhalten ψ indem wir die universelle Eigenschaft von $(X, x_0) \times (Y, y_0)$ auf $\varphi_X = \pi_X$ und $\varphi_Y = \pi_Y$ anwenden. Die Umkehrabbildung von ψ erhalten wir indem wir die universelle Eigenschaft von (P, p_0) auf $\varphi_X = p_X$ und $\varphi_Y = p_Y$ anwenden. Dass dies tatsächlich die Umkehrabbildung liefert folgt dann aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von (P, p_0) angewandt auf $\varphi_X = \pi_X$ und $\varphi_Y = \pi_Y$, sowie der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $(X, x_0) \times (Y, y_0)$ angewandt auf $\varphi_X = p_X$ und $\varphi_Y = p_Y$.

bestimmt. Genauer, sei P eine Gruppe und seien $\pi_G : P \to G$ sowie $\pi_H : P \to H$ zwei Homomorphismen die ebenfalls die universelle Eigenschaft besitzen, dh. zu je zwei Homomorphismen $\varphi_G : K \to G$ und $\varphi_H : K \to H$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : K \to P$ mit $\pi_G \circ \varphi = \varphi_G$ und $\pi_H \circ \varphi = \varphi_H$. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\psi : P \to G \times H$ mit $p_G \circ \psi = \pi_G$ und $p_H \circ \psi = \pi_H$.[6] Das Tripel $\big(P, \pi_G, \pi_H\big)$ kann daher in kanonischer Weise mit dem Tripel $\big(G \times H, p_G, p_H\big)$ identifiziert werden.

Nun aber zur Fundamentalgruppe des Produkts $(X, x_0) \times (Y, y_0)$. Die kanonischen Projektionen induzieren zwei Gruppenhomomorphismen:

$$(p_X)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0), \qquad [f] \mapsto (p_X)_*([f]) = [p_X \circ f]$$
$$(p_Y)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(Y, y_0), \qquad [f] \mapsto (p_Y)_*([f]) = [p_Y \circ f]$$

Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big) : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \tag{I.6}$$

der durch $[f] \mapsto \big([p_X \circ f], [p_Y \circ f]\big)$ gegeben ist.

I.7.1. Proposition. *Für punktierte Räume* (X, x_0) *und* (Y, y_0) *ist* (I.6) *ein Isomorphismus von Gruppen. Seine Inverse ist durch* $\big([f_X], [f_Y]\big) \mapsto [(f_X, f_Y)]$ *gegeben.*

Beweis. *Zur Surjektivität:* Es sei $([f_X], [f_Y]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Dann ist $f := (f_X, f_Y) : I \to X \times Y$ eine Schleife bei (x_0, y_0) und offensichtlich gilt $\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big)([f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = ([f_X], [f_Y])$. Also ist (I.6) surjektiv. *Zur Injektivität:* Sei also $[f] \in \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$, sodass $\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big)([f]) = 1 \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Dann ist $[p_X \circ f] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$ und $[p_Y \circ f] = 1 \in \pi_1(Y, y_0)$. Also existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $H^X : I \times I \to X$ von $p_X \circ f$ nach c_{x_0}, und eine Homotopie relativ Endpunkten $H^Y : I \times I \to Y$ von $p_Y \circ f$ nach c_{y_0}. Es definiert dann $H := (H^X, H^Y) : I \times I \to X \times Y$ eine Homotopie relativ Endpunkten von f nach $c_{(x_0, y_0)}$. Damit ist $[f] = 1 \in \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$ und (I.6) also injektiv. $\square$

I.7.2. Beispiel. Für $m, n \geq 2$ ist $S^m \times S^n$ einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Satz I.6.7 und Proposition I.7.1.

I.7.3. Bemerkung. Ist $\pi_1(Y, y_0) = 0$, dann induzieren die Projektion p_X und die Inklusion $\iota : (X, x_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$, $\iota(x) := (x, y_0)$, zueinander inverse Gruppenisomorphismen $(p_X)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0)$ und $\iota_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$. Dies folgt sofort aus Proposition I.7.1.

I.7.4. Beispiel. Für $P \in \mathbb{R}^n$ ist $\varphi : S^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$, $\varphi(x, t) := P + tx$, ein Homöomorphismus. Mit Hilfe von Satz I.6.7 und Proposition I.7.1 sehen wir, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist, falls $n \geq 3$. Ist $n = 2$

[6] Wir erhalten ψ und seine Umkehrabbildung völlig analog zu der Konstruktion für Produkte punktierter Räume.

so gilt $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz I.4.1 und Proposition I.7.1. Genauer, und für $P = 0$, sehen wir, dass die Inklusion $\iota : S^1 \to \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ induziert, siehe Bemerkung I.7.3 Im Fall $n = 1$ ist $\mathbb{R}^1 \setminus \{P\}$ nicht (weg)zusammenhängend, also auch nicht einfach zusammenhängend.

I.7.5. Satz. *$\mathbb{R}^2$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, für $2 \neq n$.*

Beweis. Für $n = 0$ ist dies trivial, denn $\mathbb{R}^0$ ist ein einpunktiger Raum während $\mathbb{R}^2$ natürlich mehr als einen Punkt besitzt. Es genügt daher den Fall $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ wäre ein Homöomorphismus, $2 \neq n \in \mathbb{N}$. Wähle einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und setze $Q := \varphi(P)$. Die Einschränkung $\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$ ist dann ebenfalls ein Homöomorphismus. Nach Beispiel I.7.4 ist aber $\mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$ einfach zusammenhängend während $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Wir erhalten also einen Widerspruch, siehe Proposition I.6.2. Daher kann kein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ existieren. □

I.7.6. Bemerkung. Es gilt allgemein $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$, falls $m \neq n$. Wir werden dies später zeigen, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nur dann *diffeomorph* sein können, wenn $m = n$ gilt. Ist nämlich $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ beliebig, dann folgt aus der Kettenregel, dass die Jacobimatrix $D_{x_0}\varphi$ einen linearen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ liefert, und dies ist natürlich nur für $m = n$ möglich.

I.7.7. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$$

den n-dimensionalen Torus. Aus Proposition I.7.1 und Satz I.4.1 folgt mittels Induktion $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Ein expliziter Isomorphismus ist durch $\phi : \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n)$, $\phi(k) := [\omega_k]$, gegeben. Hierbei bezeichnet $\omega_k : I \to T^n$ den Weg $\omega_k(s) := \big(e^{2\pi \mathbf{i} k_1 s}, \dots, e^{2\pi \mathbf{i} k_n s}\big)$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, und als Basispunkt verwenden wir $(1, \dots, 1) \in S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$. Insbesondere sehen wir, dass S^2 nicht homöomorph zu T^2 sein kann, denn die Fundamentalgruppen $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ sind nicht isomorph, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2.

I.7.8. Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ betrachte die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^n : y = x + k$. Die Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to T^n$, $p(x_1, \dots, x_n) := \big(e^{2\pi \mathbf{i} x_1}, \dots, e^{2\pi \mathbf{i} x_n}\big)$ induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n/{\sim} \cong T^n$. Wir können den Torus daher auch als Quotient von $\mathbb{R}^n$ verstehen. Mit $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ bezeichnen wir die Menge aller ganzzahligen $(n \times n)$-Matrizen. Jedes $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ definiert eine stetige (lineare) Abbildung $\tilde\mu_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tilde\mu_A(x) := Ax$. Beachte, dass aus $x \sim y$ auch $\tilde\mu_A(x) \sim \tilde\mu_A(y)$ folgt. Daher faktorisiert $\tilde\mu_A$ zu einer stetigen Abbildung $\mu_A : T^n \to T^n$, $p \circ \tilde\mu_A = \mu_A \circ p$. Beachte auch, dass μ_A den Basispunkt $p(0) = (1, \dots, 1) \in T^n$ festhält, denn $\tilde\mu_A(0) = 0$. Wir wollen nun die induzierten Gruppenhomomorphismen $(\mu_A)_* : \pi_1(T^n) \to \pi_1(T^n)$ bestimmen. Genauer wollen wir zeigen, dass $\big(\phi^{-1} \circ (\mu_A)_* \circ \phi\big)(k) = Ak$ gilt, $k \in \mathbb{Z}^n$, wobei $\phi : \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n)$ den Isomorphismus aus Beispiel I.7.7 bezeichnet. In anderen Worten, wir wollen zeigen, dass das nebenstehende Diagramm kommutiert. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ betrachten wir den Weg $\tilde\omega_k : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde\omega_k(s) := sk$. Offensichtlich gilt dann $p \circ \tilde\omega_k = \omega_k$, wobei $\omega_k : I \to T^n$ den Weg aus Beispiel I.7.7 bezeichnet. Weiteres haben wir die Relation $\tilde\mu_A \circ \tilde\omega_k = \tilde\omega_{Ak}$. Wir erhalten daraus $\mu_A \circ \omega_k = \mu_A \circ p \circ \tilde\omega_k = p \circ \tilde\mu_A \circ \tilde\omega_k = p \circ \tilde\omega_{Ak} = \omega_{Ak}$, also $[\mu_A \circ \omega_k] = [\omega_{Ak}]$. Somit ist $\big((\mu_A)_* \circ \phi\big)(k) = (\mu_A)_*([\omega_k]) = [\mu_A \circ \omega_k] = [\omega_{Ak}] = \phi(Ak)$, und die Behauptung bewiesen.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^n \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "A"] & \pi_1(T^n) \arrow[d, "(\mu_A)_*"] \\ \mathbb{Z}^n \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & \pi_1(T^n) \end{tikzcd}$$

Für $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ gilt $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$, denn $\tilde\mu_{AB} = \tilde\mu_A \circ \tilde\mu_B$. Schränken wir uns auf invertierbare $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n} : \det A = \pm 1\big\}$ ein, so erhalten wir einen interessanten Homomorphismus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Homeo}(T^n)$, $A \mapsto \mu_A$, wobei $\mathrm{Homeo}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen eines topologischen Raumes X bezeichnet.

I.7.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{U}_n := \big\{U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \bigm| U^*U = I_n\big\}$$

die Gruppe der unitären $(n \times n)$-Matrizen versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Etwa ist $\mathrm{U}_1 = S^1$. Die Abbildung

$$\varphi : S^1 \times \mathrm{SU}_n \to \mathrm{U}_n, \qquad \varphi(z, U) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix} U$$

ist ein Homöomorphismus mit Inverser $\varphi^{-1}(U) = \Big(\det U, \left(\begin{smallmatrix} \det U & 0 \\ 0 & I_{n-1}\end{smallmatrix}\right)^* U\Big)$, siehe Beispiel I.6.9. Aus Proposition I.7.1 und Satz I.4.1 folgt $\pi_1(\mathrm{U}_n) \cong \mathbb{Z} \times \pi_1(\mathrm{SU}_n)$, wobei wir die Einheitsmatrix $I_n \in \mathrm{SU}_n \subseteq \mathrm{U}_n$ als Basispunkt verwenden. Zusammen mit Beispiel I.6.9 erhalten wir insbesondere $\pi_1(\mathrm{U}_2) \cong \mathbb{Z}$. Die Schleife $I \to \mathrm{U}_2$, $s \mapsto \left(\begin{smallmatrix} e^{2\pi \mathbf{i} s} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U_2)$. Allgemein gilt $\pi_1(\mathrm{U}_n) \cong \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wie wir später zeigen werden.

I.7.10. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\big\}$$

die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit komplexen Eintragungen, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Weiters sei

$$\Delta_n(\mathbb{C}) := \big\{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : D_{i,i} \in (0, \infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\big\}$$

die Gruppe der komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Eintragungen auf der Diagonale, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Der Raum $\Delta_n(\mathbb{C})$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2}$ und daher einfach zusammenhängend. Die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{U}_n \times \Delta_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \varphi(U, D) := UD \tag{I.7}$$

ist sicherlich wohldefiniert und stetig. Auch ist leicht einzusehen, dass φ injektiv ist, denn aus $U_1 D_1 = U_2 D_2$, $U_i \in \mathrm{U}_n$, $D_i \in \Delta_n(\mathbb{C})$, folgt $U_2^{-1} U_1 = D_2 D_1^{-1} \in$

$\mathrm{U}_n \cap \Delta_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$, also $U_1 = U_2$ und $D_1 = D_2$. Tatsächlich ist (I.7) ein Homöomorphismus. Dies folgt aus dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren wie folgt. Sei $A = (v_1|v_2|\cdots|v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit Spalten $v_i \in \mathbb{C}^n$. Definiere rekursiv

$$\begin{aligned}
\tilde u_1 &:= v_1 & u_1 &:= \tfrac{1}{|\tilde u_1|}\tilde u_1 \\
\tilde u_2 &:= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 & u_2 &:= \tfrac{1}{|\tilde u_2|}\tilde u_2 \\
&\vdots \\
\tilde u_k &:= v_k - \langle v_k, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_k, u_{k-1}\rangle u_{k-1} & u_k &:= \tfrac{1}{|\tilde u_k|}\tilde u_k \\
&\vdots \\
\tilde u_n &:= v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1} & u_n &:= \tfrac{1}{|\tilde u_n|}\tilde u_n
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion bildet $(u_1, \dots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$, also ist $\psi_1(A) := (u_1|u_2|\cdots|u_n) \in \mathrm{U}_n$. Dies liefert eine stetige Abbildung $\psi_1 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}_n$, $A \mapsto \psi_1(A)$. Beachte weiters, dass

$$\underbrace{\big(u_1\big|u_2\big|\cdots\big|u_n\big)}_{=\psi_1(A)} = \underbrace{\big(v_1\big|v_2\big|\cdots\big|v_n\big)}_{=A} \cdot \underbrace{D_1N_1D_2N_2\cdots D_nN_n}_{\in\Delta_n(\mathbb{C})}$$

wobei $D_k, N_k \in \Delta_n(\mathbb{C})$ durch

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & & & -\langle v_k,u_1\rangle & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\langle v_k,u_{k-1}\rangle & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{|\tilde u_k|} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Daher ist $\psi_1(A)^{-1}A = (D_1N_1\cdots D_nN_n)^{-1} \in \Delta_n(\mathbb{C})$ und wir erhalten eine stetige Abbildung $\psi_2 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \Delta_n(\mathbb{C})$, $\psi_2(A) := \psi_1(A)^{-1}A$. Setzten wir $\psi := (\psi_1, \psi_2) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}_n \times \Delta_n(\mathbb{C})$, dann gilt offensichtlich $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, also ist (I.7) surjektiv. Zusammen mit der Injektivität von (I.7) folgt, dass ψ die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist (I.7) tatsächlich ein Homöomorphismus. Da $\Delta_n(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist folgt nun, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{U}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ induziert, siehe Bemerkung I.7.3. Zusammen mit Beispiel I.7.9 erhalten wir $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathrm{U}_2) \cong \mathbb{Z}$. Allgemein gilt $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wie wir später sehen werden.

I.7.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\big\}$$

die Gruppe der invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Weiters sei

$$\Delta_n(\mathbb{R}) := \big\{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : D_{i,i} \in (0,\infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\big\}$$

die Gruppe der reellen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Diagonale, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Der Raum $\Delta_n(\mathbb{R})$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ und daher einfach zusammenhängend. Schränken wir den Homöomorphismus aus Beispiel I.7.9 auf reelle Matrizen ein, so erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathrm{O}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(A, D) := AD,$$

wobei $\mathrm{O}_n := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen bezeichnet, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ induzierten Teilraumtopologie. Insbesondere sehen wir, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{O}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ induziert, egal welchen Basispunkt in O_n wir verwenden. Beachte, dass die Gruppen O_n und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ nicht (weg)zusammenhängend sind, denn $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ ist surjektiv und $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend.

I.7.12. Beispiel. Es bezeichne $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ die Gruppe der reellen Matrizen mit positiver Determinante, und es sei $\mathrm{SO}_n := \{A \in \mathrm{O}_n : \det(A) = 1\}$ die *spezielle orthogonale Gruppe.* Durch Einschränken des Homöomorhismus aus Beispiel I.7.11 erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathrm{SO}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}), \qquad (A, D) \mapsto AD.$$

Insbesondere sehen wir, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ einen Isomorphsimus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{SO}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ induziert. Es ist nicht schwer einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ zu konstruieren, siehe Aufgabe 10. Wir erhalten daher $\pi_1(\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$. Für $n \geq 3$ gilt $\pi_1(\mathrm{SO}_n) \cong \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wie wir später sehen werden.

I.7.13. Beispiel (Triviales Knotenkomplement). Betrachte $X := S^3 \setminus S^1$, wobei $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und $S^1 \subseteq S^3$ via $z \mapsto (z, 0)$. Die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{C} \times S^1$, $\varphi(z, w) := \big(\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|}\big)$ ist ein Homöomorphismus, es gilt daher $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Genauer, die Inklusion $f : S^1 \to X$, $f(w) := (0, w)$, induziert einen Isomorphismus $f_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(X)$. Die Schleife $I \to X$, $s \mapsto (0, e^{2\pi \mathbf{i} s})$, repräsentiert daher einen Erzeuger in $\pi_1(X)$.

I.8. Homotopieinvarianz. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop* falls eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert. Dabei bezeichnet $H_t : X \to Y$ die stetige Abbildung $H_t(x) := H(x, t)$, $t \in I$. Jede solche Abbildung H wird eine *Homotopie* von f nach g genannt. Wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \overset{H}{\simeq} g$. Ist $f : X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung, dh. existiert $y_0 \in Y$ mit $f \simeq c_{y_0}$ wobei $c_{y_0} : X \to Y$, $c_{y_0}(x) := y_0$, dann nennen wir f *nullhomotop.*

I.8.1. Proposition. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \to Y$.*

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.1.1. Ist $f : X \to Y$ stetig, dann gilt $f \overset{H}{\simeq} f$ mit $H : X \times I \to Y$, $H(x,t) := f(x)$, also ist die Relation reflexsiv. Ist $f \overset{H}{\simeq} g$, dann folgt $g \overset{G}{\simeq} f$ mittels $G(x,t) := H(x, 1-t)$, also ist die Relation symmetrisch. Gilt $f \overset{H'}{\simeq} g$ und $g \overset{H''}{\simeq} h$ so definiert

$$H : X \times I \to Y, \qquad H(x,t) := \begin{cases} H'(x,2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(x,2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h, dh. $f \overset{H}{\simeq} h$, und damit ist die Relation auch transitiv. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. □

Die mit obiger Äquivalenzrelation assoziierten Äquivalenzklassen werden *Homotopieklassen* genannt. Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \to Y$ wird mit $[X, Y]$ bezeichnet. Die von $f : X \to Y$ repräsentierte Klasse werden wir mit $[f]$ bezeichnen.

I.8.2. Beispiel. Bezeichnet $\{*\}$ den einpunktigen Raum, dann können wir $[\{*\}, X]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [\{*\}, X]$ die (wohldefinierte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(*)$ enthält.

I.8.3. Bemerkung. Die Menge der Homotopieklassen $[S^1, X]$ hängt eng mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ zusammen, siehe Satz I.8.28 unten.

I.8.4. Lemma. *Es seien $f_0, f_1 : X \to Y$ und $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetige Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$. Dann gilt auch $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Beweis. Es seien $F : X \times I \to Y$ und $G : Y \times I \to Z$ Homotopien mit $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1$. Dann liefert $H : X \times I \to Z$, $H(x,t) := G(F(x,t),t)$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_1 \circ f_1$, dh. $g_0 \circ f_0 \overset{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$. □

I.8.5. Bemerkung. Eine stetige Abbildung $\varphi : Y_1 \to Y_2$ induziert eine Abbildung $\varphi_* : [X, Y_1] \to [X, Y_2]$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Nach Lemma I.8.4 ist φ_* wohldefiniert. Ist $\psi : Y_2 \to Y_3$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt offensichtlich $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : [X, Y_1] \to [X, Y_3]$ und $(\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{[X,Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : Y_1 \to Y_2$ homotop, so gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : [X, Y_1] \to [X, Y_2]$, siehe Lemma I.8.4. Eine stetige Abbildung $\varphi : X_2 \to X_1$ induziert eine Abbildung $\varphi^* : [X_1, Y] \to [X_2, Y]$, $\varphi^*([f]) := [f \circ \varphi]$. Wieder ist φ^* wegen Lemma I.8.4 wohldefiniert. Ist $\psi : X_3 \to X_2$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* : [X_1, Y] \to [X_3, Y]$ und $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{[X,Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : X_2 \to X_1$ homotop, so gilt $(\varphi_0)^* = (\varphi_1)^* : [X_1, Y] \to [X_2, Y]$, siehe Lemma I.8.4. Sind $\varphi : Y_1 \to Y_2$ und $\psi : X_2 \to X_1$ stetig, dann gilt $\varphi_* \circ \psi^* = \psi^* \circ \varphi_* : [X_1, Y_1] \to [X_2, Y_2]$.

I.8.6. Definition (Homotopieäquivalenz). Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ wird *Homotopieäquivalenz* genannt, falls eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ gilt. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent,* falls eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $X \simeq Y$, und sagen auch X und Y haben den selben *Homotopietyp.*

Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz, denn $g := f^{-1} : Y \to X$ erfüllt ja sogar $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Homöomorphe Räume sind daher stets homotopieäquivalent. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz, es gilt daher stets $X \simeq X$. Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, dann ist trivialerweise auch $g : Y \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Aus $X \simeq Y$ folgt daher $Y \simeq X$. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Homotopieäquivalenzen, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ eine Homotopieäquivalenz, siehe Lemma I.8.4. Aus $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z$ folgt daher stets $X \simeq Z$.

Ein topologischer Raum heißt *kontrahierbar* falls er den Homotopietyp des einpunktigen Raumes $\{*\}$ hat. Ein topologischer Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn die konstante Abbildung $X \to \{*\}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_0 \in X$ existiert, sodass die Inklusion $\{x_0\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Offensichtlich ist X kontrahierbar genau dann, wenn die identische Abbildung id_X nullhomotop ist, dh. wenn $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1 = c_{x_0}$ existieren, wobei $c_{x_0} : X \to X$, $c_{x_0}(x) := x_0$, die konstante Abbildung bezeichnet.[7] Ein kontrahierbarer Raum muss wegzusammenhängend sein, denn für $x \in X$ ist $t \mapsto H(x, t)$ ein Weg von x nach x_0. Ist X kontrahierbar und $x_1 \in X$ beliebig, dann gilt $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_1}$, dh. die Inklusion $\{x_1\} \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz, für jedes $x_1 \in X$. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass ein Weg von x_0 nach x_1 als Homotopie zwischen der Inklusion $\{x_0\} \to X$ und der Inklusion $\{x_1\} \to X$ aufgefasst werden kann.

I.8.7. Definition (Deformationsretrakt). Ein Teilraum A eines topologischen Raumes X heißt *Deformationsretrakt* von X falls eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1(X) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ für alle $t \in I$. In diesem Fall wird $r := H_1 : X \to A$ als *Deformationsretraktion* bezeichnet, und H wird manchmal eine *retrahierende Deformation* genannt. Bezeichnet $\iota : A \to X$ die kanonische Inklusion, so gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, Deformationsretraktionen sind daher Retraktionen. Schließlich ist $\iota : A \to X$ eine Homotopieäquivalenz, denn $\mathrm{id}_X \overset{H}{\simeq} \iota \circ r$.[8]

[7] Es ist nicht verlangt, dass die Homotopie den Punkt x_0 festhält, dh. wir verlangen nicht, dass $H(x_0, t) = x_0$ gilt.

[8] Wir folgen hier den Definitionen in [**14**, page 24] oder [**4**, page 2]. In [**13**, Definition 2.4.3] oder [**10**, page 30] wird dies als *strenger* Deformationsretrakt bezeichnet. Verlangen wir statt $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ nur $H_1|_A = \mathrm{id}_A$ dann erhalten wir den Begriff des *schwachen Deformationsretrakts.*

I.8.8. Beispiel. Die Sphäre S^{n-1} ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es ist nämlich $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H(x,t) := (1-t)x + \frac{t}{|x|}x$ eine retrahierende Deformation. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.9. Beispiel (Möbiusband). Auf $I \times [-1,1]$ betrachte die von $(0,y) \sim (1,-y)$, $y \in [-1,1]$, erzeugte Äquivalenzrelation. Der damit assoziierten Quotientenraum $M := (I \times [-1,1])/\sim$ wird *Möbiusband* genannt. Es bezeichne $p : I \times [-1,1] \to M$ die kanonische Projektion und $S := p(I \times \{0\})$. Die retrahierende Deformation $\tilde{H} : (I \times [-1,1]) \times I \to I \times [-1,1]$, $\tilde{H}(x,y,t) := (x,(1-t)y)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation $H : M \times I \to M$, $p \circ \tilde{H}_t = H_t \circ p$, von M auf S. Daher ist S ein Deformationsretrakt von M und die Inklusion $S \to M$ eine Homotopieäquivalenz. Da S homöomorph zu S^1 ist, erhalten wir $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die Schleife $I \to M$, $s \mapsto p(s,0)$, repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_1(M)$.

I.8.10. Beispiel (Sternförmige Teilmengen). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig,* falls $z \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: $x \in X,\ t \in [0,1] \Rightarrow tz + (1-t)x \in X$. Dies bedeutet gerade, dass die affine Strecke von x nach z zur Gänze in X liegt. Jedes solche z wird ein Zentrum von X genannt. Ist z ein Zentrum von X, dann ist $\{z\}$ ein Deformationsretrakt von X, eine retrahierende Deformation ist durch $H : X \times I \to X$, $H(x,t) := tz + (1-t)x$ gegeben. Insbesondere ist die Inklusion $\{z\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Sternförmige Teilmengen sind daher stets kontrahierbar. Dasselbe gilt für konvexe Teilmengen, denn konvexe Teilmengen sind sternförmig, jeder ihrer Punkte ist Zentrum.

I.8.11. Beispiel. Ist A Deformationsretrakt von X, und ist B Deformationsretrakt von Y, dann ist $A \times B$ Deformationsretrakt von $X \times Y$. Sind nämlich $G : X \times I \to X$ und $H : Y \times I \to Y$ retrahierende Deformationen von X auf A bzw. von Y auf B, so ist $(x,y,t) \mapsto \big(G(x,t), H(x,t)\big)$ eine retrahierende Deformation von $X \times Y$ auf $A \times B$.

I.8.12. Beispiel. Die unitäre Gruppe U_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, siehe Beispiel I.7.10 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.13. Beispiel. Die orthogonale Gruppe O_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, siehe Beispiel I.7.11 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.14. Beispiel. Die spezielle orthogonale Gruppe SO_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, siehe Beispiel I.7.12 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ eine Homotopieäquivalenz.

In diesem Fall ist $r : X \to A$ immer noch eine Retraktion, und auch die Inklusion $\iota : A \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Zwei Abbildungen punktierter Räume $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ heißen *homotop relativ Basispunkt* falls eine stetige Abbildung $H : I \times X \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(x_0, t) = y_0$, für alle $t \in I$, existiert. Jede solche Abbildung H heißt eine *Homotopie relativ Basispunkt* von f nach g. Für jedes $t \in I$ ist $H_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $H_t(x) := H(x, t)$, eine Abbildung punktierter Räume. Wie in Proposition I.8.1 lässt sich zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen punktierter Räume liefert. Die Äquivalenzklassen werden wir mit $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ bezeichnen. Auch Lemma I.8.4 bleibt sinngemäß für Abbildungen punktierter Räume richtig. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ wird *Homotopieäquivalenz punktierter Räume* genannt, falls eine Abbildung punktierter Räume $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ relativ Basispunkt. In diesem Fall schreiben wir $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.

I.8.15. Beispiel. Ist A ein Deformationsretrakt von X und $x_0 \in A$, dann ist die kanonische Inklusion $(A, x_0) \to (X, x_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.[9]

I.8.16. Beispiel. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann können wir die Menge $[(S^0, 1), (X, x_0)]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [(S^0, 1), (X, x_0)]$ die (eindeutig bestimmte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(-1)$ enthält.

I.8.17. Beispiel. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann kann die Menge $[(S^1, 1), (X, x_0)]$ auf kanonische Art mit $\pi_1(X, x_0)$ identifiziert werden, siehe Proposition I.8.27 unten.

I.8.18. Proposition. *(Homotopieinvarianz) Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop relativ Basispunkt, dann induzieren diese denselben Homomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen, dh. $\varphi_* = \psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Sei $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Weiters sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie relativ Basispunkt von $H_0 = \varphi$ nach $H_1 = \psi$. Dann ist $G : I \times I \to Y$, $G(s, t) := H(f(s), t)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_0 \circ f = \varphi \circ f$ nach $G_1 = H_1 \circ f = \psi \circ f$, also $\varphi \circ f \overset{G}{\simeq} \psi \circ f$ und damit $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] = [\psi \circ f] = \psi_*([f])$. □

I.8.19. Beispiel. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_0) \to (T^n, x_0)$ aus Beispiel I.7.8, wobei $x_0 = (1, \dots, 1) \in T^n$. Aus Proposition I.8.18 und der Berechnung des induzierten Homomorphismus in Beispiel I.7.8 sehen wir, dass μ_A und μ_B nicht homotop relativ Basispunkt sind, falls $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$.

I.8.20. Proposition. *Ist $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume, dann induziert diese einen Isomorphimus zwischen den Fundamentalgruppen, $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$.*

[9] Ist A nur ein schwacher Deformationsretrakt, dann ist die Inklusion $(A, x_0) \to (X, x_0)$ i.A. keine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.

Beweis. Sei dazu $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, sodass $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt und $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_Y$ relativ Basispunkt. Aus Proposition I.8.18 folgt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Also sind φ_* und ψ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen. $\square$

I.8.21. Proposition. *Es sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie, $x_0 \in X$, $y_0 := H_0(x_0)$, $y_1 := H_1(x_0)$, und es bezeichne $h : I \to Y$ den Weg $h(t) := H(x_0, t)$ von y_0 nach y_1. Dann gilt $(H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$.*

Beweis. Sei also $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Die Abbildung

$$G : I \times I \to Y, \qquad G(s,t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \le s \le t/4, \\ H\big(f\big(\frac{4s-t}{4-3t}\big), t\big) & \text{falls } t/4 \le s \le 1 - t/2, \\ h(2-2s) & \text{falls } 1 - t/2 \le s \le 1, \end{cases}$$

definiert eine Homotopie relativ Endpunkten in Y von $G_0 = H_0 \circ f$ nach $G_1 = \big(h(H_1 \circ f)\big)\bar{h}$. Also gilt $(H_0)_*([f]) = [H_0 \circ f] = [G_0] = [G_1] = [h(H_1 \circ f)\bar{h}] = \beta_h\big([H_1 \circ f]\big) = \big(\beta_h \circ (H_1)_*\big)([f])$. $\square$

I.8.22. Satz (Homotopieinvarianz). *Ist $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$, dann ist $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Da φ eine Homtopieäquivalenz ist, existieren eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$ sowie Homotopien $H : X \times I \to X$ und $G : Y \times I \to Y$ mit $\psi \circ \varphi \overset{H}{\simeq} \mathrm{id}_X$ und $\varphi \circ \psi \overset{G}{\simeq} \mathrm{id}_Y$. Betrachte den Weg $h : I \to X$, $h(t) := H(x_0, t)$ von $\psi(\varphi(x_0))$ nach x_0, und den Weg $g : I \to Y$, $g(t) := G(\varphi(x_0), t)$ von $\varphi(\psi(\varphi(x_0)))$ nach $\varphi(x_0)$. Nach Proposition I.8.21 gilt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* = \beta_h \circ (\mathrm{id}_X)_* = \beta_h$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (G_0)_* = \beta_g \circ (G_1)_* = \beta_g \circ (\mathrm{id}_Y)_* = \beta_g$. Daher kommutiert das nebenstehende Diagramm. Nach Proposition I.3.5 ist β_h ein Isomorphismus, also muss ψ_* surjektiv sein. Da β_g ein Isomorphismus ist, muss ψ_* auch injektiv sein. Damit ist ψ_* ein Isomorphismus, woraus wir nun schließen, dass $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus sein muss. $\square$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\big(X, x_0\big) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\beta_h"', "\cong"] & \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \arrow[d, "\cong"', "\beta_g"] \arrow[dl, "\psi_*"'] \\
\pi_1\big(X, \psi\varphi(x_0)\big) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1\big(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)\big)
\end{tikzcd}$$

I.8.23. Korollar. *Kontrahierbare Räume sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Ein kontrahierbarer Raum X ist wegzusammenhägend, siehe oben, und die konstante Abbildung $X \to \{*\}$ ist eine Homotopieäquivalenz. Nach Satz I.8.22 induziert diese einen Isomorphismus $\pi_1(X) \cong \pi_1(\{*\})$. Aus $\pi_1(\{*\}) = 0$ folgt daher auch $\pi_1(X) = 0$. $\square$

I.8.24. Bemerkung. Aus Propostion I.6.2 folgt, dass wir die Fundamentalgruppe als eine *topologische Invariante* wegzusammenhängender Räume auffassen können, dh. homöomorphe wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. Satz I.8.22 besagt nun, dass die Fundamentalgruppe sogar eine *Homotopieinvariante* wegzusammenhängender Räume liefert, dh. homotopieäquivalente wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. In anderen Worten, sind die Fundamentalgruppen zweier wegzusammenhängender Räume nicht isomorph, dann können die Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein.

I.8.25. Beispiel. S^n und T^n sind nicht homotopieäquivalent, $n \geq 2$, denn $\pi_1(S^n) = 0$ nach Satz I.6.7 und $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ nach Beispiel I.7.7, siehe auch Bemerkung I.8.24.

Ist A ein nichtleerer Teilraum eines topologischen Raumes X, dann schreiben wir X/A für den Raum der aus X entsteht wenn wir A zu einem einzigen Punkt kollabieren. Genauer bezeichnet $\sim$ die von $a \sim b$, $a, b \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf X, dann definieren wir $X/A := X/\!\sim$ und versehen X/A mit der Quotiententopologie. Wir erhalten eine stetige Abbildung $p : X \to X/A$, die als *kanonische Projektion* bezeichnet wird. Sie bildet ganz A auf einen einzigen Punkt in X/A ab den wir mit $* := p(A)$ bezeichnen. Wir können den Quotienten daher auch als punktierten Raum $(X/A, *)$ auffassen.

I.8.26. Beispiel (Kegel). Ist X ein topologischer Raum, dann wird

$$CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$$

der Kegel über X genannt. Der Basispunkt $\{*\}$ ist ein Deformationsretrakt von CX, die Abbildung $H : (X \times I) \times I \to X \times I$, $H(x, s, t) := (x, (1-t)s)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation von CX auf $\{*\}$. Nach Korollar I.8.23 ist CX daher einfach zusammenhängend.

Unter der *Einpunktvereinigung* zweier punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) verstehen wir den punktierten Raum der aus der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ durch Identifikation der beiden Punkte x_0 und y_0 ensteht. Genauer,

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := \big((X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\}, *\big).$$

Die beiden Abbildungen punktierter Räume $\iota_X : (X, x_0) \to (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_X(x) := [(x, y_0)]$, und $\iota_Y : (Y, y_0) \to (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_Y(y) := [(x_0, y)]$, werden als *kanonische Einbettungen* bezeichnet. Beide sind Homöomorphismen auf ihr Bild, wir können daher (X, x_0), und ebenso (Y, y_0), als Teilraum von $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ auffassen. Die Einpunktvereinigung hat die folgende *universelle Eigenschaft.* Sind $\varphi_X : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ und $\varphi_Y : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \vee (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, sodass $\varphi \circ \iota_X = \varphi_X$ und $\varphi \circ \iota_Y = \varphi_Y$,

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_X"] & \\
(X, x_0) \vee (Y, y_0) \arrow[r, dashed, "\exists ! \varphi"] & (Z, z_0) \\
(Y, y_0) \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, bend right, "\varphi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

siehe nebenstehendes Diagramm. Diese Abbildung ist durch $\varphi(x, y_0) := \varphi_X(x)$, $x \in X$, und $\varphi(x_0, y) := \varphi_Y(y)$, $y \in Y$, gegeben und wird mit $\varphi_X \vee \varphi_Y$ bezeichnet. Beachte, dass $\varphi_X(x_0) = z_0 = \varphi_Y(y_0)$ und daher $\varphi_X \vee \varphi_Y$ wohldefiniert ist.

Betrachte nun wieder $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ mit Basispunkt $1 \in S^1$. Weiters bezeichnen $\iota_1 : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ und $\iota_2 : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ die beiden kanonischen Inklusionen. Wir erhalten eine Abbildung punktierter Räume

$$v : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1), \qquad v(z) := \begin{cases} \iota_1(z^2) & \text{falls } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \iota_2(z^2) & \text{falls } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases} \tag{I.8}$$

Mit Hilfe dieser Abbildung können wir nun eine alternative Beschreibung der Fundamentalgruppe geben.

I.8.27. Proposition. *Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definiert*

$$\Psi = \Psi_{(X,x_0)} : [(S^1, 1), (X, x_0)] \to \pi_1(X, x_0), \qquad \Psi([f]) := [f \circ \omega_1],$$

eine Bijektion, siehe (I.1)*. Darüberhinaus gilt $\Psi([f])\Psi([g]) = \Psi([(f \vee g) \circ v])$ und $\Psi([f])^{-1} = \Psi([f \circ \sigma])$, wobei v die Abbildung aus* (I.8) *bezeichnet und $\sigma : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ durch $\sigma(z) := z^{-1} = \bar{z}$ gegeben ist.*

Beweis. Zunächst ist Ψ wohldefiniert, denn sind $f, g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ homotop relativ Basispunkt, $f \overset{H}{\simeq} g$, dann ist $(s, t) \mapsto H(\omega_1(s), t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $f \circ \omega_1$ nach $g \circ \omega_1$, also $[f \circ \omega_1] = [g \circ \omega_1] \in \pi_1(X, x_0)$. Beachte, dass $\omega_1 : I \to S^1$ zu einem Homöomorphismus $I/\{0, 1\} \to S^1$ faktorisiert. Daher definiert $f \mapsto f \circ \omega_1$ eine Bijektion zwischen der Menge der Abbildungen punktierter Räume $(S^1, 1) \to (X, x_0)$ und der Menge der Schleifen bei x_0. Es folgt sofort, dass ϕ surjektiv ist. Wir sehen aber auch, dass $H \mapsto H \circ (\omega_1 \times \mathrm{id}_I)$ eine Bijektion zwischen der Menge der basispunkterhaltenden Homotopien $S^1 \times I \to X$ mit $H_t(1) = x_0$ und der Menge der Homotopien $I \times I \to X$ relativ Endpunkt x_0 liefert. Daraus folgt nun auch die Injektivität von ϕ. Nun zur Beschreibung der Gruppenstruktur. Für $f : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ gilt $\Psi([f])^{-1} = [f \circ \omega_1]^{-1} = [\overline{f \circ \omega_1}] = [f \circ \bar{\omega}_1] = [f \circ \sigma \circ \omega_1] = \Psi([f \circ \sigma])$. Ist weiters $g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ dann gilt

$$\big((f \vee g) \circ v \circ \omega_1\big)(s) = \begin{cases} (f \vee g)(\iota_1(\omega_1(2s))) = f(\omega_1(2s)) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \vee g)(\iota_2(\omega_1(2s - 1))) = g(\omega_1(2s - 1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

wobei wir $\omega_1(s)^2 = \omega_1(2s) = \omega_1(2s - 1)$ im ersten Gleichheitszeichen verwendet haben. Wir schließen $(f \vee g) \circ v \circ \omega_1 = (f \circ \omega_1)(g \circ \omega_1)$, also $\Psi\big([(f \vee g) \circ v]\big) = \Psi([f])\Psi([g])$. □

Für einen punktierten Raum (X, x_0) sei $\Phi_{(X,x_0)}$ durch die Komposition

$$\Phi_{(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\Psi^{-1}_{(X,x_0)}} \big[(S^1, 1), (X, x_0)\big] \to [S^1, X], \tag{I.9}$$

definiert, wobei $\Psi_{(X,x_0)}$ die Abbildung aus Proposition I.8.27 bezeichnet und $\big[(S^1,1),(X,x_0)\big] \to [S^1,X]$ einer Homotopieklasse relativ Basispunkt die entsprechende sogenannte *freie Homotopieklasse* zuordnet.

I.8.28. Satz. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Die Abbildung $\Phi_{(X,x_0)}$ aus* (I.9) *induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen*[10] *von $\pi_1(X,x_0)$ und $[S^1,X]$. Für jeden Weg h von $x_0 = h(0)$ nach $x_1 = h(1)$ gilt weiters $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$, vgl. Proposition I.3.5. Schließich gilt $\varphi_* \circ \Phi_{(X,x_0)} = \Phi_{(Y,\varphi(x_0))} \circ \varphi_*$, für jede stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, vgl. Bemerkung I.8.5.*

Beweis. Es sei $h : I \to X$ ein Weg von $x_0 := h(0)$ nach $x_1 := h(1)$. Weiters sei $f : I \to X$ eine Schleife bei x_1. Dann definiert

$$\tilde G : I \times I \to X, \qquad \tilde G(s,t) := \begin{cases} h(4s+t) & \text{falls } 0 \le s \le \frac{1-t}{4}, \\ f\big(\frac{4s+t-1}{3t+1}\big) & \text{falls } \frac{1-t}{4} \le s \le \frac{1+t}{2}, \\ h(2-2s+t) & \text{falls } \frac{1+t}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $\tilde G_0 = (hf)\bar h$ nach $\tilde G_1 = f$. Dies ist i.A. keine Homotopie relativ Endpunkten, es gilt jedoch $\tilde G(i,t) = h(t)$, für $i = 0,1$ und alle $t \in I$. Daher faktorisiert $\tilde G$ zu einer Homotopie $G : S^1 \times I \to X$, $G(\omega_1(s),t) = H(s,t)$. Wir erhalten $\Phi_{(X,x_1)}([f]) = \Phi_{(X,x_0)}([hf\bar h]) \in [S^1,X]$, und damit $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$. Für Wege mit $h(0) = x_0 = x_1 = h(1)$ besagt dies gerade, dass konjugierte Elemente in $\pi_1(X,x_0)$ auf dasselbe Element in $[S^1,X]$ abgebildet werden. Auch die Surjektivität von $\Phi_{(X,x_0)}$ folgt aus dieser Konstruktion. Ist nämlich $\tilde f : S^1 \to X$ stetig dann finden wir auf Grund des Wegzusammenhangs von X einen Weg Weg h von $h(0) = x_0$ nach $h(1) = f(1)$, und G definiert eine Homotopie zwischen $G_1 = \tilde f$ und der Schleife G_0 die wegen $G_0(1) = x_0$ im Bild der Abbildung $\big[(S^1,1),(X,x_0)\big] \to [S^1,X]$ liegt. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\Phi_{(X,x_0)}$ auf der Menge der Konjugationsklassen injektiv ist. Seien also $f_0, f_1 : I \to X$ Schleifen bei x_0, sodass $\Phi_{(X,x_0)}([f_0]) = \Phi([f_1])$. Es ist zu zeigen, dass $[f_0]$ und $[f_1]$ in $\pi_1(X,x_0)$ konjugiert sind. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H : S^1 \times I \to X$ mit $H_0 \circ \omega_1 = f_0$ und $H_1 \circ \omega_1 = f_1$. Betrachte nun die Schleife $h : I \to X$, $h(t) := H(1,t)$, und

$$F : I \times I \to X, \qquad F(s,t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \le s \le t/4, \\ H\big(\omega_1\big(\frac{4s-t}{4-3t}\big),t\big) & \text{falls } t/4 \le s \le 1-t/2, \\ h(2-2s) & \text{falls } 1-t/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $F_0 = H_0 \circ \omega_1 = f_0$ nach $F_1 = (h(H_1 \circ \omega_1))\bar h = (hf_1)\bar h$. Damit ist $[f_0] = [hf_1\bar h] = [h][f_1][h]^{-1}$, also sind $[f_0]$

[10] Zwei Elemente g_1 und g_2 einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls $h \in G$ mit $g_2 = hg_1h^{-1}$ existiert. Dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf G. Die damit assoziierten Äquivalenzklassen werden *Konjugationsklassen* von G genannt.

und $[f_1]$ konjugierte Elemente in $\pi_1(X, x_0)$. Die letzte Behauptung, $f_* \circ \Phi_{(X,x_0)} = \Phi_{(Y,f(x_0))} \circ f_*$, ist offensichtlich. □

I.8.29. Korollar (Einfacher Zusammenhang). *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X sind äquivalent:*

(i) $\pi_1(X) = 0$, *dh. X ist einfach zusammenhängend.*
(ii) *Jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ ist nullhomotop.*
(iii) *Jede stetige Abblidung $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$ fortsetzen, dh. $f = F \circ \iota$, wobei $\iota : S^1 \to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus Satz I.8.28 und der Beobachtung, dass die Menge der Äquivalenzklassen einer Gruppe G genau dann einpunktig ist, wenn G nur aus dem neutralen Element besteht. Betrachte nun die stetige Abbildung $\varphi : S^1 \times I \to D^2 \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi(z,t) := tz$. Existiert eine stetige Abbildung $F : D^2 \to X$ mit $F \circ \iota = f$, dann liefert $H := F \circ \varphi : S^1 \times I \to X$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{F(0)}$ nach $H_1 = F \circ \iota = f$. Damit ist die Implikation (iii)⇒(ii) gezeigt. Sei nun umgekehrt $H : S^1 \times I \to X$ eine Homotopie von einer konstanten Abbildung $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass φ einen Homöomorphismus $(S^1 \times I)/(S^1 \times \{0\}) \cong D^2$ induziert. Daher faktorisiert H zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$, $F \circ \varphi = H$, für die dann $F \circ \iota = H_1 = f$ gilt. Damit ist auch die Implikation (ii)⇒(iii) gezeigt. □

I.8.30. Beispiel. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_0) \to (T^n, x_0)$ aus Beispiel I.7.8, wobei $x_0 = (1, \dots, 1) \in T^n$. Seien nun $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$. In Beispiel I.8.19 haben wir bereits gezeigt, dass μ_A und μ_B nicht homotop relativ Basispunkt sein können, denn die induzierten Homomorphismen $(\mu_A)_*, (\mu_B)_* : \pi_1(T^n, x_0) \to \pi_1(T^n, x_0)$ stimmen nicht überein. Mittels Satz I.8.28 sehen wir nun, dass auch die induzierten Abbildungen $(\mu_A)_*, (\mu_B)_* : [S^1, T^n] \to [S^1, T^n]$ verschieden sind, denn $\Phi_{(T^n,x_0)} : \pi_1(T^n, x_0) \to [S^1, T^n]$ ist bijektiv da $\pi_1(T^n, x_0)$ abelsch ist. Also können μ_A und μ_B nicht einmal homotop sein, siehe Bemerkung I.8.5. In anderen Worten, die Abbildung $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}) \to [T^n, T^n]$, $A \mapsto [\mu_A]$, ist injektiv. Wir werden später sehen, dass diese Abbildung sogar bijektiv ist, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}) \cong [T^n, T^n]$. Im Fall $n = 1$ folgt dies aus Satz I.8.31(i) unten.

Es sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Weiters sei $h : I \to S^1$ ein Weg von $h(0) = 1$ nach $h(1) = f(1)$. Betrachte die Gruppenhomomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow{\beta_h} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{Z},$$

siehe Satz I.4.1 und Proposition I.3.5. Nach Bemerkung I.3.7 ist deren Komposition unabhängig von der Wahl des Weges h, denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Als Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ muss sie durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben sein. Diese Zahl wird der *Abbildungsgrad* von f genannt und mit $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Es gilt daher $\beta_h(f_*(\phi(k))) = \phi(k \deg(f))$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

I.8.31. Satz. *Für den Abbildungsgrad stetiger Funktionen $S^1 \to S^1$ gilt:*

(i) $\deg(f) = \deg(g) \Leftrightarrow f \simeq g$.
(ii) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.
(iii) $\deg(f) = n$, *falls* $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
(iv) *Ist* $\deg(f) \neq 0$ *dann muss* $f : S^1 \to S^1$ *surjektiv sein.*

Beweis. Wir leiten zunächst eine etwas andere Beschreibung des Abbildungsgrades her. Wenden wir auf $\phi(\deg(f)) = \beta_h(f_*(\phi(1)))$ die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)}$ aus Satz I.8.28 an, so erhalten wir $\big(\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi\big)(\deg(f)) = \Phi_{(S^1,1)}(\beta_h(f_*(\phi(1)))) = \Phi_{(S^1,f(1))}(f_*(\phi(1))) = \Phi_{(S^1,f(1))}([f \circ \omega_1]) = [f] \in [S^1, S^1]$. Nach Satz I.8.28 ist die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi : \mathbb{Z} \to [S^1, S^1]$ bijektiv, denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Wir erhalten $\deg(f) = \big(\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi\big)^{-1}([f])$ woraus nun auch die erste Behauptung folgt. Nun zu (ii). Da nach Satz I.8.28 jede stetige Abbildung $S^1 \to S^1$ homotop zu einer den Basispunkt 1 fixierenden Abbildung ist, dürfen wir nach (i) o.B.d.A. annehmen $f(1) = 1 = g(1)$. Daher gilt $f_*(\phi(k)) = \phi(k\deg(f))$ sowie $g_*(\phi(k)) = \phi(k\deg(g))$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $(f \circ g)_*(\phi(k)) = f_*(g_*(\phi(k))) = f_*(\phi(k\deg(g))) = \phi(k\deg(g)\deg(f))$, also $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. Behauptung (iii) folgt aus Beispiel I.6.5. Um (iv) einzusehen nehmen wir an, dass $f : S^1 \to S^1$ nicht surjektiv ist. Dann existiert $P \in S^1$, sodass $f : S^1 \to S^1 \setminus \{P\}$, also faktorisiert $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1\big(S^1 \setminus \{P\}, f(1)\big) \to \pi_1(S^1, f(1))$. Nach Beispiel I.6.6 ist $\pi_1(S^1 \setminus \{P\}) = 0$, also stimmt f_* mit dem trivialen Homomorphismus überein, es muss daher $\deg(f) = 0$ gelten. □

I.8.32. Bemerkung. Für stetig differenzierbares $f : S^1 \to S^1$ gilt

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{f\circ\omega_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi\mathbf{i}s})}{f(e^{2\pi\mathbf{i}s})} ds.$$

Um dies einzusehen sei o.B.d.A. $f(1) = 1$, siehe Satz I.8.31(i). Definiere nun $\tilde{f} : I \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(t) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi\mathbf{i}s})}{f(e^{2\pi\mathbf{i}s})} ds$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir sofort $\frac{\partial}{\partial t}\big(f(e^{2\pi\mathbf{i}t})e^{-2\pi\mathbf{i}\tilde{f}(t)}\big) = 0$ und daher $f(e^{2\pi\mathbf{i}t}) = e^{2\pi\mathbf{i}\tilde{f}(t)}$. Insbesondere ist $\tilde{f}$ reellwertig und $n := \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Weiters sehen wir, dass $\tilde{f}$ ein Lift des Weges $f \circ \omega_1$ ist, dh. $p \circ \tilde{f} = f \circ \omega_1$, siehe (I.2). Da $\tilde{f}$ ein Weg von 0 nach n ist, muss $\tilde{f} \simeq \tilde{\omega}_n$ gelten, woraus wir $f \circ \omega_1 = p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ erhalten. Damit ist $f_*([\omega_1]) = [\omega_n] \in \pi_1(S^1, 1)$, also gilt tatsächlich $\deg(f) = n = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{f\circ\omega_1} \frac{dz}{z}$.

I.9. Der Satz von Seifert–van Kampen. Im Satz von Seifert–van Kampen, siehe Satz I.9.4 unten, tritt das freie Produkt von Gruppen in Erscheinunug, wir beginnen daher mit einer Diskussion desselben. Sind G und H zwei Gruppen, dann gibt es eine Gruppe $G * H$, das sogenannte *freie Produkt* von G und H, sowie zwei Gruppenhomomorphismen $\iota_G : G \to G * H$ und $\iota_H : H \to G * H$ die folgende universelle Eigenschaft haben. Sind $\varphi_G : G \to K$ und $\varphi_H : H \to K$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus

$\varphi : G * H \to K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \varphi_H$. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $\varphi_G * \varphi_H := \varphi$. Wir werden die Existenz von $G * H$ in Lemma I.9.1 unten zeigen und wollen sie für den Moment als gegeben annehmen. Die universelle Eigenschaft bestimmt das Tripel $(G * H, \iota_G, \iota_H)$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig. Genauer, ist F eine Gruppe und sind $j_G : G \to F$ sowie $j_H : H \to F$ zwei Gruppenhomomorphismen die auch diese universelle Eigenschaft haben,[11] dann gibt es genau einen Gruppenisomorphismus $\psi : G * H \to F$ mit $\psi \circ \iota_G = j_G$ und $\psi \circ \iota_H = j_H$.[12] Daraus folgt sofort die Existenz kanonischer Isomorphismen $G * H \cong H * G$, $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$ sowie $\{1\} * G \cong G$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\iota_G"] \arrow[dr, bend left, "\varphi_G"] & \\
G * H \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & K \\
H \arrow[u, "\iota_H"'] \arrow[ur, bend right, "\varphi_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Wenden wir die universelle Eigenschaft auf $K = G$, $\varphi = \mathrm{id}_G$ und den trivialen Homomorphismus $\varphi_H = 1$ an, so erhalten wir einen Homomorphismus $p_G : G * H \to G$ mit $p_G \circ \iota_G = \mathrm{id}_G$ und $p_G \circ \iota_H = 1$. Analog lässt sich ein Homomorphismus $p_H : G * H \to H$ mit $p_H \circ \iota_H = \mathrm{id}_H$ und $p_H \circ \iota_G = 1$ konstruieren. Insbesondere sind ι_G und ι_H beide injektiv, wir können daher G und H als Untergruppen von $G * H$ auffassen. Auch erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $(p_G, p_H) : G * H \to G \times H$.

Die Bilder von ι_G und ι_H erzeugen die Gruppe $G * H$. Bezeichnet nämlich K die von $\iota_G(G) \cup \iota_H(H)$ erzeugte Untergruppe von $G * H$, dann erhalten wir aus der universellen Eigenschaft einen Homomorphismus $\varphi : G * H \to K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \iota_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \iota_H$. Durch Komposition mit der kanonischen Inklusion $\iota : K \to G * H$ erhalten wir einen Homomorphismus $\iota \circ \varphi : G * H \to G * H$ mit $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_G = \iota_G$ und $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_H = \iota_H$. Aus der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft folgt $\iota \circ \varphi = \mathrm{id}_{G*H}$. Also muss ι surjektiv sein, K daher mit $G * H$ übereinstimmen. Somit sehen wir, dass $G \cup H$ die Gruppe $G * H$ tatsächlich erzeugt. Nun aber zur Konstruktion von $G * H$.

I.9.1. Lemma. *Es seien G_α Gruppen, $\alpha \in A$. Dann existiert eine Gruppe, die wir mit $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ bezeichnen und das freie Produkt der G_α nennen, sowie Homomorphismen $\iota_\beta : G_\beta \to *_{\alpha \in A} G_\alpha$, $\beta \in A$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *ι_β ist injektiv, wir können daher jede der Gruppen G_β als Untergruppe von $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ auffassen und werden die Inklusionen ι_β meist unterdrücken.*

(ii) *$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ erzeugt die Gruppe $*_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jedes Element $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ lässt sich daher in der Form $x = g_1 \cdots g_n$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ schreiben. Dabei*

[11] dh. zu jedem Paar von Homomorphismen $\varphi_G : G \to K$ und $\varphi_H : H \to K$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F \to K$ mit $\varphi \circ j_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ j_H = \varphi_H$.

[12] Dieser Isomorphismus ist durch $\psi := j_G * j_H$ gegeben. Seine Inverse erhalten wir aus der universellen Eigenschaft von F angewandt auf $\varphi_G = \iota_G$ und $\varphi_H = \iota_H$. Dass dies tatsächlich die Inverse liefert folgt dann aus den Eindeutigkeitsaussagen in den universellen Eigenschaften von $G * H$ und F.

können wir auch erreichen, dass $g_{\alpha_i} \neq 1 \in G_{\alpha_i}$ *und* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ *für* $i = 1, \dots, n-1$. *Eine solche Darstellung von* x *wird* reduzierte Darstellung *genannt.*

(iii) *Die reduzierte Darstellung von* $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ *ist eindeutig, dh. gilt* $g_1 \cdots g_n = x = h_1 \cdots h_m$ *und sind beide Darstellungen reduziert,* $g_i \in G_{\alpha_i}$, $h_j \in G_{\beta_j}$, *dann folgt* $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ *und* $g_i = h_i$ *für alle* $i = 1, \dots, n$.

(iv) *Sind* $\varphi_\alpha : G_\alpha \to K$ *Gruppenhomomorphismen,* $\alpha \in A$, *dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus* $\varphi : *_{\alpha \in A} G_\alpha \to K$, *sodass* $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$, *für alle* $\alpha \in A$. *Wir werden diesen Homomorphismus mit* $*_{\alpha \in A} \varphi_\alpha := \varphi$ *bezeichnen.*

Beweis. Unter einem *Wort* verstehen wir jede endliche Folge $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ wobei jedes der g_i in einer der Gruppen G_{α_i} liegt. Auch die Folge der Länge 0 ist zugelassen und wird als das *leere Wort* bezeichnet. Ein Wort $(g_1, \dots, g_n)$ heißt *reduziert,* falls $g_i \neq 1 \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$, und $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Insbesondere ist das leere Wort $()$ reduziert. Es bezeichne W die Menge aller reduzierten Worte, und $\mathfrak{S}(W)$ die Permutationsgruppe von W, dh. die Menge der Bijektionen $W \to W$. Für $\alpha \in A$ und $g \in G_\alpha$ definieren wir eine Abbildung $L_g : W \to W$ indem wir einem reduzierten Wort $(g_1, \dots, g_n)$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ ein Element in W wie folgt zuordnen:

$$L_g(g_1, \dots, g_n) := \begin{cases} (g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g = 1, \\ (g, g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1 \text{ und } \alpha_1 \neq \alpha, \\ (gg_1, g_2, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1, \, \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 \neq 1, \\ (g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1, \, \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 = 1. \end{cases}$$

Eine einfache Fallunterscheidung zeigt $L_1 = \mathrm{id}_W$ und $L_h \circ L_g = L_{hg}$ für alle $g, h \in G_\alpha$. Insbesondere ist $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, jedes L_g daher bijektiv. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\iota_\alpha : G_\alpha \to \mathfrak{S}(W)$, $g \mapsto L_g$. Wenden wir L_g auf das leere Wort $() \in W$ an, erhalten wir $L_g\big(()\big) = (g)$, falls $g \neq 1$, also ist ι_α injektiv. Definieren wir nun $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ als die von $\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(G_\alpha)$ erzeugte Untergruppe in $\mathfrak{S}(W)$, dann sind die Behauptungen (i) und (ii) offensichtlich wahr. Nun zu (iii): Sei also $g_1 \cdots g_n = h_1 \cdots h_m \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ und $h_j \in G_{\beta_j}$, und so, dass beide Darstellungen reduziert sind. Nach Konstruktion ist $L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n} = L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m} \in \mathfrak{S}(W)$. Wenden wir diese Permuatation auf das leere Wort $() \in W$ an, dann erhalten wir wegen der Reduziertheit der Darstellungen

$$(g_1, \dots, g_n) = \big(L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n}\big)\big(()\big) = \big(L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m}\big)\big(()\big) = (h_1, \dots, h_m),$$

und damit $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ sowie $g_i = h_i$, $i = 1 \dots, n$. Nun zu (iv): Seien also Homomorphismen $\varphi_\alpha : G_\alpha \to K$ gegeben, $\alpha \in A$. Ist $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ und $x = g_1 \cdots g_n$ seine reduzierte Darstellung, $g_i \in G_{\alpha_i}$, so definieren wir $\varphi(x) := \iota_{\alpha_1}(g_1) \cdots \iota_{\alpha_n}(g_n)$. Setzen wir noch $\varphi(1) := 1$, dann liefert dies nach (iii) eine wohldefinierte Abbildung $\varphi : *_{\alpha \in A} G_\alpha \to K$ für die offensichtlich $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$ gilt,

$\alpha \in A$. Es bleibt noch zu zeigen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst

$$\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n), \qquad \text{für beliebige } g_i \in G_{\alpha_i}. \tag{I.10}$$

Wir beweisen (I.10) mittels Induktion nach n. Existiert ein i mit $1 \leq i \leq n$ und $g_i = 1 \in G_{\alpha_i}$, dann erhalten wir aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i) = 1$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi(g_1 \cdots \hat{i} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \hat{i} \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots 1 \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Existiert ein i mit $1 \leq i < n$ und $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, so folgt aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) = \varphi_{\alpha_i}(g_i)\varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_i g_{i+1} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i)\varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Tritt keiner der beiden Fälle ein, dann war die Darstellung $g_1 \cdots g_n$ schon reduziert, und es bleibt nichts zu zeigen. Damit ist (I.10) bewiesen, woraus wir nun sofort die Homomorphismus Eigenschaft von φ erhalten. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus (ii), denn φ ist auf einer die Gruppe erzeugenden Teilmenge durch die φ_α vorgegeben. $\square$

I.9.2. Bemerkung. Das freie Produkt ist weit davon entfernt eine kommutative Gruppe zu sein. Ist etwa $h \neq 1 \in H$ und $g \neq 1 \in G$, dann gilt stets $gh \neq hg$ im freien Produkt $G * H$, siehe Lemma I.9.1(iii). Ebenso sehen wir sofort, dass das Zentrum von $G * H$ trivial ist, wenn nur $G \neq \{1\}$ und $H \neq \{1\}$.

I.9.3. Beispiel. Ist G eine Gruppe, dann wird die von den Kommutatoren $\{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\}$ erzeugte Untergruppe die *Kommutatoruntergruppe* von G genannt und mit $[G, G]$ bezeichnet. Dies ist stets eine normale Untergruppe von G. Die Quotientengruppe $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ wird die *Abelisierung* von G genannt. Sie hat folgende universelle Eigenschaft. Ist A eine abelsche Gruppe und $\varphi : G \to A$ ein Homomorphismus, dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi^{\mathrm{ab}} : G^{\mathrm{ab}} \to K$ mit $\varphi^{\mathrm{ab}} \circ p = \varphi$, wobei $p : G \to G^{\mathrm{ab}}$ den kanonischen Homomorphismus der mit der Quotientengruppe assoziiert ist bezeichnet. Dies folgt aus $\varphi(ghg^{-1}h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1} = 1$, denn A ist kommutativ. Für die Abelisierung des freien Produkts gilt, siehe Aufgabe 13,

$$\bigl(*_{\alpha \in A} G_\alpha\bigr)^{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus\nolimits_{\alpha \in A} G_\alpha^{\mathrm{ab}}.$$

Für das n-fache freie Produkt $*^n\mathbb{Z} := \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ erhalten wir daher $(\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$. Es folgt $*^n\mathbb{Z} \ncong *^m\mathbb{Z}$ falls $n \neq m$, denn $\mathbb{Z}^n \ncong \mathbb{Z}^m$.

Es seien $U, V \subseteq X$ zwei offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, und es sei $x_0 \in U \cap V$ ein Basispunkt. Betrachte die vier im kommutativen Diagramm links angedeuteten kanonischen Inklusionen, $\iota_U \circ j_U = \iota_V \circ j_V$. Gehen wir zu den Fundamentalgruppen über so erhalten wir induzierte Abbildungen wie im zweiten Diagramm.

$$\begin{tikzcd} (U \cap V, x_0) \arrow[r, "j_U"] \arrow[d, "j_V"] & (U, x_0) \arrow[d, "\iota_U"] \\ (V, x_0) \arrow[r, "\iota_V"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "(j_U)_*"] \arrow[d, "(j_V)_*"] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "(\iota_U)_*"] \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "(\iota_V)_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Nach Propostion I.6.1 gilt $(\iota_U)_* \circ (j_U)_* =$

$(\iota_U \circ j_U)_* = (\iota_V \circ j_V)_* = (\iota_V)_* \circ (j_V)_*$, also kommutiert auch dieses Diagramm. Insbesondere erhalten wir einen Homomorphismus

$$\Phi := (\iota_U)_* * (\iota_V)_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \tag{I.11}$$

und jedes der Elementen $\big((j_U)_*\sigma\big)\big((j_V)_*\sigma\big)^{-1}$, $\sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, liegt im Kern von Φ, denn es ist $\Phi\big(((j_U)_*\sigma)((j_V)_*\sigma)^{-1}\big) = \big((\iota_U)_*(j_U)_*\sigma\big)\big((\iota_V)_*(j_V)_*\sigma\big)^{-1} = 1$. Damit liegt auch der von ihnen erzeugte Normalteiler

$$N := \mathcal{N}\Big(\Big\{\big((j_U)_*\sigma\big)\big((j_V)_*\sigma\big)^{-1} : \sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\Big\}\Big) \tag{I.12}$$

im Kern von Φ, in Zeichen $\mathcal{N} \subseteq \ker(\Phi)$.

I.9.4. Satz (Seifert–van Kampen). *Es sei $X = U \cup V$ wobei U und V offen in X sind. Weiters seien U, V sowie $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Dann ist Φ surjektiv, siehe* (I.11), *und es gilt* $\ker(\Phi) = N$, *siehe* (I.12). *Insbesondere gilt $\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\big)/N$.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $U_1 := U$ und $U_2 := V$. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von Φ. Sei dazu $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X bildet, ist $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung des Intervalls I. Nach Lemma I.4.12 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{1, 2\}$, sodass $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$, für jedes $i = 1, \ldots, n$. Durch Weglassen gewisser Unterteilungspunkte s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \in U_1 \cap U_2$ für alle $i = 0, \ldots, n$, denn wäre etwa $f(s_i) \in U_1 \setminus U_2$ dann gilt sowohl $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_1$ als auch $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_1$. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \to U_{\alpha_i} \subseteq X$, $f_i(s) := f\big((1-s)s_{i-1} + s s_i\big)$, $i = 1, \ldots, n$. Es gilt $f \simeq f_1 f_2 \cdots f_n$ relativ Endpunkten in X, siehe Beispiel I.1.3. Da $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend ist, finden wir Wege $h_i : I \to U_1 \cap U_2$ von $h_i(0) = x_0$ nach $h_i(1) = f_i(1) = f(s_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Weiters seien $h_0 := h_n := c_{x_0}$ die konstanten Wege. Wir erhalten $f \simeq (h_0 f_1 \bar{h}_1)(h_1 f_2 \bar{h}_2)(h_2 f_3 \bar{h}_3) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)$ relativ Endpunkten in X, denn $\bar{h}_i h_i \simeq c_{f(s_i)}$. Jeder der Faktoren $h_{i-1} f_i \bar{h}_i$ ist eine Schleife bei x_0 in U_{α_i} und definiert daher ein Element $\sigma_i \in \pi_1(U_{\alpha_i}, x_0)$, $\sigma_i := [h_{i-1} f_i \bar{h}_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Es folgt $\Phi(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = \Phi(\sigma_1) \cdots \Phi(\sigma_n) = [(h_0 f_1 \bar{h}_1) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)] = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, also ist Φ surjektiv.

Es bleibt noch zu zeigen $\ker(\Phi) \subseteq N$. Seien also $f_k : I \to U_{\beta_k}$ Schleifen bei x_0, $1 \leq k \leq m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \{1, 2\}$, sodass $\Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Es ist zu zeigen, dass $[f_1] \cdots [f_m] = 1 \in (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$. Betrachte die Schleife $f : I \to X$, $f := f_1 f_2 \cdots f_m$. Nach Voraussetzung ist $[f] = \Phi([f_1]) \cdots \Phi([f_m]) = \Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Daher existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to X$ von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X ist, muss auch $\{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung von $I \times I$ sein. Nach Lemma I.4.12 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sowie $\alpha_i^j \in \{1, 2\}$, sodass $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, für alle

$1 \leq i, j \leq n$. Betrachte die Wege

$$\begin{aligned} u_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & u_i^j(s) &:= H\big((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_j\big) \\ b_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & b_i^j(s) &:= H\big((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_{j-1}\big) \\ l_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & l_i^j(t) &:= H\big(s_{j-1}, (1-t)t_{j-1} + tt_j\big) \\ r_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & r_i^j(t) &:= H\big(s_j, (1-t)t_{j-1} + tt_j\big) \end{aligned}$$

Da $H_1 = f = f_1 \cdots f_m$ dürfen wir durch Übergang zu einer feineren Zerlegung von $I \times I$ o.B.d.A. annehmen, dass $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_m = n$ existieren mit $\alpha^n_{i_{k-1}+1} = \alpha^n_{i_{k-1}+2} = \cdots = \alpha^n_{i_k} = \beta_k$ und

$$u^n_{i_{k-1}+1} u^n_{i_{k-1}+2} \cdots u^n_{i_k} \simeq f_k \qquad \text{relativ Endpunkten in } U_{\beta_k},\ 1 \leq k \leq m. \tag{I.13}$$

Da das Rechteck $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ einfach zusammenhängend ist, und weil $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, folgt

$$l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j \simeq b_i^j \qquad \text{relativ Endpunkten in } U_{\alpha_i^j},\ 1 \leq i, j \leq n. \tag{I.14}$$

Da U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind, existieren Wege $\beta_i^j : I \to X$, $0 \leq i, j \leq n$, mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\beta_i^j(0) = x_0$ und $\beta_i^j(1) = H(s_i, t_j)$.
(ii) $\beta_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X$ falls $H(s_i, t_j) \in U_{\alpha_i^j}$.
(iii) $\beta_i^j : I \to U_1 \cap U_2 \subseteq X$, falls $H(s_i, t_j) \in U_1 \cap U_2$.
(iv) $\beta_i^j = c_{x_0}$, falls $H(s_i, t_j) = x_0$.

Betrachte nun die folgenden Schleifen bei x_0, siehe (i) und (ii):

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^j &:= \beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{b}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1} : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X \\ \hat{l}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{r}_i^j &:= \beta_i^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X \end{aligned}$$

Aus (I.14) erhalten wir $(\beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j)(\beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j)(\overline{\beta_i^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j}) \simeq \beta_{i-1}^{j-1}(l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j)\bar{\beta}_i^{j-1} \simeq \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1}$ relativ Endpunkten in $U_{\alpha_i^j}$, und daher

$$\big[\hat{l}_i^j\big]\big[\hat{u}_i^j\big]\big[\hat{r}_i^j\big]^{-1} = \big[\hat{b}_i^j\big] \in \pi_1\big(U_{\alpha_i^j}, x_0\big), \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{I.15}$$

Da H eine Homotopie relativ Endpunkten ist und wegen (iv) gilt

$$\big[\hat{l}_1^j\big] = 1 \in \pi_1\big(U_{\alpha_1^j}, x_0\big) \quad \text{und} \quad \big[\hat{r}_n^j\big] = 1 \in \pi_1\big(U_{\alpha_n^j}, x_0\big), \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{I.16}$$

Da $H_0 = c_{x_0}$ und wegen (iv) gilt auch

$$\big[\hat{b}_i^1\big] = 1 \in \pi\big(U_{\alpha_i^1}, x_0\big), \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{I.17}$$

Aus (I.13) und (iv) erhalten wir

$$\big[\hat{u}^n_{i_{k-1}+1}\big]\big[\hat{u}^n_{i_{k-1}+2}\big] \cdots \big[\hat{u}^n_{i_k}\big] = [f_k] \in \pi_1(U_{\beta_k}, x_0), \qquad 1 \leq k \leq m. \tag{I.18}$$

Weiters haben wir die Relationen

$$\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N,\qquad 1\le j\le n,\,2\le i\le n.\qquad\text{(I.19)}$$

Um dies einzusehen unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\alpha^j_{i-1}=\alpha^j_i$, dann gilt offensichtlich $\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\pi_1(U_{\alpha^j_i},x_0)$ und damit auch (I.19). Ist $\alpha^j_{i-1}\neq\alpha^j_i$, dann sind $\hat r^j_{i-1}$ und $\hat l^j_i$ Wege in $U_1\cap U_2$, siehe (iii), und $\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)$, woraus nun (I.19) folgt, vgl. (I.12). Analog lässt sich zeigen

$$\big[\hat u^{j-1}_i\big]=\big[\hat b^j_i\big]\in\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N,\qquad 2\le j\le n,\,1\le i\le n.\qquad\text{(I.20)}$$

Aus (I.15), (I.16) und (I.19) erhalten wir, in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$,

$$\big[\hat b^j_1\big]\cdots\big[\hat b^j_n\big]=\big[\hat l^j_1\big]\big[\hat u^j_1\big]\big[\hat r^j_1\big]^{-1}\cdots\big[\hat l^j_n\big]\big[\hat u^j_n\big]\big[\hat r^j_n\big]^{-1}=\big[\hat u^j_1\big]\cdots\big[\hat u^j_n\big].$$

Zusammen mit (I.20) und (I.17) folgt, in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$,

$$\big[\hat u^n_1\big]\cdots\big[\hat u^n_n\big]=\big[\hat b^n_1\big]\cdots\big[\hat b^n_n\big]=\big[\hat u^{n-1}_1\big]\cdots\big[\hat u^{n-1}_n\big]=\cdots=\big[\hat b^1_1\big]\cdots\big[\hat b^1_n\big]=1.$$

Verwenden wir noch (I.18) so erhalten wir schließlich die Relation $[f_1]\cdots[f_m]=1$ in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$. Damit ist der Beweis vollständig. □

I.9.5. Beispiel. Wir wollen nun mit Hilfe von Satz I.9.4 nochmals verifizieren, dass S^n einfach zusammenhängend ist, $n\ge 2$, vgl. Satz I.6.7. Nach Beispiel I.6.6 sind $U:=S^n\setminus\{N\}$ und $V:=S^n\setminus\{S\}$ zwei einfach zusammenhängende offene Teilmengen von $S^n=U\cup V$. Da $n\ge 2$, ist $U\cap V$ wegzusammenhängend. Aus Satz I.9.4 folgt daher $\pi_1(S^n)=0$.

I.9.6. Beispiel (Suspension). Es sei X ein topologischer Raum, und es bezeichne $\sim$ die von $(x,1)\sim(y,1)$ und $(x,-1)\sim(y,-1)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X\times[-1,1]$, $x,y\in X$. Der Quotientenraum

$$\Sigma X:=\big(X\times[-1,1]\big)/\!\sim$$

wird die *Suspension* oder *Einhängung* von X genannt. Die Suspension entsteht daher aus $X\times[-1,1]$ indem wir $X\times\{1\}$ zu einem und $X\times\{-1\}$ zu einem anderen Punkt kollabieren. Etwa ist $\Sigma S^n\cong S^{n+1}$, siehe Aufgabe 4. Ist X wegzusammenhängend, dann ist ΣX einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Satz I.9.4 indem wir die offenen Teilmengen $U:=\big(X\times(-1,1]\big)/\!\sim$ und $V:=\big(X\times[-1,1)\big)/\!\sim$ von $\Sigma X=U\cup V$ betrachten. Beide sind kontrahierbar, vgl. Beispiel I.8.26, also einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.8.23, und es ist $U\cap V\cong X\times(-1,1)$ wegzusammenhängend.

I.9.7. Beispiel. Es seien (X,x_0) und (Y,y_0) zwei zusammenhängende punktierte Räume. Weiters sollen offene Umgebungen $U_0\subseteq X$ von x_0 und $V_0\subseteq Y$ von y_0 existieren, sodass $\{x_0\}$ Deformationsretrakt von U_0 und $\{y_0\}$ Deformationsretrakt von V_0 ist. Betrachte die Einpunktvereinigung $(X\vee Y,*)=(X,x_0)\vee(Y,y_0)$, und die offenen Teilmengen $U:=(U_0,x_0)\vee(Y,y_0)$ und $V:=(X,x_0)\vee(V_0,y_0)$ von $X\vee Y=U\cup V$. Eine retrahierende Deformation von U_0 auf $\{x_0\}$ liefert eine retrahierende Deformation von U auf Y. Also ist die Einbettung $(Y, y_0) \to (U, *)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert daher einen Isomorphismus $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(U, *)$, siehe Proposition I.8.18. Ebenso induziert die Einbettung $(X, x_0) \to (V, *)$ einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(V, *)$. Eine retrahierende Deformation von U_0 auf $\{x_0\}$ zusammen mit einer retrahierenden Deformation von V_0 auf $\{y_0\}$ liefern eine retrahierende Deformation von $U \cap V = (U_0, x_0) \vee (V_0, y_0)$ auf $\{*\}$. Also ist $U \cap V$ kontrahierbar und damit einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.8.23. Aus Satz I.9.4 folgt daher

$$\pi_1\big((X, x_0) \vee (Y, y_0)\big) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Insbesondere sehen wir, dass $S^n \vee \cdots \vee S^n$ einfach zusammenhängend ist, falls $n \geq 2$, siehe Satz I.6.7. Wir erhalten aber auch $\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$. Einpunktvereinigungen von Kreisen können also nur dann homotopieäquivalent (homöomorph) sein, wenn sie gleich viele Faktoren besitzen, siehe Beispiel I.9.3 und Satz I.8.22.

I.9.8. Beispiel. Es seien $P_1, \ldots, P_k$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^n$. Der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ ist homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung $S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ mit k Faktoren. Für $n \geq 3$ ist daher $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ einfach zusammenhängend, siehe Satz I.8.22 und Beispiel I.9.7. Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}\big) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}.$$

Für $l \neq k$ sind daher $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_l\}$ nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph.

Um die etwas komplizierteren Fundamentalgruppen einigermaßen in den Griff zu bekommen, wiederholen wir kurz die Darstellung von Gruppen durch Erzeuger und Relationen. Ist S eine Menge, dann nennen wir $F(S) := *_{s \in S}\mathbb{Z}$ die *freie Gruppe* über S. Zu jedem $s \in S$ haben wir einen kanonischen injektiven Homomorphismus $\iota_s : \mathbb{Z} \to F(S)$, siehe Lemma I.9.1. Wir bezeichnen $\iota_s(1) \in F(S)$ wieder mit s. Jedes Element in $x \neq 1 \in F(S)$ lässt sich in der Form $x = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n}$ schreiben, wobei $s_i \in S$ und $k_i \in \mathbb{Z}$. Dabei können wir auch erreichen, dass alle $k_i \neq 0$ und $s_i \neq s_{i+1}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die Darstellung dann eindeutig, siehe Lemma I.9.1(iii). Ist K eine Gruppe und für jedes $s \in S$ ein $k_s \in K$ gegeben, dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F(S) \to K$, sodass $\varphi(s) = k_s$ für alle $s \in S$, siehe Lemma I.9.1(iv).

Eine Gruppe G heißt *frei* falls eine Menge S existiert, sodass $G \cong F(S)$. Die Kardinalzahl $\sharp S$ wird der Rang der freien Gruppe G genannt und mit $\operatorname{rank}(G)$ bezeichnet. Dies ist wohldefiniert, denn aus $F(S) \cong F(S')$ folgt $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \cong F(S)^{\mathrm{ab}} \cong F(S')^{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus_{s' \in S'} \mathbb{Z}$ und damit $\sharp S = \sharp S'$, siehe Beispiel I.9.3.

Ist $R \subseteq F(S)$ eine Teilmenge so schreiben wir $\langle S \mid R \rangle := F(S)/\mathcal{N}(R)$, wobei $\mathcal{N}(R)$ den von R erzeugten Normalteiler in $F(S)$ bezeichnet. Ist G eine Gruppe und $G \cong \langle S \mid R \rangle$ dann nennen wir $\langle S \mid R \rangle$ eine *Präsentation* von G mit Erzeugern S und Relationen R. Sei nun K eine weitere Gruppe und für jedes $s \in S$ ein

$k_s \in K$ gegeben, sodass der durch $\tilde{\varphi}(s) = k_s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F(S) \to K$ auf jedem Element von R verschwindet, dh. $\tilde{\varphi}(r) = 1 \in K$ für alle $r \in R$. Dann ist $\mathcal{N}(R) \subseteq \ker(\tilde{\varphi})$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle R \mid S\rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) \to K$ mit $\varphi(s) = k_s$.

Eine Gruppe G wird *endlich präsentierbar*, geannt, falls eine Präsentation $G \cong \langle S \mid R\rangle$ mit endlichen Mengen S und R existiert. Ist $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ und $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ dann schreiben wir für $\langle S \mid R\rangle$ auch $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m\rangle$ oder $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1\rangle$.

Jede Gruppe G besitzt die Präsentation $G = \langle S \mid R\rangle$ mit $S := G$ und $R := \ker(\varphi)$, wobei $\varphi : F(S) \to G$ den durch $\varphi(g) = g$ gegebenen Homomorphismus bezeichnet. Es faktorisiert nämlich φ zu einem, offensichtlich bijektiven, Homomorphimus $\langle S \mid R\rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) = F(S)/\ker(\varphi) \to G$.

Falls $r \in \mathcal{N}(R)$ dann ist $\mathcal{N}(R) = \mathcal{N}(R \cup \{r\})$ und daher

$$\langle S \mid R\rangle \cong \big\langle S \bigm| R \cup \{r\}\big\rangle. \tag{I.21}$$

Ist $t \notin S$ und $\omega \in F(S)$, dann gilt

$$\langle S \mid R\rangle \cong \big\langle S \cup \{t\} \bigm| R \cup \{t^{-1}\omega\}\big\rangle. \tag{I.22}$$

Um dies einzusehen, sei $\varphi : \langle S \mid R\rangle \to \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\}\rangle$ der durch $\varphi(s) = s$, $s \in S$, eindeutig bestimmte Homomorphismus. Betrachte weiters den durch $\psi(s) = s$, $s \in S$, und $\psi(t) = \omega$ eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\}\rangle \to \langle S \mid R\rangle$. Offensichtlich ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Es gilt aber auch $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, denn in $\langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\}\rangle$ haben wir $\varphi(\psi(t)) = \omega = t$.

Sind $\langle S \mid R\rangle$ und $\langle S' \mid R'\rangle$ zwei endliche Präsentationen derselben Gruppe, dh. $\langle S \mid R\rangle \cong \langle S' \mid R'\rangle$, dann ist es stets möglich durch endlich viele Übergänge der Art (I.22) und (I.21), die sogenannte *Tietze-Prozesse*, von der Präsentation $\langle S \mid R\rangle$ zu der Präsentation $\langle S' \mid R\rangle$ zu gelangen, siehe etwa [**13**, Satz 5.8.2].

Schließlich seien noch

$$\langle S \mid R\rangle * \langle S' \mid R'\rangle \cong \langle S \cup S' \mid R \cup R'\rangle \tag{I.23}$$

und

$$\langle S \mid R\rangle^{\mathrm{ab}} \cong \langle S \mid R \cup K\rangle \tag{I.24}$$

erwähnt, wobei $K = \{sts^{-1}t^{-1} : s \neq t \in S\}$. Der durch $\tilde{\varphi}(s) = s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \langle S \mid R\rangle \to \langle S \mid R \cup K\rangle$ faktorisiert nämlich zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle S \mid R\rangle^{\mathrm{ab}} \to \langle S \mid R \cup K\rangle$ der invers zu dem durch $\psi(s) = s$ bestimmten Homomorphismus $\langle S \mid R \cup K\rangle \to \langle S \mid R\rangle^{\mathrm{ab}}$ ist, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Nun zu einigen Beispielen. Für $n \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dies eine endliche zyklische Gruppe falls $n \neq 0$.

(i) $\langle s \mid -\rangle \cong \mathbb{Z}$.
(ii) $\langle s, t \mid -\rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
(iii) $\langle s, t \mid sts^{-1}t^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
(iv) $\langle s \mid s^n\rangle \cong \mathbb{Z}_n$, für $n \in \mathbb{Z}$.
(v) $\langle s, t \mid s^m, t^n\rangle \cong \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$, für $m, n \in \mathbb{Z}$.

(vi) $\langle s,t \mid s^m, t^n, sts^{-1}t^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, für $m,n \in \mathbb{Z}$.
(vii) $\langle s,t \mid s^2t^3, s^3t^4\rangle = 0$.

I.9.9. Beispiel (Kleinsche Flasche). Auf $S^1 \times I$ betrachte die von $(z,0) \sim (z^{-1},1)$ erzeugte Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum $K := (S^1 \times I)/\sim$ wird als *Kleinsche Flasche* bezeichnet. Es sei $p : S^1 \times I \to K$ die Quotientenabbildung. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := p\big((S^1 \setminus \{-1\}) \times I\big)$ sowie $V := p\big((S^1 \setminus \{1\}) \times I\big)$ von $K = U \cup V$. Die Räume U und V sind Möbiusbänder, vgl. Beispiel I.8.9, die Schleife $a : I \to U$, $a(s) := p(1,s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U, a(0)) \cong \mathbb{Z}$, und $b : I \to V$, $b(s) := p(-1,s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(V, b(0)) \cong \mathbb{Z}$. Für den Durchschnitt gilt $U \cap V \cong (0,\pi) \times S^1$, die Schleife $r := r_1 r_2$ repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, wobei $r_1 : I \to U \cap V$, $r_1(s) = p(\mathbf{i}, s)$, und $r_2 : I \to U \cap V$, $r_2(s) := p(-\mathbf{i}, s)$, und $x_0 := r(0) \in U \cap V$. Weiters seien $h_a : I \to U$, $h_a(s) := p(\mathbf{i}e^{-\pi \mathbf{i} s/2}, 0)$, und $h_b : I \to V$, $h_b(s) := p(\mathbf{i}e^{\pi \mathbf{i} s/2}, 0)$, also $h_a(0) = h_b(0) = x_0$, $h_a(1) = a(0) = a(1)$ und $h_b(1) = b(0) = b(1)$. Wir erhalten Erzeuger $\alpha := [h_a a \bar{h}_a] \in \pi_1(U, x_0)$, $\beta := [h_b b \bar{h}_b] \in \pi_1(V, x_0)$ und $\rho := [r] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$ bildet ρ auf α^2 ab, und der Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(V, x_0)$ bildet ρ auf β^2 ab. Aus Satz I.9.4 folgt daher $\pi_1(K, x_0) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^{-2}\rangle$. Eine nützlichere Darstellung erhalten wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\pi_1(K) \cong \big\langle \alpha,\beta \,\big|\, \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle &\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \,\big|\, \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1},\ \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle && \text{nach (I.22)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1},\ \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\big\rangle && \text{nach (I.22)}
\end{aligned}
$$

Wir wollen noch zeige, dass $\pi_1(K)$ isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ ist, wobei $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der Gruppenstruktur $(k_1,l_1)(k_2,l_2) = (k_1 + (-1)^{l_1}k_2, l_1 + l_2)$ bezeichnet.[13] In $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ gilt die Relation $(0,1)(1,0)(0,1)^{-1}(1,0) = (0,0)$ also bestimmt $\varphi(\alpha) = (0,1)$ und $\varphi(\gamma) = (1,0)$ einen Homomorphismus $\varphi : \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\big\rangle \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi(\gamma^k\alpha^l) = (1,0)^k(0,1)^l = (k,l)$ ist φ surjektiv. Aus der Relation $\alpha\gamma = \gamma^{-1}\alpha$ folgt, dass sich jedes Element in $x \in \langle \alpha,\gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\rangle$ in der Form $x = \gamma^k\alpha^l$ schreiben lässt, $k,l \in \mathbb{Z}$. Daraus sehen wir sofort, dass $\ker(\varphi) = 0$, also ist φ auch

[13] Sind G und H zwei Gruppen, bezeichnet $\mathrm{Aut}(H)$ die Gruppe der Automorphismen von H, und ist $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ ein Homomorphismus, dann definiert die Multiplikation $(h_1,g_1) \cdot (h_2,g_2) := (h_1\varphi_{g_1}(h_2), g_1g_2)$ auf der Menge $H \times G$ eine Gruppenstruktur. Diese Gruppe wird mit $H \rtimes_\varphi G$ bezeichent und ein *semidirektes Produkt* von H und G genannt. Ihr neutrales Element ist $(1,1)$, das Inverse von (g,h) ist durch $(g,h)^{-1} = (\varphi_{g^{-1}}(h^{-1}), g^{-1})$ gegeben. Wir haben einen injektiven Homomorphismus $\iota : H \to H \rtimes_\varphi G$, $\iota(h) := (h,1)$, und einen surjektiven Homomorphismus $p : H \rtimes_\varphi G \to G$, $p(h,g) := g$. Weiters ist $\ker(p) = \mathrm{img}(\iota)$, und daher H ein Normalteiler von $H \rtimes_\varphi G$. Für den trivialen Homomorphismus $\varphi = 1$ erhalten wir $H \rtimes_\varphi G = H \times G$. Das Beispiel im Text oben kommt von $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$, $\varphi_l(k) = (-1)^l k$.

injektiv. Insgesamt folgt
$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}.$$
Für die Abelisierung erhalten wir
$$\begin{aligned}
\pi_1(K)^{\mathrm{ab}} \cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma \big\rangle^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.24)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \gamma^2,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \gamma^2,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\gamma \,\big|\, \gamma^2 \big\rangle^{\mathrm{ab}} && \text{nach (I.24)}\\
&\cong \big(\langle \alpha | - \rangle * \big\langle \gamma \,\big|\, \gamma^2 \big\rangle\big)^{\mathrm{ab}} && \text{nach (I.23)}\\
&\cong \big(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2\big)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$
Die Kleinsche Flasche ist daher weder zur Sphäre S^2 noch zum Torus T^2 homtopieäquivalent (homöomorph), denn $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ist $A \subseteq Y$ und $\varphi : A \to X$ stetig, dann definieren wir
$$X \cup_\varphi Y := (X \sqcup Y)/\!\sim,$$
wobei $\sim$ die von $a \sim \varphi(a)$, $a \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ bezeichnet. Wir sagen der Raum $X \cup_\varphi Y$ entsteht aus X durch *Ankleben* von Y längs φ. Wir erhalten zwei kanonische stetige Abbildungen $\iota_X : X \to X \cup_\varphi Y$ und $\hat\varphi : Y \to X \cup_\varphi Y$. Die Abbildung ι_X ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, wir können X daher als Teilraum von $X \cup_\varphi Y$ auffassen. Weiters bezeichne $\iota_A : A \to Y$ die kanonsische Inklusion. Der verklebte Raum $X \cup_\varphi Y$ hat folgende universelle Eigenschaft. Sind $\psi_X : X \to Z$ und $\psi_Y : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen mit $\psi_X \circ \varphi = \psi_Y \circ \iota_A$ dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\psi : X \cup_\varphi Y \to Z$ mit $\psi_X = \psi \circ \iota_X$ und $\psi_Y = \psi \circ \hat\varphi$. Wir werden diese Abbildung mit $\psi_X \cup_\varphi \psi_Y := \psi$ bezeichnen.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "\iota_X"] \arrow[drr, bend left, "\psi_X"] & & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_A"'] & & X \cup_\varphi Y \arrow[r, dashed, "\exists!\psi"] & Z \\
 & Y \arrow[ur, "\hat\varphi"] \arrow[urr, bend right, "\psi_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

I.9.10. Lemma. *Es sei A ein Deformationsretrakt von Y und $\varphi : A \to X$ stetig. Dann ist $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$, und die kanonische Einbettung $\iota_X : X \to X \cup_\varphi Y$ daher eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Es sei $H : Y \times I \to Y$ eine retrahierende Deformation, dh. $H_0 = \mathrm{id}_Y$, $H_1(Y) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$. Betrachte die Abbildung $\tilde G : (X \sqcup Y) \times I \to X \cup_\varphi Y$ die durch $\tilde G(x,t) := \iota_X(x)$, $(x,t) \in X \times I$, und $\tilde G(y,t) := \hat\varphi(H(y,t))$, $(y,t) \in Y \times I$, definiert ist. Da $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ faktorisiert $\tilde G$ zu einer stetigen Abbildung $G : (X \cup_\varphi Y) \times I \to X \cup_\varphi Y$. Wegen $H_0 = \mathrm{id}_Y$ ist $G_0 = \mathrm{id}_{X \cup_\varphi Y}$. Da $H_1(Y) \subseteq A$ gilt $G_1(X \cup_\varphi Y) \subseteq \iota_X(X)$. Schließlich ist $G_t|_{\iota_X(X)} = \mathrm{id}_{\iota_X(X)}$ für alle $t \in I$. Daher ist G eine retrahierende Deformation und $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$. $\square$

I.9.11. Beispiel (Abbildungszylinder). Es sei $\varphi : Y \to X$ stetig, und es bezeichne $\iota_Y : Y \to Y \times I$ die Einbettung $\iota_Y(y) := (y, 1)$. Wir können φ als eine auf dem Teilraum $A := \iota_Y(Y) = Y \times \{1\}$ definiert Abbildung auffassen. Der Raum $Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I)$ wird der *Abbildungszylinder* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \to Z_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat\varphi : Y \times I \to Z_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat\varphi \circ \iota_Y$. Offensichtlich ist A ein Deformationsretrakt von $Y \times I$, nach Lemma I.9.10 ist daher $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von Z_φ und die Einbettung $\iota_X : X \to Z_\varphi$ eine Homotopieäquivalenz. Die Abbildung $j_Y : Y \to Z_\varphi$, $j_Y(y) := \hat\varphi(y, 0)$ liefert auch eine Einbettung von Y in Z_φ. Diese ist zu $\iota_X \circ \varphi$ homotop, $H : Y \times I \to Z_\varphi$, $H(y, t) := \hat\varphi(y, t)$, liefert eine Homotopie von $H_0 = j_Y$ nach $H_1 = \hat\varphi \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Bis auf Homotopie(äquivalenz) können wir daher jede stetige Abbildung als Einbettung auffassen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] & Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I) \\ Y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\iota_Y"] & Y \times I \arrow[u, "\hat\varphi"'] \end{tikzcd}$$

I.9.12. Beispiel (Abbildungskegel). Es sei $\varphi : Y \to X$ stetig. Weiters bezeichne $CY := (Y \times I)/(Y \times \{0\}$ den Kegel über Y, $p : Y \times I \to CY$ die Quotientenabbildung, $* := p(Y \times \{0\})$ die Spitze des Kegels und $\iota_Y : Y \to CY$ die Einbettung, $\iota_Y(y) = p(y, 1)$. Wir können φ als eine auf der Teilmenge $A := \iota_Y(Y) \subseteq CY$ definierte Abbildung betrachten. Der Raum $C_\varphi := X \cup_\varphi CY$ wird der *Abbildungskegel* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \to C_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat\varphi : CY \to C_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat\varphi \circ \iota_Y$. Beachte, dass die Abbildung $\iota_X \circ \varphi : Y \to C_\varphi$ nullhomotop ist, denn $H : Y \times I \to C_\varphi$, $H(y, t) := \hat\varphi(p(y, t))$ liefert eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{\hat\varphi(*)}$ nach $H_1 = \hat\varphi \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Schließlich ist $j_Y = H_{1/2} : Y \to C_\varphi$, $j_Y(y) := \hat\varphi(p(y, 1/2))$ eine Einbettung von Y in C_φ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] & C_\varphi := X \cup_\varphi CY \\ Y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\iota_Y"] & CY \arrow[u, "\hat\varphi"'] \end{tikzcd}$$

I.9.13. Satz (Fundamentalgruppe des Abbildungskegels). *Es seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $\varphi : Y \to X$ stetig, $y_0 \in Y$ und $x_0 := \varphi(y_0)$. Weiters bezeichne $\iota_X : X \to C_\varphi$ die kanonische Einbettung, siehe Beispiel I.9.12. Dann ist der Homomorphismus $(\iota_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\operatorname{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler überein, wobei $\varphi_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Insbesondere gilt*

$$\pi_1\big(C_\varphi, \iota_X(x_0)\big) \cong \pi_1(X, x_0)/\mathcal{N}(\operatorname{img}(\varphi_*)).$$

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Beispiel I.9.12. Betrachte die offene Teilmenge $U := C_\varphi \setminus \{\hat\varphi(*)\} \cong X \cup_\varphi p(Y \times (0, 1])$. Nach Lemma I.9.10 ist die kanonische Einbettung $\iota_X : X \to U$ eine Homotopieäquivalenz, denn $Y \times \{1\}$ ist Deformationsretrakt von $Y \times (0, 1] \cong p(Y \times (0, 1])$. Die Teilmenge $V := \hat\varphi(p(Y \times [0, 1)))$

ist offen in C_φ und $\hat\varphi|_{p(Y\times[0,1))}: p(Y\times[0,1))\to V$ ist ein Homöomorphismus. Daher ist V kontrahierbar und $\pi_1(V)=0$. Weiters ist $\hat\varphi\circ p|_{Y\times(0,1)}: Y\times(0,1)\to U\cap V$ ein Homöomorphimus und daher die Einbettung $j_Y: Y\to U\cap V$ eine Homotopieäquivalenz. Betrachte den Basispunkt $x_1 := j_Y(y_0)\in U\cap V$. Aus Satz I.9.4 folgt, dass die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(U,x_1)\to\pi_1(C_\varphi,x_1)$ surjektiv ist und ihr Kern mit dem von $\mathrm{img}((j_Y)_*)$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt, wobei $(j_Y)_*: \pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(U,x_1)$. Betrachte die Homotopie $H: Y\times I\to U$, $H(y,t):=\hat\varphi(p(y,1-t/2))$, von $H_0=\hat\varphi\circ\iota_Y=\iota_X\circ\varphi$ nach $H_1=j_Y$, und den Weg $h: I\to U$, $h(t):=H(y_0,t)$, von $h(0)=\iota_X(x_0)$ nach $h(1)=x_1$. Nach Proposition I.8.21 kommutiert das obere obere Rechteck im nebenstehenden Diagramm, das untere kommutiert trivialerweise. Es folgt, dass auch der Homomorphismus $(\iota_X)_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(C_\varphi,\iota_X(x_0))$ surjektiv ist, und sein Kern mit dem von $\mathrm{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt. □

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "(j_Y)_*"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[d, "\cong"', "(\iota_X)_*"] \\
\pi_1(U,x_1) \arrow[r, "\beta_h", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1(U,\iota_X(x_0)) \arrow[d] \\
\pi_1(C_\varphi,x_1) \arrow[r, "\beta_h", "\cong"'] & \pi_1(C_\varphi,\iota_X(x_0))
\end{tikzcd}$$

I.9.14. Korollar (Ankleben einer Zelle). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $\varphi: S^{n-1}\to X$ stetig, $y_0\in S^{n-1}$, $x_0:=\varphi(y_0)\in X$, und es bezeichne $\iota: X\to X\cup_\varphi D^n$ die kanonische Einbettung. Dann gilt:*

(i) *Für $n\geq 3$ ist $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ ein Isomorphismus.*
(ii) *Für $n=2$ ist $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\mathrm{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler überein, wobei $\varphi_*: \pi_1(S^{n-1},y_0)\to\pi_1(X,x_0)$. Insbesondere ist $\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))\cong \pi_1(X,x_0)/\mathcal{N}\big(\mathrm{img}(\varphi_*)\big)$.*

Beweis. Beachte, dass $CS^{n-1}\cong D^n$, denn die Abbildung $S^{n-1}\times I\to D^n$, $(x,t)\mapsto tx$, faktorisiert zu einem Homöomorphismus $CS^{n-1}\to D^n$. Damit gilt $X\cup_\varphi D^n\cong C_\varphi$. Für $n\geq 2$ ist S^{n-1} wegzusammenhängend, aus Satz I.9.13 folgt daher die Surjektivität von $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ und $\ker(\iota_*)=\mathcal{N}(\mathrm{img}(\varphi_*))$. Für $n\geq 3$ ist S^{n-1} einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7, also $\ker(\iota_*)=0$. □

I.9.15. Beispiel. Betrachte die Abbildung $\varphi: S^1\to S^1$, $\varphi(z):=z^k$, $k\in\mathbb{Z}$, und den Raum $X:=S^1\cup_\varphi D^2$. Nach Korollar I.9.14(ii) induziert die Einbettung $\iota: S^1\to X$ einen Isomorphismus $\pi_1(S^1,1)/\mathrm{img}(\varphi_*)\cong\pi_1(X,\iota(1))$ wobei $\varphi_*: \pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1)$. Mit Hilfe von Beispiel I.6.5 sehen wir daher, dass $\pi_1(X)\cong\mathbb{Z}_k$. Die Schleife $f:=\iota\circ\omega_1: I\to X$, siehe (I.1), repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(X)$, und es gilt die Relation $[f]^k=1$.

I.9.16. Beispiel (Reeller projektiver Raum). Die Inklusion $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota: \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}\to\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Es bezeichne $p_n: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi: D^n\to\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $\Phi(x):=p_n\big(x,\sqrt{1-\|x\|^2}\big)$. Diese ist surjektiv und auf $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<1\}$

injektiv. Die Einschränkung $\Phi|_{S^{n-1}}$ liefert eine stetige Abbildung $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, $\varphi(x) = p_{n-1}(x)$, mit $\Phi|_{S^{n-1}} = \iota \circ \varphi$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $\iota \cup_\varphi \Phi : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer n-Zelle längs der kanonischen Projektion $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^n.$$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum, und $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong D^1/\{-1,1\} \cong S^1$. Insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{Z}$. Aus Beispiel I.9.15 erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Nach Korollar I.9.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$, falls $n \geq 3$. Mittels Induktion erhalten wir daher $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Die Schleife $f : I \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $f(s) := p_n\big(\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0 \ldots, 0\big)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$, $n \geq 1$. Für $n \geq 2$ gilt die Relation $[f]^2 = 1$.

I.9.17. Beispiel (Komplexer projektiver Raum). Die Inklusion $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Es bezeichne $p_n : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi : D^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\Phi(z) := p_n\big(z, \sqrt{1 - \|z\|^2}\big)$. Diese ist surjektiv und auf $B^{2n} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ injektiv. Die Einschränkung $\Phi|_{S^{2n-1}}$ liefert eine stetige Abbildung $\varphi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$, $\varphi(z) = p_{n-1}(z)$, mit $\Phi|_{S^{2n-1}} = \iota \circ \varphi$, die die *Hopfabbildung* genannt wird. Wir erhalten eine stetige Abbildung $\iota \cup_\varphi \Phi : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer $2n$-Zelle längs der Hopfabbildung $\varphi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^{2n}.$$

$\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum, und $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$ vgl. Beispiel I.6.8. Nach Korollar I.9.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, falls $n \geq 1$. Mittels Induktion folgt nun, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einfach zusammenhängend ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

I.9.18. Korollar. *Zu jeder endlich präsentierbaren Gruppe G existiert ein wegzusammenhängender kompakter Hausdorffraum X mit $\pi_1(X) \cong G$.*

Beweis. Sei $G \cong \langle s_1, \ldots, s_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle = F(\{s_1, \ldots, s_n\})/\mathcal{N}(\{r_1, \ldots, r_m\})$ eine endliche Präsentation von G. Betrachte die Einpunktvereinigung von n Kreisen $\bigvee^n(S^1, 1)$. Nach Beispiel I.9.7 ist $\pi_1\big(\bigvee^n(S^1, 1)\big) \cong F(\{s_1, \ldots, s_n\})$. Jede Relation $r_j \in F(S)$ kann daher als Element in $\pi_1\big(\bigvee^n(S^1, 1)\big) \cong \big[(S^1, 1), \bigvee^n(S^1, 1)\big]$ aufgefasst werden, siehe Proposition I.8.27. Es sei $\varphi_j : (S^1, 1) \to \bigvee^n(S^1, 1)$ eine stetige Abbildung die r_j repäsentiert, $1 \leq j \leq m$. Es bildet dann $(\varphi_j)_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1\big(\bigvee^n(S^1, 1)\big)$ den Erzeuger $[\omega_1] \in \pi_1(S^1, 1)$ auf r_j ab, $1 \leq j \leq m$. Betrachte nun $\varphi := \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_m : \bigvee^m(S^1, 1) \to \bigvee^n(S^1, 1)$. Das Bild von $\varphi_* : \pi_1\big(\bigvee^m(S^1, 1)\big) \to \pi_1\big(\bigvee^n(S^1, 1)\big)$ stimmt dann mit der von $\{r_1, \ldots, r_m\}$ erzeugten Untergruppe überein, also ist $\mathcal{N}(\mathrm{img}(\varphi_*)) = \mathcal{N}(\{r_1, \ldots, r_m\})$. Kleben wir $\bigvee^m(D^2,1)$ längs φ an $\bigvee^n(S^1,1)$ erhalten wir einen wegzusammenhängenden kompakten Hausdorffraum $X := \big(\bigvee^n(S^1,1)\big) \cup_\varphi \big(\bigvee^m(D^2,1)\big)$. Nach Satz I.9.13 hat X Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big)/\mathcal{N}\big(\varphi_*\big(\pi_1\big(\bigvee^m(S^1,1)\big)\big)\big) \cong F(\{s_1,\dots,s_n\})/\mathcal{N}(\{r_1,\dots,r_m\}) \cong G$. □

I.9.19. Bemerkung. Wir werden später sehen, dass zu jeder Gruppe G ein, i.A. nicht kompakter, wegzusammenhängender Hausdorffraum Raum X existiert, sodass $\pi_1(X) \cong G$. Die Konstruktion ist dieselbe nur muss i.A. mit einer Einpunktvereinigung unendlich vieler Kreise gestartet und unendlich viele Zellen angeklebt werden.

Unter einer *geschlossenen Fläche* verstehen wir einen kompakten, (weg)zusammenhängenden Hausdorffraum der lokal zu $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist, dh. jeder Punkt besitzt eine zu $\mathbb{R}^2$ homöomorphe Umgebung.[14] Die Sphäre S^2, der Torus T^2, die projektive Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und die Kleinsche Flasche K aus Beispiel I.9.9 sind geschlossene Flächen.

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von $2g$ Kreisen $\bigvee^{2g}(S^1,1)$ und bezeichne mit $\iota_k : (S^1,1) \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$ die kanonische Inklusion der k-ten Komponente, $1 \le k \le 2g$. Für $1 \le j \le g$ definiere Schleifen $a_j : I \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$, $a_i := \iota_j \circ \omega_1$, und $b_j : I \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$, $b_j := \iota_{g+j} \circ \omega_1$. Betrachte schließlich die Schleife $\varphi := a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$ und fasse sie als Abbildung $S^1 \cong I/\{0,1\} \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$ auf. Der Raum $M_g := \big(\bigvee^{2g}(S^1,1)\big) \cup_\varphi D^2$ wird die *orientierbare Fläche vom Geschlecht g* genannt. Wir setzen noch $M_0 := S^2$. Es ist leicht einzusehen, dass jedes M_g tatsächlich eine geschlossene Fläche ist, $g \in \mathbb{N}_0$. Etwa gilt $M_1 \cong T^2$. Aus Korollar I.9.14 erhalten wir folgende Darstellung ihrer Fundamentalgruppe,

$$\pi_1(M_g) \cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \bigm| [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \big\rangle$$

wobei wir die übliche Notation $[\alpha, \beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ für den Kommutator von α und β verwenden. Mittels (I.24) und (I.21) berechnen wir die Abelisierung,

$$\begin{aligned}
\pi_1(M_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \bigm| [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g],\ [\alpha_i, \alpha_j],\ [\beta_i, \beta_j],\ [\alpha_i, \beta_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \bigm| [\alpha_i, \alpha_j],\ [\beta_i, \beta_j],\ [\alpha_i, \beta_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \bigm| - \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong (\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.
\end{aligned}$$

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von g Kreisen $\bigvee^g(S^1,1)$ und bezeichne die kanonische Inklusion der k-ten Komponente mit $\iota_k : (S^1,1) \to \bigvee^g(S^1,1)$, $1 \le k \le g$. Für $1 \le k \le g$ definiere Schleifen $a_k : I \to \bigvee^g(S^1,1)$, $a_k := \iota_k \circ \omega_1$. Fasse die Schleife $\varphi := a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$ als Abbildung $S^1 \cong I/\{0,1\} \to \bigvee^g(S^1,1)$ auf. Der Raum $N_g := \big(\bigvee^g(S^1,1)\big) \cup_\varphi D^2$ wird als die *nicht orientierbare Fläche mit Geschlecht g* bezeichnet. Jedes N_g ist eine geschlossene Fläche, $g \in \mathbb{N}$.

[14]Die geschlossenen Flächen sind daher genau die zusammenhängenden, kompakten 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Etwa gilt $N_1 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und $N_2 \cong K$, siehe Beispiel I.9.9. Aus Korollar I.9.14 erhalten wir für die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(N_g) \cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \bigm| \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_g^2 \big\rangle,$$

und für ihre Abelisierung

$$\begin{aligned}
\pi_1(N_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \bigm| \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_g^2,\ [\alpha_i,\alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \bigm| \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g,\ \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_g^2,\ [\alpha_i,\alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \bigm| \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g,\ \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_g^2,\ [\alpha_i,\alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \bigm| \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g,\ [\alpha_i,\alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \bigm| \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_g \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \gamma \bigm| \gamma^2 \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \Big(\langle \alpha_1 | - \rangle * \cdots * \langle \alpha_{g-1} \mid - \rangle * \langle \gamma | \gamma^2 \rangle\Big)^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \big(\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2\big)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Wir halten diese Resultate in folgendem Korollar fest.

I.9.20. Korollar. *Für die gechlossenen Flächen gilt:*

$$\pi_1(M_g) \cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \bigm| [\alpha_1,\beta_1]\cdots[\alpha_g,\beta_g] \big\rangle, \qquad \pi_1(M_g)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g},$$

$$\pi_1(N_g) \cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \bigm| \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_g^2 \big\rangle, \qquad \pi_1(N_g)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Insbesondere sind die Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, N_3, \dots$ paarweise nicht homotopieäquivalent (homöomorph).

I.9.21. Bemerkung. Die geschlossenen Flächen sind vollständig klassifiziert, jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, \dots$ homöomorph. Die Berechnung der Fundamentalgruppen oben hat gezeigt, dass eine geschlossene Fläche zu höchstens einer solchen Fläche homöomorph sein kann. Um zu zeigen, dass sie tatsächlich zu einer Fäche dieser Liste homöomorph ist sind völlig andere Methoden nötig, vgl. Morse Theorie.