

### III. Homotopietheorie

**III.1. Kategorien und Funktoren.** Die Kategorientheorie [7] bietet eine Sprache die sich gut eignet Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Disziplinen der Mathematik herauszuarbeiten und zu formalisieren. Sie liefert auch eine Möglichkeit verschiedene Gebiete in transparenter Weise miteinander in Beziehung zu setzen. Gerade in der algebraischen Topologie wo wir topologischen Räumen algebraische Gebilde zuordnen ist dies die Sprache der Wahl, und dort wurden die grundlegenden Begriffe der Kategorientheorie auch erfunden.

Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus:

- (i) Einer Klasse von Objekten.
- (ii) Zu je zwei Objekten  $X$  und  $Y$  von  $\mathcal{C}$ , eine Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Die Elemente von  $\mathcal{C}(X, Y)$  werden *Morphismen* von  $X$  nach  $Y$  genannt. Ist  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  so deuten wir dies auch durch  $f : X \rightarrow Y$  an.
- (iii) Zu je drei Objekten  $X, Y$  und  $Z$  von  $\mathcal{C}$  eine Abbildung, die sogenannte *Komposition* auch *Verknüpfung*,  $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ . Sind  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  und  $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$  dann schreiben wir  $g \circ f$  oder  $gf$  für den entsprechenden Morphismus in  $\mathcal{C}(X, Z)$ .

Diese Daten müssen den folgenden beiden Axiomen genügen:

- (A1) Zu jedem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  existiert ein Morphismus  $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ , sodass für alle Objekte  $Y, Z$  von  $\mathcal{C}$  und alle Morphismen  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $g \in \mathcal{C}(Z, X)$  stets  $f \circ \text{id}_X = f$  und  $\text{id}_X \circ g = g$  gilt. (neutrale Elemente, identische Morphismen)
- (A2) Für Objekte  $X, Y, Z$  und  $W$  von  $\mathcal{C}$  und Morphismen  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ ,  $h \in \mathcal{C}(Z, W)$  gilt stets  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ . (Assoziativität der Verknüpfung)

III.1.1. BEMERKUNG. Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, dann sind die neutralen Elemente  $\text{id}_X$  durch die Eigenschaft  $f \circ \text{id}_X = f$  und  $\text{id}_X \circ g = g$  eindeutig bestimmt. Ist nämlich  $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$  ein weiterer Morphismus, sodass für alle Objekte  $Y, Z$  von  $\mathcal{C}$  und alle  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $g \in \mathcal{C}(Z, X)$  die Relationen  $f \circ 1_X = f$  und  $1_X \circ g = g$  gelten, dann folgt  $1_X = 1_X \circ \text{id}_X = \text{id}_X$ .

Ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  wird ein *Isomorphismus* genannt, falls ein Morphismus  $g \in \mathcal{C}(Y, X)$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  existiert. Im Existenzfall ist so ein Morphismus  $g$  eindeutig bestimmt. Ist nämlich  $h \in \mathcal{C}(Y, X)$  ein weiterer Morphismus mit  $f \circ h = \text{id}_Y$  und  $h \circ f = \text{id}_X$ , dann folgt  $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X \circ h = h$ . Wir bezeichnen den Morphismus  $g$  daher mit  $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$ . Mit  $f$  ist natürlich auch  $f^{-1}$  ein Isomorphismus, und es gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Sind  $f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$  und  $f_2 \in \mathcal{C}(Y, Z)$  zwei Isomorphismen, dann ist auch  $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{C}(X, Z)$  ein Isomorphismus mit  $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ .

III.1.2. BEMERKUNG. Es sei  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  ein Morphismus einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Weiters seien  $g \in \mathcal{C}(Y, X)$  ein Linksinverses von  $f$ , dh.  $g \circ f = \text{id}_X$ , und

$h \in \mathcal{C}(Y, X)$  sei ein Rechtsinverses von  $f$ , dh.  $f \circ h = \text{id}_Y$ . Dann stimmen  $g$  und  $h$  überein und  $f$  ist ein Isomorphismus mit  $f^{-1} = g = h$ . Dies folgt wieder aus  $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X \circ h = h$ .

III.1.3. BEISPIEL (Kategorie der Mengen). Wir definieren eine Kategorie  $\text{Set}$  wie folgt. Als Objekte nehmen wir alle Mengen. Für zwei Objekte, dh. Mengen,  $X$  und  $Y$  bestehe die Menge der Morphismen  $\text{Set}(X, Y)$  aus allen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Schließlich ist die Verknüpfung von Morphismen durch die übliche Komposition von Abbildungen gegeben. Offensichtlich bildet  $\text{Set}$  eine Kategorie, die *Kategorie der Mengen und Abbildungen*. Die Isomorphismen in  $\text{Set}$  sind genau die Bijektionen.

III.1.4. BEISPIEL (Kategorie der punktierten Mengen). Ist  $X$  eine Menge und  $x_0 \in X$  so bezeichnen wir das Paar  $(X, x_0)$  als punktierte Menge. Unter einer Abbildung punktierter Mengen  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  verstehen wir eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  für die  $f(x_0) = y_0$  gilt. Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\text{Set}_0$  besteht aus allen punktierten Mengen. Die Menge der Morphismen  $\text{Set}_0((X, x_0), (Y, y_0))$  zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Mengen,  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  besteht aus allen Abbildungen punktierter Mengen von  $(X, x_0)$  nach  $(Y, y_0)$ . Bezüglich der üblichen Komposition bildet  $\text{Set}_0$  eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Mengen*. Die Isomorphismen in  $\text{Set}_0$  sind genau die Basispunkt bewahrenden Bijektionen.

III.1.5. BEISPIEL (Kategorie der Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\text{Grp}$  besteht aus allen Gruppen. Für zwei Objekte, dh. Gruppen,  $G$  und  $H$  besteht die Menge der Morphismen  $\text{Grp}(G, H)$  aus allen Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $H$ . Die Verknüpfung von Morphismen ist durch die übliche Komposition von Homomorphismen gegeben. Beachte, dass die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismen ist. Offensichtlich bildet  $\text{Grp}$  eine Kategorie, die *Kategorie der Gruppen und Homomorphismen*. Die Isomorphismen in  $\text{Grp}$  sind genau die Gruppenisomorphismen.

III.1.6. BEISPIEL (Kategorie der abelschen Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\text{aGrp}$  besteht aus allen abelschen Gruppen. Die Menge der Morphismen  $\text{aGrp}(A, B)$  zwischen zwei Objekten, dh. abelschen Gruppen,  $A$  und  $B$  besteht aus allen Gruppenhomomorphismen von  $A$  nach  $B$ . Bezüglich der üblichen Komposition von Homomorphismen bildet  $\text{aGrp}$  eine Kategorie, die *Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen*. Die Isomorphismen in  $\text{aGrp}$  sind genau die Isomorphismen zwischen abelschen Gruppen.

III.1.7. BEISPIEL (Kategorie der  $\mathbb{K}$ -Vektorräume). Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$  besteht aus allen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Die Menge der Morphismen  $\mathbb{K}\text{-Vsp}(V, W)$  zwischen zwei Objekten, dh.  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen,  $V$  und  $W$  besteht aus allen  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ .

Bezüglich der üblichen Komposition linearer Abbildungen bildet  $\mathbb{K}$ -Vsp eine Kategorie, die *Kategorie der  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und linearen Abbildungen*. Die Isomorphismen in  $\mathbb{K}$ -Vsp sind genau die Isomorphismen von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen.

III.1.8. BEISPIEL (Kategorie der topologischen Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie Top besteht aus allen topologischen Räumen. Die Menge der Morphismen  $\text{Top}(X, Y)$  zwischen zwei Objekten, dh. topologischen Räumen,  $X$  und  $Y$  besteht aus allen stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet Top eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen*. Beachte hier, dass die Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig ist. Die Isomorphismen in Top sind genau die Homöomorphismen. Ebenso können wir die Kategorie der Hausdorffräume, die Kategorie der kompakten Räume usw. betrachten.

III.1.9. BEISPIEL (Kategorie der punktierten Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\text{Top}_0$  besteht aus allen punktierten Räumen. Die Menge der Morphismen zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Räumen,  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  besteht aus allen Abbildungen punktierter Räume  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet  $\text{Top}_0$  eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume*. Die Isomorphismen in  $\text{Top}_0$  sind genau die Homöomorphismen punktierter Räume.

In allen bisher besprochenen Kategorien waren die Objekte Mengen mit gewissen Strukturen (Basispunkt, Gruppenstruktur, Vektorraumstruktur, Topologie, ...) und die Morphismen waren Abbildungen die diese Struktur bewahren (Basispunkt erhaltend, mit Gruppenmultiplikation verträglich, linear, stetig, ...) In den folgenden Beispielen sind die Morphismen keine Abbildungen.

III.1.10. BEISPIEL. Die Klasse der Objekte der Kategorie hTop besteht aus allen topologischen Räumen. Für zwei Objekte, dh. topologische Räume,  $X$  und  $Y$  besteht die Menge der Morphismen von  $X$  nach  $Y$  aus allen Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , dh.  $\text{hTop}(X, Y) = [X, Y]$ , siehe Abschnitt I.8. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh.  $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ . Beachte, dass dies nach Lemma I.8.4 tatsächlich wohldefiniert ist. Mit dieser Komposition bildet hTop eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen*. Die Isomorphismen in hTop sind genau die Homotopieäquivalenzen.

III.1.11. BEISPIEL. Die Klasse der Objekte der Kategorie  $\text{hTop}_0$  besteht aus allen punktierten Räumen. Für zwei Objekte, dh. punktierte Räume,  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  besteht die Menge der Morphismen von  $(X, x_0)$  nach  $(Y, y_0)$  aus allen Homotopieklassen (relativ Basispunkt) punktierter Abbildungen von  $(X, x_0)$  nach  $(Y, y_0)$ , dh.  $\text{hTop}((X, x_0), (Y, y_0)) = [(X, x_0), (Y, y_0)]$ , siehe Abschnitt I.8. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh.  $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ . Mit dieser Komposition bildet  $\text{hTop}_0$  eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen*.

Die Isomorphismen in  $\text{hTop}_0$  sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume.

III.1.12. BEISPIEL. Wir können eine Gruppe  $G$  auch als Kategorie auffassen. Diese besitzt nur ein einziges Objekt  $*$  und die Menge der Morphismen ist durch  $\mathcal{C}(*, *) := G$  festgelegt. Definieren wir die Verknüpfung von Morphismen durch die Gruppenmultiplikation in  $G$  so bildet dies eine Kategorie. Jeder Morphismus ist ein Isomorphismus, denn jedes Element in  $G$  besitzt ein Inverses.

III.1.13. BEISPIEL (Duale Kategorie). Zu jeder Kategorie  $\mathcal{C}$  kann eine *dual Kategorie*  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  wie folgt definiert werden. Die Klasse der Objekte von  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  stimmt mit der Klasse der Objekte von  $\mathcal{C}$  überein. Sind  $X$  und  $Y$  Objekte von  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  dann ist die Menge der Morphismen durch  $\mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$  definiert. Die Verknüpfung von  $f \in \mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y)$  mit  $g \in \mathcal{C}^{\text{op}}(Y, Z)$  ist durch  $g \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$  definiert, wobei  $\circ_{\mathcal{C}}$  die Verknüpfung in  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Offensichtlich bildet  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  wieder eine Kategorie. Sie wird die zu  $\mathcal{C}$  *duale Kategorie* genannt.

Unter einem (*kovarianten*) *Funktor*  $F$  von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{D}$  verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $F(X)$  aus  $\mathcal{D}$  und jedem Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  einen Morphismus  $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  zuordnet, sodass

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und} \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

für beliebige Objekte  $X, Y, Z$  von  $\mathcal{C}$  und beliebige Morphismen  $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$  gilt. In diesem Fall schreiben wir auch  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

III.1.14. BEMERKUNG. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  ein Isomorphismus, dann ist auch  $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  ein Isomorphismus mit  $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ , denn  $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  und  $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_Y) = \text{id}_{F(Y)}$ .

III.1.15. BEMERKUNG. Sind  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  zwei Funktoren, dann ist offensichtlich auch  $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $(GF)(X) := G(F(X))$ ,  $(GF)(f) := G(F(f))$  ein Funktor. Auch haben wir stets einen identischen Funktor  $\text{id} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $\text{id}(X) := X$ ,  $\text{id}(f) := f$ .

Unter einem *kontravarianten Funktor*  $F$  von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{D}$  verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  ein Objekt  $F(X)$  aus  $\mathcal{D}$  und jedem Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  einen Morphismus  $F(f) \in \mathcal{D}(F(Y), F(X))$  zuordnet, sodass

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und} \quad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

für beliebige Objekte  $X, Y, Z$  von  $\mathcal{C}$  und beliebige Morphismen  $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ ,  $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$  gilt. Ein kontravarianter Funktor von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  ist dasselbe wie ein kovarianter Funktor von  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  nach  $\mathcal{D}$ , siehe Beispiel III.1.13. Mit Hilfe der dualen Kategorie lassen sich daher kontravariante Funktoren als kovariante auffassen.

III.1.16. BEISPIEL (Vergissfunktoren). Eine Reihe kovarianter Funktoren erhalten wir indem wir gewisse Strukturen vergessen. Ordnen wir etwa einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zu so erhalten wir einen Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ . Vergessen wir den Basispunkt eines punktierten Raums so erhalten wir einen Funktor  $\text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}$ . Ordnen wir einem Vektorraum die zugrundeliegende abelsche Gruppe zu so liefert dies einen Funktor  $\text{Vsp} \rightarrow \text{aGrp}$ . Ebenso erhalten wir einen Funktor  $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}_0$  indem wir einer Gruppe die zugrundeliegende Menge mit dem neutralen Element als Basispunkt zuordnen. Schließlich sei noch der Funktor  $\text{hTop}_0 \rightarrow \text{hTop}$  erwähnt, der einer Homotopieklasse relative Basispunkt die entsprechende freie Homotopieklasse zuordnet.

III.1.17. BEISPIEL. Ordnen wir einer stetigen Abbildung die von ihr repräsentierte Homotopieklasse zu so erhalten wir kovariante Funktoren  $\text{Top} \rightarrow \text{hTop}$  und  $\text{Top}_0 \rightarrow \text{hTop}_0$ .

III.1.18. BEISPIEL (Suspension). Wir können die Suspension als kovarianten Funktor  $\Sigma : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$  auffassen. Einem topologischen Raum  $X$  wird dabei die Einhängung  $\Sigma X := (X \times [-1, 1])/\sim$  zugeordnet, siehe Beispiel I.9.6. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig dann faktorisiert  $f \times \text{id}_{[-1, 1]} : X \times [-1, 1] \rightarrow Y \times [-1, 1]$  zu einer stetigen Abbildung  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ . Eine einfache Rechnung zeigt  $\Sigma(f \circ g) = (\Sigma f) \circ (\Sigma g)$  und  $\Sigma(\text{id}_X) = \text{id}_{\Sigma X}$ , also ist  $\Sigma$  tatsächlich ein Funktor. Sind  $f, g : X \rightarrow Y$  homotop, dann gilt auch  $\Sigma f \simeq \Sigma g$ , die Suspension liefert daher auch einen Funktor  $\text{hTop} \rightarrow \text{hTop}$ . Ist  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum, so können wir  $\Sigma X$  mit dem Basispunkt  $[(x_0, 0)]$  ausstatten und erhalten Suspensionsfunktoren  $\text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}_0$  sowie  $\text{hTop}_0 \rightarrow \text{hTop}_0$ .

III.1.19. BEISPIEL (Fundamentalgruppe). Die Fundamentalgruppe definiert einen kovarianten Funktor  $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$ . Einem punktierten topologischen Raum  $(X, x_0)$  wird dabei die Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$ , und einer Abbildung punktierter Räume  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  der Gruppenhomomorphismus  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  zugeordnet, siehe Proposition I.6.1. Die Relationen  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  und  $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$  besagen gerade, dass dies ein kovarianter Funktor ist. Auf Grund der Homotopieinvarianz, siehe Proposition I.8.18, können wir die Fundamentalgruppe auch als kovarianten Funktor  $\pi_1 : \text{hTop}_0 \rightarrow \text{Grp}$  auffassen. Die Isomorphismen in der Kategorie  $\text{hTop}_0$  sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume und diese müssen durch den Funktor  $\pi_1$  auf Isomorphismen in der Kategorie  $\text{Grp}$ , dh. Gruppenisomorphismen, abgebildet werden, siehe Bemerkung III.1.14. Wir erhalten so genau die Aussage von Proposition I.8.20.

III.1.20. BEISPIEL. Ordnen wir einem topologischen Raum  $X$ , die Algebra der stetigen Funktionen  $C(X, \mathbb{C})$  und einer stetigen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  den Algebramorphismus  $\varphi^* : C(Y, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C})$ ,  $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ , zu so erhalten wir einen kontravarianten Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Alg}$ , denn offensichtlich gilt  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ . Dabei bezeichnet  $\text{Alg}$  die Kategorie der  $\mathbb{C}$ -Algebren und Algebramorphismen.

III.1.21. BEISPIEL. Ordnen wir einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  seinen Dualraum  $V^* = L(V, \mathbb{K})$  und einer linearen Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  die lineare Abbildung  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  zu,  $\varphi^*(\lambda) := \lambda \circ \varphi$ , so erhalten wir einen kontravarianten Funktor  $\mathbb{K}\text{-Vsp} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Vsp}$ , denn  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$ .

III.1.22. BEISPIEL. Für eine Gruppe  $G$  bezeichne  $C(G)$  die Menge der Konjugationsklassen in  $G$ . Da jeder Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  Konjugationsklassen von  $G$  in Konjugationsklassen von  $H$  abbildet, induziert er eine Abbildung  $C(\varphi) : C(G) \rightarrow C(H)$ . Offensichtlich gilt  $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$ , also liefert dies einen kovarianten Funktor  $C : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ . In jeder Gruppe gibt es eine ausgezeichnete Konjugationsklasse die nur aus dem neutralen Element besteht. Wir können diese Konjugationsklasse als Basispunkt in  $C(G)$  verwenden. Offensichtlich bildet  $C(\varphi)$  das ausgezeichnete Element in  $C(G)$  auf das ausgezeichnete Element in  $C(H)$  ab. Also erhalten wir auch einen Funktor  $C : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}_0$ , vgl. Beispiel III.1.4.

III.1.23. BEISPIEL. Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$ . Wir definieren einen Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  indem wir einem Objekt  $Y$  von  $\mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$  und einem Morphismus  $f \in \mathcal{C}(Y_1, Y_2)$  die Abbildung  $f_* : \mathcal{C}(X, Y_1) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y_2)$ ,  $f_*(\varphi) := f \circ \varphi$ , zuordnen. Wegen  $(f \circ g)_*(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = f_*(g_*(\varphi)) = (f_* \circ g_*)(\varphi)$  gilt  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ , also ist dies ein kovarianter Funktor. Wenden wir dies etwa auf  $\mathcal{C} = \text{hTop}$  und  $X = S^1$  an, so erhalten wir einen Funktor  $\text{hTop} \rightarrow \text{Set}$  der einem topologischen Raum  $Y$  die Menge der freien Homotopieklassen  $[S^1, Y]$  und einem stetigen  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  die Abbildung  $f_* : [S^1, Y_1] \rightarrow [S^1, Y_2]$  zuordnet. Wenden wir die Konstruktion auf  $\mathcal{C} = \text{hTop}_0$  und  $X = (S^1, *)$  an so erhalten wir einen Funktor  $\text{hTop}_0 \rightarrow \text{Set}$  der einem punktierten Raum  $(Y, y_0)$  die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge  $[(S^1, *), (Y, y_0)]$  zuordnet, vgl. Proposition I.8.27.

III.1.24. BEISPIEL. Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $Y$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$ . Wir definieren einen kontravarianten Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  indem wir einem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$  und einem Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$  die Abbildung  $f^* : \mathcal{C}(X_2, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X_1, Y)$  zuordnen,  $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ . Wegen  $(f \circ g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f \circ g) = (\varphi \circ f) \circ g = g^*(f^*(\varphi)) = (g^* \circ f^*)(\varphi)$  gilt  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ , also ist dies ein kontravarianter Funktor.

Es seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation*  $\varphi$  von  $F$  nach  $G$  besteht aus einem Morphismus  $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$  für jedes Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$ , sodass für jeden Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  nebenstehendes Diagramm kommutiert, dh. es gilt  $G(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ F(f)$ . Ist  $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$  für jedes Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  ein Isomorphismus, dann wird  $\varphi$  ein *natürlicher Isomorphismus* zwischen  $F$  und  $G$  genannt. In diesem Fall definiert  $\psi_X := (\varphi_X)^{-1}$  eine natürliche Transformation von  $G$  nach  $F$ .

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y)
 \end{array}$$

III.1.25. BEISPIEL. Betrachte den Funktor  $G : \mathbb{K}\text{-Vsp} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Vsp}$  der einem Vektorraum  $V$  seinen Bidual  $G(V) := (V^*)^*$  und einer linearen Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  ihre Biduale  $G(\lambda) := (\lambda^*)^*$  zuordnet. Dies stimmt mit dem Quadrat des kontravarianten Funktors in Beispiel III.1.21 überein. Weiters bezeichne  $F := \text{id}$  den identischen Funktor  $\mathbb{K}\text{-Vsp} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Vsp}$ . Zu einem Vektorraum  $V$  betrachte nun die lineare Abbildung  $\varphi_V : V \rightarrow (V^*)^*$ ,  $\varphi_V(v)(\lambda) := \lambda(v)$ ,  $v \in V$ ,  $\lambda \in V^*$ . Eine einfache Rechnung zeigt, dass  $\varphi$  eine natürliche Transformation von  $F$  nach  $G$  liefert. In der Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume ist  $\varphi$  ein natürlicher Isomorphismus zwischen  $F$  und  $G$ .

III.1.26. BEISPIEL. Betrachte den Fundamentalgruppenfunktor  $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$ , siehe Beispiel III.1.19 sowie den Funktor  $F : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$ , der einem punktierten Raum  $(X, x_0)$  die in Proposition I.8.27 besprochene Gruppe  $F(X, x_0) := [(S^1, 1), (X, x_0)]$ , und einer Abbildung punktierter Räume  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  den Homomorphismus  $F(f) := f_*$  zuordnet. Die in Proposition I.8.27 beschriebene Abbildung  $\Psi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [(S^1, 1), (X, x_0)]$  definiert einen natürlichen Isomorphismus zwischen  $\pi_1$  und  $F$ .

III.1.27. BEISPIEL. Wir betrachten den Funktor  $G : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Set}$ ,  $G(X, x_0) := [S^1, X]$ ,  $G(f) := f_*$ . Weiters sei  $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$  der Fundamentalgruppenfunktor und  $C : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$  der Funktor aus Beispiel III.1.22. Ihre Komposition liefert einen Funktor  $F := C \circ \pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Set}$ . Die in Satz I.8.28 besprochene Abbildung definiert eine natürliche Transformation von  $F$  nach  $G$ . Auf der Kategorie der wegzusammenhängenden punktierten Räume ist dies ein natürlicher Isomorphismus zwischen  $F$  und  $G$ , siehe Satz I.8.28.

Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , eine Menge von Objekten in  $\mathcal{C}$ . Unter einem *Produkt* der  $X_\alpha$  verstehen wir ein Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$  die folgende universelle Eigenschaft besitzen. Sind  $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , Morphismen von  $\mathcal{C}$ , dann existiert ein eindeutiger Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  mit  $p_\alpha \circ f = f_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$ . Im Existenzfall ist das Objekt  $X$  und die sogenannten Projektionen  $p_\alpha$  bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist  $\tilde{X}$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und sind  $\tilde{p}_\alpha : \tilde{X} \rightarrow X_\alpha$  Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigenschaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ , sodass  $\tilde{p}_\alpha \circ f = p_\alpha$ , für alle  $\alpha \in A$ .

III.1.28. BEISPIEL (Produkte in Set). Sind  $X_\alpha$  Mengen, dh. Objekte von Set, so bildet  $\prod_\beta X_\beta$  zusammen mit den kanonischen Projektionen  $p_\alpha : \prod_\beta X_\beta \rightarrow X_\alpha$  ein Produkt in der Kategorie Set.

III.1.29. BEISPIEL (Produkte in Top). Sind  $X_\alpha$  topologische Räume, dh. Objekte von Top, so bildet  $\prod_\beta X_\beta$ , versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen  $p_\alpha : \prod_\beta X_\beta \rightarrow X_\alpha$  ein Produkt in der Kategorie Top.

III.1.30. BEISPIEL (Produkte in  $\text{Top}_0$ ). Sind  $(X_\alpha, x_\alpha)$  punktierte Räume, dh. Objekte von  $\text{Top}_0$ , so bildet  $\prod_\beta (X_\beta, x_\beta)$ , versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen  $p_\alpha : \prod_\beta (X_\beta, x_\beta) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  ein Produkt in der Kategorie  $\text{Top}_0$ .

III.1.31. BEISPIEL (Produkte in  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ ). Sind  $V_\alpha$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume, dh. Objekte von  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ , so bildet  $\prod_\beta V_\beta$  zusammen mit den kanonischen Projektionen  $p_\alpha : \prod_\beta V_\beta \rightarrow V_\alpha$  ein Produkt in der Kategorie  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ .

III.1.32. BEISPIEL (Produkte in  $\text{Grp}$ ). Sind  $G_\alpha$  Gruppen, dh. Objekte von  $\text{Grp}$ , so bildet  $\prod_\beta G_\beta$ , versehen mit der üblichen komponentenweisen Multiplikation, zusammen mit den kanonischen Projektionen  $p_\alpha : \prod_\beta G_\beta \rightarrow G_\alpha$  ein Produkt in der Kategorie  $\text{Grp}$ .

III.1.33. BEISPIEL. Der Fundamentalgruppenfunktorkomplex  $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$  erhält Produkte, dh. er bildet Produkte in  $\text{Top}_0$  auf Produkte in  $\text{Grp}$  ab. Für endliche Produkte folgt dies aus Proposition I.7.1. Der Beweis bleibt für Produkte beliebig vieler punktierter Räume gültig.

Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , eine Menge von Objekten in  $\mathcal{C}$ . Unter einem *Koprodukt* der  $X_\alpha$  verstehen wir ein Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$  die folgende universelle Eigenschaft haben: Sind  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in A$ , Morphismen von  $\mathcal{C}$ , dann existiert ein eindeutiger Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$ . Im Existenzfall ist das Objekt  $X$  und die Morphismen  $\iota_\alpha$  bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist  $\tilde{X}$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und sind  $\tilde{\iota}_\alpha : X_\alpha \rightarrow \tilde{X}$  Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigenschaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ , sodass  $f \circ \tilde{\iota}_\alpha = \iota_\alpha$ , für alle  $\alpha \in A$ .

III.1.34. BEISPIEL (Koprodukte in  $\text{Set}$ ). Sind  $X_\alpha$  Mengen, dh. Objekte von  $\text{Set}$ , dann bildet die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_\beta X_\beta$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_\beta X_\beta$  ein Koprodukt in der Kategorie  $\text{Set}$ .

III.1.35. BEISPIEL (Koprodukte in  $\text{Top}$ ). Sind  $X_\alpha$  topologische Räume, dh. Objekte von  $\text{Top}$ , so bildet die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_\beta X_\beta$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_\beta X_\beta$  ein Koprodukt in der Kategorie  $\text{Top}$ .

III.1.36. BEISPIEL (Koprodukte in  $\text{Top}_0$ ). Sind  $(X_\alpha, x_\alpha)$  punktierte Räume, dh. Objekte von  $\text{Top}_0$ , so bildet die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_\beta (X_\beta, x_\beta)$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow \bigsqcup_\beta (X_\beta, x_\beta)$  ein Koprodukt in der Kategorie  $\text{Top}_0$ .

III.1.37. BEISPIEL (Koprodukte in  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ ). Sind  $V_\alpha$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume, dh. Objekte von  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ , dann bildet  $\bigoplus_\beta V_\beta$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : V_\alpha \rightarrow \bigoplus_\beta V_\beta$  ein Koprodukt in der Kategorie  $\mathbb{K}\text{-Vsp}$ .



III.1.38. BEISPIEL (Koprodukte in aGrp). Sind  $A_\alpha$  abelsche Gruppen, dh. Objekte von aGrp, dann bildet  $\bigoplus_\beta A_\beta$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : A_\alpha \rightarrow \bigoplus_\beta A_\beta$  ein Koprodukt in der Kategorie aGrp.

III.1.39. BEISPIEL (Koprodukte in Grp). Sind  $G_\alpha$  Gruppen, dh. Objekte von Grp, so bildet  $*_\beta G_\beta$  zusammen mit den kanonischen Inklusionen  $\iota_\alpha : G_\alpha \rightarrow *_\beta G_\beta$  ein Koprodukt in der Kategorie Grp.

**III.2. Paare von Räumen und Homotopie.** Unter einem *Paar von Räumen* verstehen wir  $(X, A)$  wobei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  ein Teilraum ist. Eine *Abbildung* von Paaren von Räumen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subseteq B$ . Offensichtlich ist die identische Abbildung  $\text{id}_X : (X, A) \rightarrow (X, A)$  eine Abbildung von Paaren. Sind  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  zwei Abbildungen von Paaren, dann ist auch ihre Komposition  $g \circ f : (X, A) \rightarrow (Z, C)$  eine Abbildung von Paaren. Paare von Räumen und Abbildungen von Paaren bilden daher eine Kategorie, die Verknüpfung von Morphismen ist die übliche Komposition von Abbildungen. Wir werden diese Kategorie mit  $\text{Top}^2$  bezeichnen.

III.2.1. BEMERKUNG. Wir können einem topologischen Raum  $X$  das Paar  $(X, \emptyset)$  zuordnen. Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  liefert dann eine Abbildung von Paaren  $f : (X, \emptyset) \rightarrow (Y, \emptyset)$ . Diese Zuordnung kann als Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Top}^2$  verstanden werden.

III.2.2. BEMERKUNG. Jedem punktierten Raum  $(X, x_0)$  können wir das Paar  $(X, \{x_0\})$  zuordnen. Jede Abbildung punktierter Räume  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  liefert eine Abbildung von Paaren  $f : (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ . Diese Zuordnung kann als Funktor  $\text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}^2$  verstanden werden.

Zwei Abbildungen von Paaren  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  werden *homotop* genannt, wenn eine Abbildung  $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$  existiert, mit anderen Worten  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  und  $H(a, t) \in B$  für alle  $x \in X$ ,  $a \in A$  und  $t \in I$ . Jede solche Abbildung  $H$  wird eine *Homotopie von Paaren* von  $f$  nach  $g$  genannt. In diesem Fall schreiben wir  $f \simeq g$ .

III.2.3. LEMMA. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von Paaren  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ .*

BEWEIS. Ist  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren, dann liefert die konstante Homotopie  $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (X, A)$ ,  $H(x, t) := f(x)$ , eine Homotopie von  $f$  nach  $f$ , also ist die Relation reflexiv. Sind  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  und  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop und ist  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  eine Homotopie mit  $F_0 = f$  nach  $F_1 = g$ , dann liefert  $G : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ ,  $G(x, t) := F(x, 1 - t)$ , eine Homotopie von  $G_0 = F_1 = g$  nach  $G_1 = F_0 = f$ , also ist die Relation symmetrisch. Sind schließlich  $f, g, h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  und  $G : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  mit  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$ ,

$G_0 = g$  und  $G_1 = h$ , so liefert

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B), \quad H(x, t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t - 1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie mit  $H_0 = F_0 = f$  und  $H_1 = G_1 = h$ . Dies zeigt, dass die Relation auch transitiv ist.  $\square$

Die Äquivalenzklassen der Relation in Lemma III.2.3 werden *Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren genannt*. Wir schreiben  $[(X, A), (Y, B)]$  für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ , und  $[f] \in [(X, A), (Y, B)]$  für die von  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  repräsentierte Klasse.

III.2.4. LEMMA. *Es seien  $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $g_0, g_1 : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  und  $f_0 \simeq f_1$  sowie  $g_0 \simeq g_1$ . Dann gilt auch  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ .*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existieren Homotopien  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  und  $G : (Y \times I, B \times I) \rightarrow (Z, C)$  mit  $F_0 = f_0$ ,  $F_1 = f_1$ ,  $G_0 = g_0$  und  $G_1 = g_1$ . Für die Homotopie  $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Z, C)$ ,  $H(x, t) := G(F(x, t), t)$ , gilt dann  $H_0 = G_0 \circ F_0 = g_0 \circ f_0$  und  $H_1 = G_1 \circ F_1 = g_1 \circ f_1$ .  $\square$

Nach Lemma III.2.4 erhalten wir eine wohldefinierte Verknüpfung von Homotopieklassen durch Komposition von Repräsentanten,

$$[(X, A), (Y, B)] \times [(Y, B), (Z, C)] \rightarrow [(X, A), (Z, C)], \quad ([f], [g]) \mapsto [g \circ f]. \quad (\text{III.1})$$

Mit  $\text{hTop}^2$  bezeichnen wir die Kategorie der Paare von Räumen und Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren. Die Objekte in  $\text{hTop}^2$  sind alle Paare von Räumen, die Menge der Morphismen von  $(X, A)$  nach  $(Y, B)$  ist  $[(X, A), (Y, B)]$ . Die Verknüpfung von Morphismen ist durch (III.1) erklärt. Ist  $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  eine Abbildung von Paaren, so schreiben wir

$$g_* : [(X, A), (Y, B)] \rightarrow [(X, A), (Z, C)], \quad g_*([f]) := [g \circ f].$$

Ebenso führen wir die Notation

$$f^* : [(Y, B), (Z, C)] \rightarrow [(X, A), (Z, C)], \quad f^*([g]) := [g \circ f]$$

für eine Abbildung von Paaren  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ein.

III.2.5. BEMERKUNG. Zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  sind genau dann homotop, wenn die Abbildungen von Paaren  $f, g : (X, \emptyset) \rightarrow (Y, \emptyset)$  homotop sind, dh.  $[X, Y] = [(X, \emptyset), (Y, \emptyset)]$ .

III.2.6. BEMERKUNG. Zwei Abbildungen punktierter Räume  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  sind genau dann homotop relativ Basispunkt, wenn sie als Abbildungen von Paaren  $f, g : (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$  homotop sind, dh.  $[(X, x_0), (Y, y_0)] = [(X, \{x_0\}), (Y, \{y_0\})]$ .

**III.3. Höhere Homotopiegruppen.** Es bezeichne  $I^n := I \times \cdots \times I$  den  $n$ -dimensionalen Würfel und  $\partial I^n$  seinen Rand, dh.

$$\partial I^n = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n \mid \exists i : s_i \in \{0, 1\}\}. \quad (\text{III.2})$$

Für  $n = 0$  setzen wir  $I^0 := \{*\}$  und  $\partial I^0 = \emptyset$ . Beachte auch  $(I^1, \partial I^1) = (I, \partial I) = (I, \{0, 1\})$ . Ist  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum, dann definieren wir

$$\pi_n(X, x_0) := [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)].$$

Die Elemente in  $\pi_n(X, x_0)$  werden durch Abbildungen  $f : I^n \rightarrow X$  mit  $f(\partial I^n) \subseteq \{x_0\}$  repräsentiert. Zwei solche Abbildungen  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  repräsentieren das selbe Element in  $\pi_n(X, x_0)$ , falls eine Homotopie  $H : I^n \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$  und  $H(\partial I^n \times I) \subseteq \{x_0\}$  existiert. Wir schreiben  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$  für das von  $f(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  repräsentierte Element.

**III.3.1. BEMERKUNG.** Ordnen wir  $[f] \in \pi_0(X, x_0)$  die Wegzusammenhangskomponente die  $f(*)$  enthält zu, erhalten wir eine Bijektion zwischen  $\pi_0(X, x_0)$  und der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

**III.3.2. BEMERKUNG.** Für  $n = 1$  besteht  $[(I^1, \partial I^1), (X, x_0)]$  gerade aus den Homotopieklassen von Schleifen bei  $x_0$ . Dh.  $\pi_n(X, x_0)$  verallgemeinert die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge.

Ist  $n \geq 1$  und sind  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  so wird ihre *Konkatenation*  $fg : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  durch

$$(fg)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

definiert. Beachte, dass für  $s_1 = 1/2$  die beiden Definition übereinstimmen,  $f(1, s_2, \dots, s_n) = x_0 = g(0, s_2, \dots, s_n)$ , denn  $f$  und  $g$  bilden  $\partial I^n$  nach  $x_0$  ab. Die Stetigkeit der Konkatenation folgt aus Lemma I.1.2. Aus der Beschreibung des Randes in (III.2) sehen wir, dass  $fg$  den Rand  $\partial I^n$  tatsächlich nach  $x_0$  abbildet. Im Fall  $n = 1$  liefert diese Konstruktion gerade die Konkatenation von Wegen aus Abschnitt I.2.

**III.3.3. LEMMA.** Seien  $n \geq 1$  und  $f_0, f_1, g_0, g_1 : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $f_0 \simeq f_1$  und  $g_0 \simeq g_1$ . Dann gilt auch für die Konkatenationen  $f_0g_0 \simeq f_1g_1$ .

**BEWEIS.** Nach Voraussetzung existieren Homotopien  $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  und  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $F_0 = f_0$ ,  $F_1 = f_1$ ,  $G_0 = g_0$  und  $G_1 = g_1$ . Es ist dann  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$H(s_1, s_2, \dots, s_n, t) := \begin{cases} F(2s_1, s_2, \dots, s_n, t) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ G(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n, t) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von  $H_0 = F_0G_0 = f_0g_0$  nach  $H_1 = F_1G_1 = f_1g_1$ .  $\square$

Nach Lemma III.3.3 hängt die Homotopieklasse  $[fg] \in \pi_n(X, x_0)$  nur von den Homotopieklassen  $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$  ab, wir erhalten daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad ([f], [g]) \mapsto [f][g] := [fg]. \quad (\text{III.3})$$

Im Fall  $n = 1$  ist dies die Multiplikation der Fundamentalgruppe. Wir werden nun zeigen, dass (III.3) für jedes  $n \geq 1$  eine Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X, x_0)$  liefert.

III.3.4. LEMMA. *Es sei  $n \geq 1$  und  $\varphi : I \rightarrow I$  stetig mit  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$ . Für jedes  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  gilt dann  $f \circ (\varphi \times \text{id}_{I^{n-1}}) \simeq f$ , dh.  $[f] = [f \circ (\varphi \times \text{id}_{I^{n-1}})] \in \pi_n(X, x_0)$ .*

BEWEIS. Die Abbildung  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := ((1-t)s_1 + t\varphi(s_1), s_2, \dots, s_n)$$

ist eine Homotopie von  $H_0 = \text{id}_{I^n}$  nach  $H_1 = \varphi \times \text{id}_{I^{n-1}}$ . Daher ist  $G := f \circ H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  eine Homotopie von  $G_0 = f \circ H_0 = f$  nach  $G_1 = f \circ H_1 = f \circ (\varphi \times \text{id}_{I^{n-1}})$ .  $\square$

III.3.5. LEMMA. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum,  $n \geq 1$  und es bezeichne  $c_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  die konstante Abbildung,  $c_{x_0}(s) := x_0$ . Für jedes  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  gilt dann  $f c_{x_0} \simeq f \simeq c_{x_0} f$ , dh.  $[c_{x_0}] \in \pi_n(X, x_0)$  ist neutrales Element für die Multiplikation (III.3).*

BEWEIS. Wir betrachten  $\varphi : I \rightarrow I$ ,  $\varphi(s) = 2s$  falls  $0 \leq s \leq 1/2$  und  $\varphi(s) = 1$  falls  $1/2 \leq s \leq 1$ . Offensichtlich gilt dann  $f c_{x_0} = f \circ (\varphi \times \text{id}_{I^{n-1}})$  und daher  $f c_{x_0} \simeq f$  nach Lemma III.3.4. Analog lässt sich  $c_{x_0} f \simeq f$  zeigen.  $\square$

III.3.6. LEMMA. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 1$ . Für  $f, g, h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  gilt dann  $(fg)h \simeq f(gh)$ , dh. die Multiplikation (III.3) ist assoziativ.*

BEWEIS. Betrachte

$$\varphi : I \rightarrow I, \quad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ s + 1/4 & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ s/2 + 1/2 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung zeigt  $(fg)h = (f(gh)) \circ (\varphi \times \text{id}_{I^{n-1}})$ , also  $(fg)h \simeq f(gh)$  nach Lemma III.3.4.  $\square$

III.3.7. LEMMA. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 1$ . Für eine Abbildung  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  sei  $\bar{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  durch  $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) := f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$  definiert. Dann gilt  $\bar{f} f \simeq c_{x_0} \simeq f \bar{f}$ , dh.  $[\bar{f}] \in \pi_n(X, x_0)$  ist inverses Element von  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$  bezüglich der Multiplikation (III.3).*

BEWEIS. Die Abbildung  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq t/2, \\ f(t, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } t/2 \leq s_1 \leq 1 - t/2, \\ f(2 - 2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

ist eine Homotopie von  $H_0 = c_{x_0}$  nach  $H_1 = f\bar{f}$ , also  $c_{x_0} \simeq f\bar{f}$ . Analog lässt sich  $c_{x_0} \simeq \bar{f}f$  zeigen.  $\square$

Zusammenfassend erhalten wir

III.3.8. PROPOSITION. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 1$ . Dann definiert (III.3) eine Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X, x_0)$ . Das neutrale Element wird durch die konstante Abbildung  $c_{x_0}$  repräsentiert, das zu  $[f]$  inverse Element wird durch  $\bar{f}$  repräsentiert.*

III.3.9. DEFINITION (Höhere Homotopiegruppen). Für  $n \geq 1$  heißt  $\pi_n(X, x_0)$  die  $n$ -te Homotopiegruppe des punktierten Raums  $(X, x_0)$ . Dies verallgemeinert die Fundamentalgruppe ( $n = 1$ ).

III.3.10. PROPOSITION. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 2$ . Dann ist  $\pi_n(X, x_0)$  abelsch.*

BEWEIS. Wir betrachten zunächst die Abbildung  $\varphi : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,  $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) := (1 - s_1, 1 - s_2, s_3, \dots, s_n)$ . Eine einfache Rechnung zeigt sofort  $(f \circ \varphi)(g \circ \varphi) = (gf) \circ \varphi$ , für alle  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Sei nun  $\rho : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (D^2, \partial D^2)$  ein Homöomorphismus mit  $\rho(1 - s_1, 1 - s_2) = -\rho(s_1, s_2)$ . Etwa können wir

$$\rho(s_1, s_2) := \frac{2 \max\{|s_1 - 1/2|, |s_2 - 1/2|\}}{\sqrt{(s_1 - 1/2)^2 + (s_2 - 1/2)^2}} ((s_1 - 1/2) + \mathbf{i}(s_2 - 1/2))$$

verwenden. Es ist dann  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := (\rho^{-1}(e^{i\pi t} \rho(s_1, s_2)), s_3, \dots, s_n)$$

eine Homotopie von  $H_0 = \text{id}_{I^n}$  nach  $H_1 = \varphi$ . Aus Lemma III.2.4 folgt  $f \simeq f \circ \varphi$ , dh.  $[f] = [f \circ \varphi] \in \pi_n(X, x_0)$ . Es gilt daher  $[f][g] = [f \circ \varphi][g \circ \varphi] = [(f \circ \varphi)(g \circ \varphi)] = [(gf) \circ \varphi] = [gf] = [g][f]$ , also ist  $\pi_n(X, x_0)$  abelsch.  $\square$

III.3.11. BEMERKUNG. Auf Grund von Proposition III.3.10 notieren wir die Gruppenstruktur in  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 2$ , von nun an additiv, dh.  $[f] + [g] = [fg]$ ,  $0 = [c_{x_0}]$  und  $-[f] = [\bar{f}]$ .

III.3.12. BEMERKUNG. I.A. ist es nicht möglich auf  $\pi_0(X, x_0)$  in natürlicher Weise eine Gruppenstruktur zu definieren. Jedoch repräsentiert die konstante Abbildung  $c_{x_0} : (I^0, \partial I^0) \rightarrow (X, x_0)$  ein ausgezeichnetes Element in  $\pi_0(X, x_0)$ . Dieses entspricht der den Basispunkt  $x_0$  enthaltenden Wegzusammenhangskomponente von  $X$  vgl. Bemerkung III.3.1. Wir können  $\pi_0(X, x_0)$  daher als punktierte Menge auffassen, siehe Beispiel III.1.4. Wir schreiben  $\pi_0(X, x_0) = 0$  falls  $\pi_0(X, x_0)$  nur

dieses eine Element besitzt. Dies ist genau dann der Fall wenn  $X$  wegzusammenhängend ist.

III.3.13. LEMMA. Ist  $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Abbildung punktierter Räume so definiert  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ ,  $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$ , einen Gruppenhomomorphismus falls  $n \geq 1$ , bzw. eine Abbildung punktierter Mengen im Fall  $n = 0$ . Sind  $\varphi_0, \varphi_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  homotop relativ Basispunkt, dann gilt  $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$ . Ist  $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann gilt  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ , sowie  $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ .

BEWEIS. Dies ist trivial, siehe Lemma III.2.4.  $\square$

III.3.14. BEMERKUNG. Die Homotopiegruppen liefern daher Funktoren  $\pi_0 : \text{hTop}_0 \rightarrow \text{Set}_0$ ,  $\pi_1 : \text{hTop}_0 \rightarrow \text{Grp}$  und  $\pi_n : \text{hTop}_0 \rightarrow \text{aGrp}$  falls  $n \geq 2$ .

III.3.15. PROPOSITION. Ist  $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume, dann ist  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  ein Isomorphismus.<sup>26</sup>

BEWEIS. Als Homotopieäquivalenz ist  $\varphi$  ein Isomorphismus in der Kategorie  $\text{hTop}_0$ , vgl. Beispiel III.1.11. Da jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet, siehe Bemerkung III.1.14, muss  $\varphi_*$  ein Isomorphismus sein.  $\square$

III.3.16. BEISPIEL. Ist  $X$  eine sternförmige Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  und  $x_0 \in X$  ein Zentrum, dann gilt  $\pi_n(X, x_0) = 0$ , für alle  $n \geq 0$ . Dies folgt aus Proposition III.3.15 denn  $(X, x_0)$  ist homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum, dh.  $(X, x_0) \simeq (\{x_0\}, x_0)$ .

III.3.17. BEMERKUNG. Es sei  $\omega : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$  ein Homöomorphismus von Paaren. Wir erhalten eine Bijektion

$$[(D^n, S^{n-1}), (X, x_0)] \cong \pi_n(X, x_0), \quad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Elemente der Homotopiegruppe  $\pi_n(X, x_0)$  können daher auch als Homotopieklassen von Abbildungen  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  aufgefasst werden.

III.3.18. BEMERKUNG. Es sei  $\omega : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$  eine stetige Abbildung die einen Homöomorphismus punktierter Räume  $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$  induziert. Dann erhalten wir eine Bijektion

$$[(S^n, s_0), (X, x_0)] \cong \pi_n(X, x_0), \quad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Wir können die Elemente der Homotopiegruppe  $\pi_n(X, x_0)$  daher auch als Homotopieklassen von Abbildungen  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  interpretieren.

III.3.19. SATZ. Es sei  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine punktierte Überlagerung und  $n \geq 2$ . Dann ist der induzierte Homomorphismus  $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  ein Isomorphismus.

<sup>26</sup>Im Fall  $n = 0$  ist ein Isomorphismus punktierter Mengen gemeint, dh. eine Basispunkt erhaltende Bijektion, vgl. Beispiel III.1.4. Für  $n \geq 1$  ist natürlich ein Isomorphismus von Gruppen gemeint.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass  $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  surjektiv ist. Sei dazu  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Aus der Homotopieliftungseigenschaft von Überlagerungen, siehe Satz II.3.3, erhalten wir eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : I^n \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{f} = f$  und  $\tilde{f}(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = \tilde{x}_0$ , für alle  $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in I^{n-1}$ . Wegen  $p \circ \tilde{f} = f$  ist die Einschränkung  $\tilde{f}|_{\partial I^n} : \partial I^n \rightarrow \tilde{X}$  ein Lift der konstanten Abbildung  $c_{x_0} : \partial I^n \rightarrow X$ . Da  $n \geq 2$  ist  $\partial I^n$  zusammenhängend. Aus Proposition II.3.1 folgt daher  $\tilde{f}(\partial I^n) = \{\tilde{x}_0\}$ . Also definiert  $\tilde{f}$  ein Element  $[\tilde{f}] \in \pi_n(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0)$  für das offensichtlich  $p_*([\tilde{f}]) = [f]$  gilt. Nun zur Injektivität von  $p_*$ . Sei also  $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  mit  $p_*([\tilde{f}]) = 0$ . Dann existiert eine Homotopie  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $H_0 = p \circ \tilde{f}$  und  $H_1 = c_{x_0}$ . Aus Satz II.3.3 erhalten wir eine Homotopie  $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ . Die Einschränkung  $\tilde{H}|_{\partial I^n \times I} : \partial I^n \times I \rightarrow \tilde{X}$  ist ein Lift der konstanten Abbildung  $c_{x_0} : \partial I^n \times I \rightarrow X$ . Da  $n \geq 2$  ist  $\partial I^n \times I$  zusammenhängend, aus Proposition II.3.1 folgt daher  $\tilde{H}(\partial I^n \times I) = \{\tilde{x}_0\}$ , denn  $\tilde{H}_0(\partial I^n) = \tilde{f}(\partial I^n) = \{\tilde{x}_0\}$ . Also definiert  $\tilde{H}$  eine Homotopie  $\tilde{H} : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Wegen  $p \circ \tilde{H} = H$  ist  $\tilde{H}_1$  ein Lift der konstanten Abbildung  $H_1 = c_{x_0} : I^n \rightarrow X$ . Da  $\tilde{H}_1|_{\partial I^n} = c_{\tilde{x}_0} : \partial I^n \rightarrow \tilde{X}$  muss  $\tilde{H}_1 = c_{\tilde{x}_0}$  gelten, siehe Proposition II.3.1. Also ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $\tilde{f}$  nach  $c_{\tilde{x}_0}$ , und es gilt daher  $[\tilde{f}] = 0 \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Damit ist auch die Injektivität von  $p_*$  gezeigt.  $\square$

III.3.20. BEISPIEL. Betrachte die Überlagerung  $p : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S^1, 1)$ ,  $p(t) := e^{2\pi it}$ . Nach Beispiel III.3.16 gilt  $\pi_n(\mathbb{R}, 0) = 0$ , für alle  $n \geq 0$ . Aus Satz III.3.19 erhalten wir  $\pi_n(S^1, 1) = 0$ , für  $n \geq 2$ .

III.3.21. BEISPIEL. Betrachte die Überlagerung  $p : (S^k, s_0) \rightarrow (\mathbb{R}P^k, x_0)$ . Nach Satz III.3.19 induziert  $p$  Isomorphismen  $\pi_n(S^k, s_0) \cong \pi_n(\mathbb{R}P^k, x_0)$ , für  $n \geq 2$ .

III.3.22. BEISPIEL. Es bezeichne  $L$  eine Linsenraum und  $p : (S^{2k-1}, s_0) \rightarrow (L, x_0)$  die entsprechende Überlagerung, siehe Beispiel II.2.8. Nach Satz III.3.19 induziert  $p$  Isomorphismen  $\pi_n(S^{2k-1}, s_0) \cong \pi_n(L, x_0)$ , für  $n \geq 2$ .

III.3.23. BEISPIEL. Betrachte die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche  $p : (\mathbb{R}^2, \tilde{x}_0) \rightarrow (K, x_0)$  aus Beispiel II.6.3. Nach Beispiel III.3.16 gilt  $\pi_n(\mathbb{R}^2, x_0) = 0$ ,  $n \geq 0$ . Aus Satz III.3.19 folgt daher  $\pi_n(K, x_0) = 0$ , für  $n \geq 2$ .

III.3.24. BEISPIEL. Betrachte die universelle Überlagerung der orthogonalen Gruppe  $p : (S^3, s_0) \rightarrow (\text{SO}_3, x_0)$  aus Beispiel II.6.3. Nach Satz III.3.19 induziert  $p$  Isomorphismen  $\pi_n(S^3, s_0) \cong \pi_n(\text{SO}_3, x_0)$ , für  $n \geq 2$ .

Wir wenden uns nun den Homotopiegruppen von Produkträumen zu. Seien also  $(X_\alpha, x_\alpha)$  punktierte Räume,  $\alpha \in A$ . Verwenden wir die von den kanonische Projektionen  $p_\alpha : \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  induzierten Homomorphismen  $(p_\alpha)_* : \pi_n(\prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta)) \rightarrow \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$  als Komponenten erhalten wir einen

eine Abbildung

$$((p_\alpha)_*)_{\alpha \in A} : \pi_n \left( \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta) \right) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha). \quad (\text{III.4})$$

III.3.25. PROPOSITION. *Die Abbildung (III.4) ist ein Isomorphismus.*<sup>27</sup>

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Surjektivität der Abbildung (III.4). Sei dazu  $([f_\alpha])_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$ , wobei  $f_\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ . Verwenden wir die  $f_\beta$  als Komponenten erhalten wir  $(f_\beta)_{\beta \in A} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta)$  und damit ein Element  $f := [(f_\beta)_{\beta \in A}] \in \pi_n(\prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta))$ . Offensichtlich gilt  $(p_\alpha)_*(f) = [f_\alpha]$ , also wird  $g$  durch (III.4) auf  $([f_\alpha])_{\alpha \in A}$  abgebildet. Nun zur Injektivität. Seien dazu  $[f], [g] \in \pi_n(\prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta))$ , wobei  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta)$ . Wir bezeichnen die Komponenten mit  $f_\alpha := p_\alpha \circ f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  und  $g_\alpha := p_\alpha \circ g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ . Werden  $[f]$  und  $[g]$  durch (III.4) auf das selbe Element abgebildet, dann gilt  $[f_\alpha] = [g_\alpha] \in \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$  für alle  $\alpha \in A$ . Es existieren daher Homotopien  $H^\alpha : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  mit  $H_0^\alpha = f_\alpha$  und  $H_1^\alpha = g_\alpha$ . Verwenden wir die  $H^\alpha$  als Komponenten erhalten wir eine Homotopie  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$ . Also ist  $[f] = [g] \in \pi_n(\prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta))$  und (III.4) daher injektiv.  $\square$

III.3.26. BEMERKUNG. Die letzte Proposition besagt, dass der Funktor  $\pi_n$  Produkte erhält. Das Produkt  $p_\alpha : \prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  in  $\text{Top}_0$  wird unter  $\pi_n$  auf  $(p_\alpha)_* : \pi_n(\prod_{\beta \in A} (X_\beta, x_\beta)) \rightarrow \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$  abgebildet, und dies ist nach Proposition III.3.25 ein Produkt in der Kategorie  $\text{Set}_0$  ( $n = 0$ ),  $\text{Grp}$  ( $n = 1$ ) bzw.  $\text{aGrp}$  ( $n \geq 2$ ).

III.3.27. BEISPIEL. Für den Torus  $T^k = S^1 \times \dots \times S^1$  gilt  $\pi_n(T^k, x_0) = 0$ , falls  $n \geq 2$ . Dies folgt aus Proposition III.3.25 und Beispiel III.3.20.

III.3.28. BEISPIEL. Betrachten wir die Überlagerung  $p : (S^3 \times S^3, (s_0, s_1)) \rightarrow (\text{SO}_4, x_0)$  aus Beispiel II.6.3 dann liefert Satz III.3.19  $\pi_n(S^3 \times S^3, (s_0, s_1)) \cong \pi_n(\text{SO}_4, x_0)$ , falls  $n \geq 2$ . Mittels Proposition III.3.25 folgt nun  $\pi_n(\text{SO}_4, x_0) \cong \pi_n(S^3, s_0) \times \pi_n(S^3, s_1)$ , für  $n \geq 2$ .

**III.4. Basispunkte.** Wir wollen nun untersuchen inwiefern die höheren Homotopiegruppen vom Basispunkt abhängen. Wir betrachten dazu den Homöomorphismus  $\rho : (I^n, \partial I^n) \rightarrow ([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \partial[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n)$ ,  $\rho(s) := \frac{1}{2}(s - M) + M$ , wobei  $M := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  den Mittelpunkt von  $I^n$  bezeichnet. Weiters sei  $p : I^n \setminus \{M\} \rightarrow \partial I^n$  die radiale Projektion, dh. der Strahl von  $M$  durch  $x \in I^n \setminus \{M\}$  schneidet  $\partial I^n$  im Punkt  $p(x)$ . Eine explizite Formel dafür ist  $p(s) = \frac{1}{2\|s-M\|_\infty}(s - M) + M$ , wobei  $\|(s_1, \dots, s_n)\|_\infty := \max\{|s_1|, \dots, |s_n|\}$  die Maximumsnorm bezeichnet. Schließlich sei  $q : I^n \setminus \{M\} \rightarrow \partial[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n$  die radiale Projektion, dh.  $q(s) := \frac{1}{4\|s-M\|_\infty}(s - M) + M$ .

<sup>27</sup>Ein Isomorphismus von Gruppen für  $n \geq 1$ , bzw. ein Isomorphismus punktierter Mengen im Fall  $n = 0$ .



Ist nun  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg von  $\gamma(0) = x_0$  nach  $\gamma(1) = x_1$  und  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  dann definieren wir  $b_\gamma(f) : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  durch

$$b_\gamma(f)(s) := \begin{cases} f(\rho^{-1}(s)) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ \gamma(2 - 4\|s - M\|_\infty) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

III.4.1. LEMMA. *Es seien  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$  Wege von  $x_0$  nach  $x_1$  und  $f, f_0, f_1, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ . Dann gilt:*

- (i) *Gilt  $f_0 \simeq f_1$  dann auch  $b_\gamma(f_0) \simeq b_\gamma(f_1)$ .*
- (ii) *Gilt  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$  (relativ Endpunkten) dann auch  $b_{\gamma_0}(f) \simeq b_{\gamma_1}(f)$ .*
- (iii) *Ist  $x_0 = x_1$  und  $\gamma = c_{x_0}$  dann gilt  $b_{c_{x_0}}(f) \simeq f$ .*
- (iv) *Ist  $\tau : I \rightarrow X$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_2$  dann gilt  $b_\gamma(b_\tau(f)) \simeq b_{\gamma\tau}(f)$ .*
- (v)  *$b_\gamma(fg) \simeq b_\gamma(f)b_\gamma(g)$ .*

BEWEIS. Ad (i): Sei also  $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_1)$  eine Homotopie von  $F_0 = f_0$  nach  $F_1 = f_1$ . Dann definiert  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$H(s, t) := \begin{cases} F(\rho^{-1}(s), t) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ \gamma(2 - 4\|s - M\|_\infty) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n \end{cases}$$

eine Homotopie von  $H_0 = b_\gamma(f_0)$  nach  $H_1 = b_\gamma(f_1)$ . Ad (ii): Sei also  $H : I \times I \rightarrow X$  eine Homotopie relativ Endpunkten von  $H_0 = \gamma_0$  nach  $H_1 = \gamma_1$ . Dann definiert  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$G(s, t) := \begin{cases} f(\rho^{-1}(s)) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ H(2 - 4\|s - M\|_\infty, t) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

eine Homotopie von  $G_0 = b_{\gamma_0}(f)$  nach  $G_1 = b_{\gamma_1}(f)$ . Ad (iii): Betrachte die Homotopie  $R : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,

$$R(s, t) := \begin{cases} M + \frac{2}{2-t}(s - M) & \text{falls } s \in [\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}]^n, \\ p(s) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}]^n, \end{cases}$$

von  $R_0 = \text{id}_{I^n}$  nach

$$R_1 : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n), \quad R_1(s) = \begin{cases} \rho^{-1}(s) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ p(s) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

Die Komposition  $f \circ R$  liefert dann eine Homotopie von  $f \circ R_0 = f$  nach  $f \circ R_1 = b_{c_{x_0}}(f)$ . Ad (iv): Betrachte die Abbildung  $\varphi : I \rightarrow I$ ,

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ s + \frac{1}{4} & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ s/2 + 1/2 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

und definiere eine Homotopie  $Q : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,

$$Q(s, t) := \left( t\varphi(2\|s - M\|_\infty) + (1 - t) \right) (s - M) + M,$$

von  $Q_0 = \text{id}_{I^n}$  nach  $Q_1 : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ,

$$Q_1(s) = \begin{cases} 4\|s - M\|_\infty(s - M) + M & \text{falls } \|s - M\|_\infty \leq 1/8, \\ (2\|s - M\|_\infty + \frac{1}{4})(s - M) + M & \text{falls } 1/8 \leq \|s - M\|_\infty \leq 1/4, \\ (\|s - M\|_\infty + \frac{1}{2})(s - M) + M & \text{falls } 1/4 \leq \|s - M\|_\infty \leq 1/2. \end{cases}$$

Es ist nun  $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q$  eine Homotopie von  $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q_0 = b_{\gamma\tau}(f)$  nach  $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q_1 = b_\gamma(b_\tau(f))$ . Ad (v): Betrachte die Homotopie  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := \begin{cases} (b_\gamma(f c_{x_1}))((2 - t)s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{für } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ (b_\gamma(c_{x_1} g))((2 - t)s_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{für } 1/2 \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie von  $H_0 = (b_\gamma(f c_{x_1}))(b_\gamma(c_{x_1} g))$  nach  $H_1 = b_\gamma(fg)$ . Zusammen mit (i) folgt  $b_\gamma(fg) = H_1 \simeq H_0 = (b_\gamma(f c_{x_1}))(b_\gamma(c_{x_1} g)) \simeq b_\gamma(f)b_\gamma(g)$ .  $\square$

III.4.2. PROPOSITION. *Es sei  $\gamma : I \rightarrow X$  ein Weg von  $\gamma(0) = x_0$  nach  $\gamma(1) = x_1$  und  $n \geq 1$ . Dann ist*

$$\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \quad \beta_\gamma([f]) := [b_\gamma(f)]$$

*ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus, der nur von der Homotopieklasse relativ Endpunkten des Weges  $\gamma$  abhängt. Seine Inverse ist durch  $(\beta_\gamma)^{-1} = \beta_{\bar{\gamma}}$  gegeben, wobei  $\bar{\gamma}(s) := \gamma(1 - s)$ . Ist  $\tau : I \rightarrow X$  ein weiterer Weg von  $\tau(0) = x_1$  nach  $\tau(1) = x_2$  dann gilt  $\beta_\gamma \circ \beta_\tau = \beta_{\gamma\tau}$ .*

BEWEIS.  $\beta_\gamma$  ist wohldefiniert nach Lemma III.4.1(i) und hängt wegen Lemma III.4.1(ii) nur von der Homotopieklasse  $[\gamma]$  ab. Nach Lemma III.4.1(v) liegt tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus vor. Aus Lemma III.4.1(iv) erhalten wir sofort  $\beta_\gamma \circ \beta_\tau = \beta_{\gamma\tau}$ . Da  $\gamma\bar{\gamma} \simeq c_{x_0}$  folgt nun  $\beta_\gamma \circ \beta_{\bar{\gamma}} = \beta_{\gamma\bar{\gamma}} = \beta_{c_{x_0}} = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ , wobei wir im letzten Gleichheitszeichen Lemma III.4.1(iii) verwendet haben. Analog lässt sich  $\beta_{\bar{\gamma}} \circ \beta_\gamma = \text{id}_{\pi_n(X, x_1)}$  zeigen. Also ist  $\beta_\gamma$  tatsächlich ein Isomorphismus mit Inverser  $\beta_{\bar{\gamma}}$ .  $\square$

III.4.3. BEMERKUNG. Ist  $X$  ein wegzusammenhängender Raum und  $x_0, x_1 \in X$ , dann sind die Gruppen  $\pi_n(X, x_0)$  und  $\pi_n(X, x_1)$  isomorph, wir schreiben in diesem Fall oft nur  $\pi_n(X)$ . Beachte jedoch, dass der in Proposition III.4.2 konstruierte Isomorphismus  $\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_0)$  von der Wahl einer Homotopieklasse  $[\gamma]$  von Wegen von  $x_0$  nach  $x_1$  abhängt, und daher nicht natürlich ist.

III.4.4. DEFINITION (*n*-facher Zusammenhang). Es sei  $n \geq 0$ . Ein topologischer Raum  $X$  heißt *n-zusammenhängend* falls  $\pi_k(X, x_0) = 0$ , für alle  $0 \leq k \leq n$  und alle Basispunkte  $x_0 \in X$ .

III.4.5. BEMERKUNG. Ist  $X$  wegzusammenhängend und gilt  $\pi_k(X, x_0) = 0$  für alle  $0 \leq k \leq n$  und einen Basispunkt  $x_0 \in X$ , dann ist  $X$  schon  $n$ -zusammenhängend. Dies folgt aus Proposition III.4.2.

III.4.6. BEMERKUNG. Ein Raum ist genau dann 0-zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist. Ein Raum ist genau dann 1-zusammenhängend, wenn er einfach zusammenhängend ist.

III.4.7. PROPOSITION. *Es sei  $H : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie und  $x_0 \in X$ . Setze  $\varphi := H_0 : X \rightarrow Y$ ,  $\psi := H_1 : X \rightarrow Y$  und  $\gamma : I \rightarrow Y$ ,  $\gamma(t) := H(x_0, t)$ . Für  $n \geq 1$  gilt dann  $\beta_\gamma \circ \psi_* = \varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ .*

BEWEIS. Es sei also  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  und betrachte die Homotopie  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, \varphi(x_0))$ ,

$$G(s, t) := \begin{cases} H(f(\rho^{-1}(s)), t) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ H((x_0, t(2 - 4\|s - M\|_\infty))) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie von  $G_0 = b_{c_{\varphi(x_0)}}(\varphi \circ f)$  nach  $G_1 = b_\gamma(\psi \circ f)$ . Es folgt  $\beta_\gamma(\psi_*([f])) = [b_\gamma(\psi \circ f)] = [G_1] = [G_0] = [b_{c_{\varphi(x_0)}}(\varphi \circ f)] = [\varphi \circ f] = \varphi_*([f])$ .  $\square$

III.4.8. PROPOSITION. *Es sei  $\varphi : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz und  $x_0 \in X$ . Dann ist  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$  ein Isomorphismus,  $n \geq 0$ .*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung  $\psi : Y \rightarrow X$ , sowie Homotopien  $H : X \times I \rightarrow X$  und  $G : Y \times I \rightarrow Y$ , sodass  $H_0 = \psi \circ \varphi$ ,  $H_1 = \text{id}_X$ ,  $G_0 = \varphi \circ \psi$  und  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ . Nach Proposition III.4.7 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_n(Y, \varphi(x_0)) & \xrightarrow{(\text{id}_Y)_*} & \pi_n(Y, \varphi(x_0)) \\ \text{id}_X)_* \Big\downarrow \text{PPPPPPPPPP} & & \Big\downarrow \text{PPPPPPPPPP} & & \Big\downarrow \text{PPPPPPPPPP} \\ \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\beta_\gamma} & \pi_n(X, \psi(\varphi(x_0))) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_n(Y, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))) \end{array}$$

wobei  $\gamma : I \rightarrow X$ ,  $\gamma(t) := H(x_0, t)$ , und  $\sigma : I \rightarrow Y$ ,  $\sigma(t) := G(\varphi(x_0), t)$ . Nach Proposition III.4.2 sind  $\beta_\gamma$  und  $\beta_\sigma$  Isomorphismen, also sind auch  $(\varphi \circ \psi)_*$  und  $(\psi \circ \varphi)_*$  Isomorphismen. Mit  $(\varphi \circ \psi)_*$  muss auch  $\psi_*$  injektiv sein, und da  $(\psi \circ \varphi)_*$  surjektiv ist gilt dies auch für  $\psi_*$ . Wir sehen daher, dass  $\psi_*$  ein Isomorphismus ist. Also muss auch  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$  ein Isomorphismus sein.  $\square$

III.4.9. BEMERKUNG. Homotopieäquivalente wegzusammenhängende Räume haben isomorphe Homotopiegruppen. Genauer, ist  $X \simeq Y$ ,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  und  $n \geq 0$ , dann gilt  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ . Dies folgt aus Proposition III.4.8 und Proposition III.4.2.

III.4.10. PROPOSITION. *Ist  $X$  ein kontrahierbarer Raum und  $x_0 \in X$ , dann gilt  $\pi_n(X, x_0) = 0$ ,  $n \geq 0$ .*

BEWEIS. Dies folgt aus Proposition III.4.8, denn die kanonische Inklusion  $\{x_0\} \rightarrow X$  ist eine Homotopieäquivalenz.  $\square$

III.4.11. PROPOSITION. *Ist  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 1$ , dann definiert  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0))$ ,  $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$ , einen Gruppenhomomorphismus.*<sup>28</sup>

BEWEIS. Dies folgt aus Proposition III.4.2.  $\square$

Es sei  $R$  ein Ring mit Eins. Unter einem  $R$ -Modul verstehen wir eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einer Skalarmultiplikation  $R \times M \rightarrow M$ ,  $(r, m) \mapsto rm$ , die folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ ,  $r \in R$ ,  $m_1, m_2 \in M$ .
- (ii)  $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$ ,  $r_1, r_2 \in R$ ,  $m \in M$ .
- (iii)  $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ ,  $r_1, r_2 \in R$ ,  $m \in M$ .
- (iv)  $1m = m$ ,  $m \in M$ .

Beachte, dass ein  $R$ -Modul nichts anderes als eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einem Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{End}(M)$  ist.<sup>29</sup> Unter einem  $R$ -Modulhomomorphismus von einem  $R$ -Modul  $M_1$  in einen  $R$ -Modul  $M_2$  verstehen wir einen Homomorphismus von Gruppen  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  für den  $\varphi(rm) = r\varphi(m)$  gilt,  $r \in R$ ,  $m \in M_1$ . Die  $R$ -Moduln und  $R$ -Modulhomomorphismen bilden offensichtlich eine Kategorie die wir mit  $R\text{-Mod}$  bezeichnen. Ist  $R$  ein Ring mit Eins, dann bezeichnen wir mit  $R^\times := \{r \in R \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$  die Gruppe der Einheiten von  $R$ . Die Gruppenstruktur ist dabei durch die Einschränkung der Multiplikation in  $R$  gegeben. Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, dann liefert die Einschränkung der Skalarmultiplikation einen Homomorphismus  $R^\times \rightarrow \text{Aut}(M)$ .<sup>30</sup> Sei nun  $\Gamma$  eine Gruppe. Betrachte die abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}[\Gamma] := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{Z}$ . Elemente in  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  können wir als endliche formale Linearkombinationen  $n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma_i \in \Gamma$ , darstellen, oder als Funktionen  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  auffassen, die nur bei endlich vielen Elementen von  $\Gamma$  ungleich 0 sind. Die Multiplikation  $(\sum_i n_i\gamma_i)(\sum_j m_j\sigma_j) := \sum_{i,j} n_i m_j (\gamma_i\sigma_j)$  macht  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  zu einem Ring, dem sogenannten *Gruppenring* von  $\Gamma$ . Beachte, dass  $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}[\Gamma]^\times$ . Die Gruppe  $\Gamma$  ist genau dann abelsch, wenn der Ring  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  kommutativ ist. Der Gruppenring hat folgende universelle Eigenschaft. Ist  $R$  ein weiterer Ring und  $\varphi : \Gamma \rightarrow R^\times$  ein Gruppenhomomorphismus, dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}[\Gamma] \rightarrow R$ , sodass  $\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ , für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Dieser Ringhomomorphismus ist durch  $\tilde{\varphi}(\sum_i n_i\gamma_i) = \sum_i n_i\varphi(\gamma_i)$  gegeben. Wir erhalten aus diesen Betrachtungen nun folgenden nützliche Tatsache. Ist  $\Gamma$  eine Gruppe,  $M$  eine abelsche Gruppe und  $\varphi : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(M)$  ein Gruppenhomomorphismus, dann existiert eine eindeutige  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -Modulstruktur auf  $M$ ,

<sup>28</sup>Für eine Gruppe  $G$  bezeichnet  $\text{Aut}(G)$  die Gruppe der Gruppenautomorphismen.

<sup>29</sup>Ist  $M$  eine abelsche Gruppe, dann bezeichnet  $\text{End}(M)$  die Menge der Gruppenhomomorphismen  $M \rightarrow M$ . Dies ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Komposition von Homomorphismen.

<sup>30</sup>Ist  $M$  eine abelsche Gruppe dann bezeichnet  $\text{Aut}(M)$  die Gruppe der Gruppenautomorphismen von  $M$ . Beachte  $\text{Aut}(M) = \text{End}(M)^\times$ .

sodass  $\gamma m = \varphi(\gamma)(m)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $m \in M$ . Nach Obigem existiert nämlich genau ein Ringhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}[\Gamma] \rightarrow \text{End}(M)$  mit  $\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ , und dieser macht  $M$  zu einem  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -Modul. Eine explizitere Formel für die Skalarmultiplikation ist  $(\sum_i n_i \gamma_i)m = \sum_i n_i(\varphi(\gamma_i)(m))$ . Aus Proposition III.4.11 erhalten wir daher folgende

III.4.12. PROPOSITION. *Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $n \geq 2$ . Dann ist  $\pi_n(X, x_0)$  in natürlicher Weise ein  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -Modul.*

III.4.13. PROPOSITION. *Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \geq 0$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $\pi_n(X, x_0) = 0$  für alle  $x_0 \in X$ .
- (ii) Jede stetige Abbildung  $S^n \rightarrow X$  ist nullhomotop.
- (iii) Jede stetige Abbildung  $f : S^n \rightarrow X$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow X$  fortsetzen, dh.  $\tilde{f} \circ \iota = f$  wobei  $\iota : S^n \rightarrow D^{n+1}$  die kanonische Inklusion bezeichnet.

BEWEIS. Ad (iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei also  $f : S^n \rightarrow X$ , und  $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow X$  mit  $\tilde{f} \circ \iota = f$ . Dann liefert  $H : S^n \times I \rightarrow X$ ,  $H(x, t) := \tilde{f}(tx)$ , eine Homotopie von der konstanten Abbildung  $H_0 = c_{\tilde{f}(0)}$  nach  $H_1 = \tilde{f} \circ \iota = f$ . Ad (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei nun  $f : S^n \rightarrow X$  und  $H : S^n \times I \rightarrow X$  eine Homotopie von einer konstanten Abbildung  $H_0 = c_{x_0}$  nach  $H_1 = f$ . Die Abbildung  $\varphi : S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$ ,  $\varphi(x, t) := tx$ , induziert einen Homöomorphismus  $(S^n \times I)/(S^n \times \{0\}) \rightarrow D^{n+1}$ , also existiert eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow X$  mit  $\tilde{f} \circ \varphi = H$ . Es folgt  $(\tilde{f} \circ \iota)(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\varphi(x, 1)) = H(x, 1) = f(x)$ , also ist  $\tilde{f}$  die gesuchte stetige Fortsetzung. Ad (i) $\Rightarrow$ (ii): Dies folgt aus  $\pi_n(X, x_0) \cong [(S^n, s_0), (X, x_0)]$ , siehe Bemerkung III.3.18. Ad (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ . Nach Voraussetzung existiert  $x_1 \in X$  und eine Homotopie  $H : S^n \times I \rightarrow X$  von  $H_0 = f$  nach  $H_1 = c_{x_1}$ . Betrachte den Weg  $\gamma : I \rightarrow X$ ,  $\gamma(t) := H(s_0, t)$ . Nach Proposition III.4.7 gilt  $f_* = \beta_\gamma \circ (c_{x_1})_* : \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ , wobei  $c_{x_1} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_1)$  die konstante Abbildung bezeichnet. Da  $(c_{x_1})_* = 0$  und weil  $\beta_\gamma$  ein Isomorphismus ist, folgt  $0 = f_* : \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ . Nach Bemerkung III.3.18 gilt daher auch  $0 = f_* : [(S^n, s_0), (S^n, s_0)] \rightarrow [(S^n, s_0), (X, x_0)]$ . Wenden wir diese Gleichung auf  $[\text{id}_{S^n}] \in [(S^n, s_0), (S^n, s_0)]$  an, so erhalten wir  $0 = [f] = f_*([\text{id}_{S^n}]) \in [(S^n, s_0), (X, x_0)]$ . Es folgt daher  $0 = [(S^n, s_0), (X, x_0)] \cong \pi_n(X, x_0)$ .  $\square$

**III.5. Relative Homotopiegruppen.** Unter einem *Tripel von Räumen* verstehen wir  $(X, A, B)$  wobei  $X$  ein topologischer Raum ist und  $B \subseteq A \subseteq X$ . Eine Abbildung zwischen Tripel von Räumen  $f : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , sodass  $f(A_1) \subseteq A_2$  und  $f(B_1) \subseteq B_2$ . Offensichtlich ist die Komposition von Abbildungen zwischen Tripel wieder eine Abbildung von Tripel. Tripel von Räumen und Abbildungen zwischen solchen Tripel bilden daher eine Kategorie die wir mit  $\text{Top}^3$  bezeichnen.

Zwei Abbildungen von Tripel  $f, g : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  werden *homotop* genannt, falls eine Homotopie  $H : (X_1 \times I, A_1 \times I, B_1 \times I) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$  existiert. Wir schreiben in diesem Fall  $f \simeq g$ . Beachte, dass  $H_t : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  eine Abbildungen zwischen Tripel ist, für jedes  $t \in I$ . Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von Tripel  $(X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$ , vgl. Lemma III.2.3. Die Äquivalenzklassen werden *Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Tripel* genannt. Wir bezeichnen die Menge dieser Homotopieklassen mit  $[(X_1, A_1, B_1), (X_2, A_2, B_2)]$ , und schreiben  $[f]$  für die von  $f : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  repräsentierte Klasse.

Sind  $f_0 \simeq f_1 : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$  und  $g_0 \simeq g_1 : (X_2, A_2, B_2) \rightarrow (X_3, A_3, B_3)$  dann sind auch ihre Kompositionen homotop,  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_3, A_3, B_3)$ , vgl. Lemma III.2.4. Wir erhalten daher eine wohldefinierte Verknüpfung von Homotopieklassen

$$\begin{aligned} [(X_1, A_1, B_1), (X_2, A_2, B_2)] \times [(X_2, A_2, B_2), (X_3, A_3, B_3)] \\ \rightarrow [(X_1, A_1, B_1), (X_3, A_3, B_3)], \quad (\text{III.5}) \end{aligned}$$

$([f], [g]) \mapsto [g \circ f]$ . Wir bezeichnen mit  $\text{hTop}^3$  die Kategorie der Tripel von Räumen und Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Tripel. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch (III.5) gegeben.

Unter einem punktierten Paar von Räumen verstehen wir  $(X, A, x_0)$  wobei  $X$  ein topologischer Raum ist und  $x_0 \in A \subseteq X$ . Eine Abbildung punktierter Paare  $f : (X_1, A_1, x_1) \rightarrow (X_2, A_2, x_2)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X_1 \rightarrow X_2$  mit  $f(A_1) \subseteq A_2$  und  $f(x_1) = x_2$ . Da die Komposition von Abbildungen punktierter Paare wieder eine Abbildung punktierter Paare ist erhalten wir eine Kategorie der punktierten Paare und Abbildungen zwischen punktierten Paaren. Wir werden diese Kategorie mit  $\text{Top}_0^2$  bezeichnen. Ebenso erhalten wir eine Kategorie  $\text{hTop}_0^2$  von punktierten Paaren und Homotopieklassen von Abbildungen zwischen punktierten Paaren. Beachte, dass jedes punktierte Paar von Räumen  $(X, A, x_0)$  auch als Tripel von Räumen  $(X, A, \{x_0\})$  aufgefasst werden kann. Die Abbildungen von punktierten Paaren  $(X_1, A_1, x_1) \rightarrow (X_2, A_2, x_2)$  entsprechen genau den Abbildungen von Tripel  $(X_1, A_1, \{x_1\}) \rightarrow (X_2, A_2, \{x_2\})$ . Auch sind zwei Abbildungen zwischen punktierten Paaren genau dann homotop wenn sie es aufgefasst als Abbildungen zwischen Tripel von Räumen sind, dh.  $[(X_1, A_1, x_1), (X_2, A_2, x_2)] = [(X_1, A_1, \{x_1\}), (X_2, A_2, \{x_2\})]$ .

Für  $n \geq 1$  betrachten wir nun das Tripel  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$  wobei  $J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\})}$ . Ist  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar von Räumen und  $n \geq 1$  so definieren wir

$$\pi_n(X, A, x_0) := [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)].$$

Elemente von  $\pi_n(X, A, x_0)$  werden von Abbildungen  $f : I^n \rightarrow X$  mit  $f(\partial I^n) \subseteq A$  und  $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$  repräsentiert. Zwei solche Abbildungen  $f$  und  $g$  definieren das gleiche Element in  $\pi_n(X, A, x_0)$  genau dann wenn eine Homotopie  $H : I^n \times I \rightarrow X$

existiert, sodass  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$ ,  $H_t(\partial I^n) \subseteq A$  und  $H_t(J^{n-1}) = \{x_0\}$  für alle  $t \in I$ .

Ist  $n \geq 2$  und sind  $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  so definieren wir ihre *Konkatenation*  $fg : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  durch

$$(fg)(s_1, s_2, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Beachte, dass dies nur für  $n \geq 2$  wohldefiniert ist. Sind  $f_0 \simeq f_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  und  $g_0 \simeq g_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  dann gilt auch für die Konkatenationen  $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$ , vgl. Lemma III.3.3. Für  $n \geq 2$  erhalten wir daher eine Multiplikation

$$\pi_n(X, A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad ([f], [g]) \mapsto [fg]. \quad (\text{III.6})$$

**III.5.1. PROPOSITION.** *Ist  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar von Räumen und  $n \geq 2$ , dann liefert (III.6) eine Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Das neutrale Element wird durch die konstante Abbildung  $c_{x_0} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  repräsentiert, und das Inverse von  $[f]$  wird durch  $\bar{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ ,  $\bar{f}(s_1, s_2, \dots, s_n) := f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$  repräsentiert.*

**BEWEIS.** Dies lässt sich genau wie Proposition III.3.8 zeigen.  $\square$

**III.5.2. DEFINITION** (Relative Homotopiegruppen). Die Gruppe  $\pi_n(X, A, x_0)$  aus Proposition III.5.1 wird als *n-te relative Homotopiegruppe* von  $(X, A, x_0)$  bezeichnet,  $n \geq 2$ . In diesem Zusammenhang werden die Homotopiegruppen  $\pi_n(X, x_0)$  auch *absolute Homotopiegruppen* genannt.

**III.5.3. PROPOSITION.** *Es sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar von Räumen und  $n \geq 3$ . Dann ist  $\pi_n(X, A, x_0)$  abelsch.*

**BEWEIS.** Der Beweis ist völlig analog zu dem von Proposition III.3.10. Wegen der Voraussetzung  $n \geq 3$  kann die dort konstruierte Homotopie  $H$  als Homotopie von Tripeln  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (I^n, \partial I^n, J^{n-1})$  aufgefasst werden.  $\square$

**III.5.4. BEMERKUNG.** I.A. ist es nicht möglich auf  $\pi_1(X, A, x_0)$  in natürlicher Weise eine Gruppenstruktur zu definieren. Jedoch repräsentiert die konstante Abbildung  $c_{x_0} : (I^1, \partial I^1, J^0) \rightarrow (X, A, x_0)$  ein ausgezeichnetes Element in  $\pi_1(X, A, x_0)$ . Wir können  $\pi_1(X, A, x_0)$  daher als punktierte Menge auffassen. Besteht  $\pi_1(X, A, x_0)$  nur aus diesem einen Element so schreiben wir  $\pi_1(X, A, x_0) = 0$ .

**III.5.5. BEMERKUNG.** Beachte  $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ , die absoluten Homotopiegruppen treten daher als Spezialfälle der relativen auf.

Ist  $\varphi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  eine Abbildung punktierter Paare so erhalten wir eine induzierte Abbildung  $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ ,  $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$ . Ist  $\psi : (Y, B, y_0) \rightarrow (Z, C, z_0)$  eine weitere Abbildung punktierter Paare dann gilt offensichtlich  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Z, C, z_0)$

sowie  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_n(X, A, x_0)}$ . Homotope Abbildungen punktierter Paare  $\psi_0 \simeq \psi_1 : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  induzieren die gleiche Abbildung  $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ . All dies funktioniert falls  $n \geq 1$ . Für  $n \geq 2$  ist  $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  ein Homomorphismus von Gruppen. Zusammenfassend erhalten wir

III.5.6. PROPOSITION. *Die relativen Homotopiegruppen definieren Funktoren  $\pi_1 : \text{hTop}_0^2 \rightarrow \text{Set}_0$ ,  $\pi_2 : \text{hTop}_0^2 \rightarrow \text{Grp}$ , und  $\pi_n : \text{hTop}_0^2 \rightarrow \text{aGrp}$ ,  $n \geq 3$ .*

III.5.7. BEMERKUNG. Es sei  $\omega : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1}, s_0)$  eine stetige Abbildung die einen Homöomorphismus punktierter Paare

$$(I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1}, J^{n-1}/J^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1}, s_0)$$

induziert. Wir erhalten eine Bijektion

$$[(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)] \cong \pi_n(X, A, x_0), \quad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Elemente von  $\pi_n(X, A, x_0)$  können daher als Homotopieklassen von Abbildungen  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  aufgefasst werden.

III.5.8. BEMERKUNG. Es sei  $(X, A)$  ein Paar von Räumen und  $\gamma : I \rightarrow A$  ein Weg von  $\gamma(0) = x_0$  nach  $\gamma(1) = x_1$ . Ähnlich wie in Abschnitt III.4 lässt sich ein Isomorphismus  $\beta_\gamma : \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$  konstruieren. Für wegzusammenhängendes  $A$  sind die Homotopiegruppen daher unabhängig vom Basispunkt, bis auf Isomorphie. Beachte jedoch, dass dieser Isomorphismus nicht natürlich ist, da er von der Wahl einer Homotopieklasse von Wegen von  $x_0$  nach  $x_1$  abhängt. Trotzdem werden wir in diesem Fall oft nur  $\pi_n(X, A)$  für die höheren Homotopiegruppen schreiben.

Ist  $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  so liefert die Einschränkung eine Abbildung  $f|_{I^{n-1} \times \{0\}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ ,  $(s_1, \dots, s_{n-1}) \mapsto f(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$ . Sind  $f_0 \simeq f_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , so liefert die Einschränkung einer Homotopie von  $f_0$  nach  $f_1$  eine Homotopie  $f_0|_{I^{n-1} \times \{0\}} \simeq f_1|_{I^{n-1} \times \{0\}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ . Für  $n \geq 1$  erhalten wir daher eine Abbildung, den sogenannten *Randoperator*,

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0), \quad \partial([f]) := [f|_{I^{n-1} \times \{0\}}].$$

Für  $n \geq 2$  ist der Randoperator offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus, im Fall  $n = 1$  liefert er eine Abbildung punktierter Mengen.

III.5.9. BEMERKUNG. Ist  $[f] \in [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)] \cong \pi_n(X, A, x_0)$ , wobei  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , dann repräsentiert die Einschränkung  $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (A, x_0)$  das Element  $[f|_{S^{n-1}}] = \partial([f]) \in \pi_{n-1}(A, x_0) \cong [(S^{n-1}, s_0), (X, x_0)]$ , vgl. Bemerkung III.5.7 und Bemerkung III.3.18.

III.5.10. DEFINITION (Exakte Sequenz). Eine Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\cdots \rightarrow G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} G_{k+2} \rightarrow \cdots$$



wird *exakt* genannt, falls  $\text{img}(\varphi_k) = \ker(\varphi_{k+1})$ , für jedes  $k$ . Insbesondere muss also  $\varphi_{k+1} \circ \varphi_k = 0$  gelten, denn dies bedeutet gerade  $\text{img}(\varphi_k) \subseteq \ker(\varphi_{k+1})$ .

III.5.11. BEISPIEL. Eine Sequenz der Form  $0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\varphi} H$  ist genau dann exakt, wenn  $\varphi$  injektiv ist.

III.5.12. BEISPIEL. Eine Sequenz der Form  $G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{0} 0$  ist genau dann exakt, wenn  $\varphi$  surjektiv ist.

III.5.13. BEISPIEL. Eine Sequenz der Form  $0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{0} 0$  ist genau dann exakt, wenn  $\varphi$  ein Isomorphismus ist.

III.5.14. BEMERKUNG. In Definition III.5.10 werden nur die neutralen Element der Gruppen, nicht aber ihre Gruppenstruktur verwendet. Daher macht der Begriff der Exaktheit auch für Sequenzen punktierter Mengen Sinn. Eine Sequenz von Abbildungen punktierter Mengen

$$\cdots \rightarrow (S_k, x_k) \xrightarrow{\varphi_k} (S_{k+1}, x_{k+1}) \xrightarrow{\varphi_{k+1}} (S_{k+2}, x_{k+2}) \rightarrow \cdots$$

wird exakt genannt, falls  $\text{img}(\varphi_k) = (\varphi_{k+1})^{-1}(x_{k+1})$ , für jedes  $k$ . Fassen wir eine Gruppe  $G$  mit neutralem Element  $e$  als punktierte Menge  $(G, e)$  auf, so reproduziert dies den Exaktheitsbegriff aus Definition III.5.10.

III.5.15. SATZ (Lange exakte Sequenz eines Paares). *Es sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Paar von Räumen. Dann ist die folgende Sequenz exakt.*<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

Dabei sind  $i_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  und  $j_* : \pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$  die von den kanonischen Inklusionen  $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  und  $j : (X, \{x_0\}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  induzierten Abbildungen.

BEWEIS. Zur Exaktheit bei  $\pi_n(A, x_0)$ . Wir zeigen zunächst  $i_* \circ \partial = 0$ , dh.  $\text{img}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$ . Sei also  $[f] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ , wobei  $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Betrachte die Abbildung  $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $g(s_1, \dots, s_n) := f(s_1, \dots, s_n, 0)$ . Offensichtlich gilt dann  $i_*(\partial([f])) = [g] \in \pi_n(X, x_0)$ . Weiters ist  $H(I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $H(s_1, \dots, s_n, t) := f(s_1, \dots, s_n, t)$  eine Homotopie von  $H_0 = g$  nach  $H_1 = c_{x_0}$ . Es folgt  $i_*(\partial([f])) = [g] = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_n(X, x_0)$ . Nun zu der anderen Inklusion  $\ker(i_*) \subseteq \text{img}(\partial)$ . Sei dazu  $[f] \in \pi_n(A, x_0)$ , wobei  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$ , mit  $i_*([f]) = 0 \in \pi_n(X, x_0)$ . Dann ist  $f \simeq c_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , es existiert daher eine Homotopie  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = c_{x_0}$ . Diese Homotopie definiert eine Abbildung  $g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ ,  $g(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}) := H(s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$ .

<sup>31</sup>Bis auf die letzten drei Abbildungen sind dies alles Gruppenhomomorphismen. Bei  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\pi_1(X, A, x_0)$  und  $\pi_0(A, x_0)$  ist die Exaktheit wie in Bemerkung III.5.14 aufzufassen.

Für das durch  $g$  repräsentierte Element  $[g] \in \pi_n(X, A, x_0)$  gilt offensichtlich  $\partial([g]) = [H_0] = [f]$ .

*Zur Exaktheit bei  $\pi_n(X, A, x_0)$ :* Wir zeigen zunächst  $\partial \circ j_* = 0$ , dh.  $\text{img}(j_*) \subseteq \ker(\partial)$ . Sei dazu  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ , wobei  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Das Element  $\partial(j_*([f])) \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  wird dann durch die Abbildung  $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ ,  $(s_1, \dots, s_{n-1}) \mapsto f(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = x_0$  repräsentiert. Es gilt daher  $\partial(j_*([f])) = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ . Nun zu der anderen Inklusion  $\ker(\partial) \subseteq \text{img}(j_*)$ . Sei also  $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$  mit  $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , sodass  $\partial([f]) = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ . Betrachte die Abbildung  $g : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ ,  $g(s_1, \dots, s_{n-1}) := f(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$ . Es gilt dann  $\partial([f]) = [g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ . Also existiert eine Homotopie  $H : (I^{n-1} \times I, \partial I^{n-1} \times I) \rightarrow (A, x_0)$  von  $H_0 = c_{x_0}$  nach  $H_1 = g$ . Es definiert dann  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$

$$G(s_1, \dots, s_n, t) := \begin{cases} H(s_1, \dots, s_{n-1}, 1-t+2s_n) & \text{falls } 0 \leq s_n \leq t/2, \\ f(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n-t}{2-t}) & \text{falls } t/2 \leq s_n \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie mit  $G_0 = f$  und  $G_1(\partial I^n) = \{x_0\}$ . Daher repräsentiert  $h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ ,  $h(s_1, \dots, s_n) := G_1(s_1, \dots, s_n)$  ein Element  $[h] \in \pi_n(X, x_0)$  mit  $j_*([h]) = [G_1]$ . Es folgt  $[f] = [G_0] = [G_1] = j_*([h]) \in \pi_n(X, A, x_0)$ .

*Zur Exaktheit bei  $\pi_n(X, x_0)$ :* Um die hier notwendigen Homotopien leichter hinschreiben zu können, verwenden wir die Identifizierungen  $\pi_n(A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}), (A, x_0)]$ ,  $\pi_n(X, x_0) = [(D^n, S^{n-1}), (X, x_0)]$  als auch  $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)]$ , vgl. die Bemerkungen III.3.17 und III.5.7. Wir zeigen zunächst  $j_* \circ i_* = 0$ , dh.  $\text{img}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$ . Sei dazu  $[f] \in \pi_n(A, x_0)$  wobei  $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ . Wir können  $f$  als Abbildung  $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  auffassen, es gilt dann  $j_*(i_*([f])) = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Die Abbildung  $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$ ,  $H(x, t) := f((1-t)s_0 + tx)$ , ist eine Homotopie von  $H_0 = c_{x_0}$  nach  $H_1 = g$ . Es folgt  $j_*(i_*([f])) = [g] = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Nun zu der anderen Inklusion  $\ker(j_*) \subseteq \text{img}(i_*)$ . Sei dazu  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ , wobei  $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ . Wir können  $f$  als Abbildung  $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  auffassen, es gilt dann  $j_*([f]) = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Ist nun  $j_*([f]) = 0$ , dann existiert eine Homotopie  $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$  mit  $H_0 = g$  und  $H_1 = c_{x_0}$ . Die Homotopie  $G : (D^n \times I, S^{n-1} \times I) \rightarrow (X, x_0)$ ,

$$G(x, t) := \begin{cases} H(\frac{2}{2-t}x, t) & \text{falls } 0 \leq |x| \leq 1-t/2, \\ H(\frac{1}{|x|}x, 2-2|x|) & \text{falls } 1-t/2 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

erfüllt dann  $G_0 = f$  und  $G_1(D^n) = \{x_0\}$ . Daher können wir  $G_1$  als Abbildung  $h : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$  auffassen, es gilt dann  $i_*([h]) = [G_1] = [G_0] = [f] \in \pi_n(X, x_0)$ .  $\square$

III.5.16. BEMERKUNG. Die lange exakte Sequenz aus Satz III.5.15 ist natürlich in folgendem Sinn. Ist  $\varphi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  eine Abbildung zwischen punktierten Paaren, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \cdots \end{array}$$

Der Beweis dieser Tatsache ist trivial.

III.5.17. BEISPIEL. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $s_0 \in S^{n-1}$ . Wenden wir Satz III.5.15 auf das Paar  $(D^n, S^{n-1}, s_0)$  an, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow \pi_k(D^n, s_0) \rightarrow \pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S^{n-1}, s_0) \rightarrow \pi_{k-1}(D^n, s_0) \rightarrow \cdots$$

Nach Beispiel III.3.16 gilt  $\pi_k(D^n, s_0) = 0$ , für alle  $k \geq 0$ . Zusammen mit Beispiel III.5.13 sehen wir, dass der Randoperator Isomorphismen

$$\partial : \pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0) \cong \pi_{k-1}(S^{n-1}, s_0)$$

liefert, falls  $k \geq 2$ . Auch für  $k = 1$  ist  $\partial$  eine Bijektion  $\pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) \cong \pi_0(S^{n-1}, s_0)$ , wir können dies jedoch nicht aus Beispiel III.5.13 folgern, denn in diesem Fall steht keine Gruppenstruktur zur Verfügung. Im Fall  $n \geq 2$  folgt dies aus dem Wegzusammenhang von  $S^{n-1}$ , denn dann gilt  $\pi_0(S^{n-1}, s_0) = 0$ , wir erhalten somit eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow \pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow 0$  und dies impliziert sofort  $\pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) = 0$ . Im Fall  $n = 1$  besteht  $\pi_0(S^0, s_0)$  aus zwei Elementen die den beiden Zusammenhangskomponenten von  $S^0$  entsprechen. Auch  $\pi_1(D^1, S^0, s_0)$  hat zwei Elemente, eines wird von der konstanten Abbildung das andere von der identischen Abbildung repräsentiert. Die Berechnung der relativen Homotopiegruppen  $\pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0)$  ist damit vollständig auf die Berechnung der absoluten Homotopiegruppen der Sphären zurückgeführt.

III.5.18. BEISPIEL. Beispiel III.5.17 lässt sich wie folgt verallgemeinern. Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum und  $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$  der Kegel über  $X$ . Wir fassen  $X$  als Teilraum von  $CX$  auf,  $x \mapsto [(x, 1)]$ . Nach Beispiel I.8.26 ist  $CX$  kontrahierbar, und daher  $\pi_k(CX, x_0) = 0$ , für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und für jeden Basispunkt  $x_0$ , siehe Proposition III.4.10. Wenden wir Satz III.5.15 auf das Paar  $(CX, X, x_0)$  an so erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow \pi_k(CX, x_0) \rightarrow \pi_k(CX, X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(X, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(CX, x_0) \rightarrow \cdots$$

Zusammen mit Beispiel III.5.13 folgt, dass der Randoperator  $\partial$  einen Isomorphismus  $\pi_k(CX, X, x_0) \cong \pi_{k-1}(X, x_0)$  liefert,  $k \geq 2$ . Auch im Fall  $k = 1$  ist  $\partial$  eine Bijektion, denn nach Voraussetzung ist  $X$  wegzusammenhängend, also  $\pi_0(X, x_0) = 0$ , und aus der Exaktheit der langen Sequenz erhalten wir daher auch  $\pi_1(CX, X, x_0) = 0$ .

III.5.19. LEMMA (Fünfer-Lemma). *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 G_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & G_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & G_3 & \xrightarrow{\lambda_3} & G_4 & \xrightarrow{\lambda_4} & G_5 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
 \text{||||} & & \text{||||} & & \text{||||} & & \text{||||} & & \text{||||} \\
 H_1 & \xrightarrow{\mu_1} & H_2 & \xrightarrow{\mu_2} & H_3 & \xrightarrow{\mu_3} & H_4 & \xrightarrow{\mu_4} & H_5
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen mit exakten Zeilen. Weiters seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$  und  $\varphi_5$  Isomorphismen. Dann ist auch  $\varphi_3$  ein Isomorphismus.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Injektivität von  $\varphi_3$ . Sei also  $g_3 \in G_3$  mit  $\varphi_3(g_3) = 1$ . Dann gilt  $\varphi_4(\lambda_3(g_3)) = \mu_3(\varphi_3(g_3)) = \mu_3(1) = 1$  und wegen der Injektivität von  $\varphi_4$  somit  $\lambda_3(g_3) = 1$ . Da die obere Zeile bei  $G_3$  exakt ist, existiert  $g_2 \in G_2$  mit  $\lambda_2(g_2) = g_3$ . Es folgt  $\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3) = 1$ . Da die zweite Zeile bei  $H_2$  exakt ist, existiert  $h_1 \in H_1$  mit  $\mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$ . Auf Grund der Surjektivität von  $\varphi_1$  finden wir  $g_1 \in G_1$  mit  $\varphi_1(g_1) = h_1$ . Es gilt dann  $\varphi_2(\lambda_1(g_1)) = \mu_1(\varphi_1(g_1)) = \mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$ , also  $\lambda_1(g_1) = g_2$ , denn  $\varphi_2$  ist injektiv. Schließlich erhalten wir  $g_3 = \lambda_2(g_2) = \lambda_2(\lambda_1(g_1)) = 0$ , denn wegen der Exaktheit der oberen Zeile bei  $G_2$  gilt  $\lambda_2 \circ \lambda_1 = 0$ . Also ist  $\varphi_3$  injektiv. Nun zur Surjektivität von  $\varphi_3$ . Sei dazu  $h_3 \in H_3$ . Da  $\varphi_4$  surjektiv ist existiert  $g_4 \in G_4$  mit  $\varphi_4(g_4) = \mu_3(h_3)$ . Es folgt  $\varphi_5(\lambda_4(g_4)) = \mu_4(\varphi_4(g_4)) = \mu_4(\mu_3(h_3)) = 1$ , denn  $\mu_4 \circ \mu_3 = 0$  wegen der Exaktheit der unteren Zeile bei  $H_4$ . Da  $\varphi_5$  injektiv ist, schließen wir  $\lambda_4(g_4) = 1$ . Auf Grund der Exaktheit der oberen Zeile bei  $G_4$  existiert  $g_3 \in G_3$  mit  $\lambda_3(g_3) = g_4$ . Es folgt  $\mu_3(\varphi_3(g_3^{-1})h_3) = \mu_3(\varphi_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(\lambda_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(g_4^{-1})\mu_3(h_3) = \mu_3(h_3^{-1})\mu_3(h_3) = 1$ . Da die untere Zeile bei  $H_3$  exakt ist, existiert  $h_2 \in H_2$  mit  $\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3^{-1})h_3$ . Weiters finden wir  $g_2 \in G_2$  mit  $\varphi_2(g_2) = h_2$ , denn  $\varphi_2$  ist surjektiv. Wir erhalten somit  $\varphi_3(g_3\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(g_3^{-1})h_3 = h_3$ . Also ist  $\varphi_3$  surjektiv.  $\square$

III.5.20. KOROLLAR. *Es sei  $\varphi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren, sodass  $\varphi : X \rightarrow Y$  und  $\varphi|_A : A \rightarrow B$  beides Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist  $\varphi_* : \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, B, \varphi(x_0))$  ein Isomorphismus, für alle  $k \geq 1$  und jeden Basispunkt  $x_0 \in A$ .*

BEWEIS. Nach Bemerkung III.5.16 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_k(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_k(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_k(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{k-1}(X, x_0) \\
 \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
 \pi_k(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_k(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_k(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{k-1}(Y, y_0)
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen, siehe Satz III.5.15. Dabei ist  $y_0 = \varphi(x_0) \in B$ . Da  $\varphi : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz ist, muss  $\varphi_* : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  eine Isomorphismus sein,  $i \geq 0$ , siehe Proposition III.4.8. Ebenso ist  $\varphi_* : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(B, y_0)$  ein

Isomorphismus,  $i \geq 0$ . Nach Lemma III.5.19 ist daher auch  $\varphi_* : \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, B, y_0)$  ein Isomorphismus,  $k \geq 2$ . Wie sich leicht zeigen lässt, bleibt dies auch für  $k = 1$  richtig.  $\square$

III.5.21. LEMMA. *Es sei  $(X, A)$  ein Paar von Räumen und  $k \geq 0$ . Dann sind äquivalent:*

- (i) *Zu jeder Abbildung  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  existiert eine Homotopie  $H : D^k \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1(D^k) \subseteq A$  und  $H(x, t) = f(x)$ , für alle  $x \in S^{k-1}$  und  $t \in I$ .*
- (ii) *Zu jeder Abbildung  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  existiert eine Homotopie  $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1(D^k) \subseteq A$ .*
- (iii) *Zu jeder Abbildung  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  existiert eine Homotopie  $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A)$  mit  $H_0 = f$  und so, dass  $H_1$  eine konstante Abbildung ist.*
- (iv) *Es gilt  $\pi_k(X, A, x_0) = 0$  für jeden Basispunkt  $x_0 \in A$  falls  $k \geq 1$ , bzw. im Fall  $k = 0$ , jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  enthält Punkte aus  $A$ .<sup>32</sup>*

BEWEIS. Im Fall  $k = 0$  ist die Äquivalenz dieser Aussagen trivial. Sei also o.B.d.A.  $k \geq 1$ . Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Ad (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei dazu  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, A)$ . Nach Voraussetzung dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $f(D^k) \subseteq A$  gilt. Es ist dann  $H(x, t) := f((1-t)x)$  eine Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften. Ad (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei also  $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A)$  eine Homotopie mit  $H_0 = f$  und  $H_1(x) = x_0$ , für alle  $x \in D^k$ . Die Homotopie  $G : D^k \times I \rightarrow X$ ,

$$G(x, t) := \begin{cases} H\left(\frac{2}{2-t}x, t\right) & \text{falls } 0 \leq |x| \leq 1 - t/2, \\ H\left(\frac{1}{|x|}x, 2 - 2|x|\right) & \text{falls } 1 - t/2 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

erfüllt dann  $G_0 = f$ ,  $G_1(D^k) \subseteq A$  und  $G(x, t) = f(x)$  für alle  $x \in S^{k-1}$  und  $t \in I$ . Die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial, vgl. Bemerkung III.5.7. Nun zur Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei dazu  $f : (D^k, S^{k-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Wegen Bemerkung III.5.7 genügt es eine Homotopie  $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A)$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1 = c_{x_0}$  und  $H(s_0, t) = x_0$  für alle  $t \in I$  zu konstruieren. Nach Voraussetzung dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $f(D^k) \subseteq A$  gilt. Es ist dann  $H(x, t) := f((1-t)x + ts_0)$  eine Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

III.5.22. DEFINITION (*n*-facher Zusammenhang von Paaren). Ein Paar von Räumen  $(X, A)$  heißt *n-zusammenhängend*,  $n \geq 0$ , falls die vier äquivalenten Bedingungen aus Lemma III.5.21 für jedes  $0 \leq k \leq n$  erfüllt sind.

---

<sup>32</sup>Wir haben  $\pi_0(X, A, x_0)$  nicht definiert. Dieses Lemma legt jedoch nahe, dass die Aussage  $\pi_0(X, A, x_0) = 0$  gerade bedeuten sollte, dass jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  Punkte aus  $A$  enthält.

III.5.23. BEMERKUNG. Ein Paar  $(X, A)$  ist daher 0-zusammenhängend genau dann, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  Punkte aus  $A$  enthält. Das Paar  $(X, A)$  ist  $n$ -zusammenhängend wenn jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  Punkte aus  $A$  enthält und für jeden Basispunkt  $x_0 \in A$  und jedes  $1 \leq k \leq n$  gilt  $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ . Nach Bemerkung III.5.8 genügt es, dass dies für *einen* Basispunkt aus jeder Wegzusammenhangskomponente von  $A$  erfüllt ist.

III.5.24. PROPOSITION. *Für ein Paar  $(X, A)$  und  $n \geq 0$  sind äquivalent:*

- (i)  $(X, A)$  ist  $n$ -zusammenhängend.
- (ii) Für jeden Basispunkt  $x_0 \in A$  induziert die Inklusion Isomorphismen  $\pi_k(A, x_0) \cong \pi_k(X, x_0)$  für  $0 \leq k < n$ , und eine Surjektion  $\pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ .

BEWEIS. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, A)$ , siehe Satz III.5.15.  $\square$

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Beweis von folgendem Resultat gewidmet.

III.5.25. SATZ. *Es gilt*

- (i)  $\pi_k(S^n) = 0$ , für alle  $0 \leq k < n$ , sowie
- (ii)  $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ , für alle  $1 \leq k < n$ .

Dh.  $S^n$  und das Paar  $(D^n, S^{n-1})$  sind beide  $(n-1)$ -zusammenhängend.

III.5.26. LEMMA (Approximation durch glatte Abbildungen). *Es sei  $f : D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\|\tilde{f}(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ , für alle  $x \in D^k$ .*

BEWEIS. Wir setzen zunächst  $f$  zu einer stetigen Funktion  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  fort, etwa durch  $f(x) := f(x/\|x\|)$ ,  $\|x\| \geq 1$ . Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind finden wir  $\delta > 0$ , sodass

$$\|f(x) - f(x-y)\| \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } x \in D^k \text{ und } y \in D_\delta^k. \quad (\text{III.7})$$

Hier bezeichnet  $D_\delta^k = \{y \in \mathbb{R}^k : \|y\| \leq \delta\}$  den abgeschlossenen Ball mit Radius  $\delta$  und Mittelpunkt  $0 \in \mathbb{R}^k$ . Wähle eine glatte Funktion  $\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\text{supp}(\mu) \subseteq D_\delta^k$ , dh.  $\mu(y) = 0$  falls  $\|y\| \geq \delta$ , und  $\int_{\mathbb{R}^k} \mu(y) dy = 1$ . Betrachte nun die Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{f} := f * \mu$ ,

$$\tilde{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)\mu(y) dy = \int_{\mathbb{R}^k} f(y)\mu(x-y) dy. \quad (\text{III.8})$$

Dies sind gewöhnliche Riemannintegrale stetiger Funktionen die wegen des kompakten Trägers von  $\mu$  konvergieren. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Transformationsformel angewandt auf die Substitution  $y \leftrightarrow x-y$ . Alle partiellen Ableitungen von  $\tilde{f}$  existieren,  $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_r} \tilde{f} = f * (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_r} \mu)$ , dh.

$$(\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_r} \tilde{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(y) ((\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_r} \mu)(x-y)) dy$$

gegeben. Dies folgt aus der zweiten Integraldarstellung von  $\tilde{f}$  in (III.8) durch Vertauschen von Integration und Differentiation, was auf Grund des kompakten Trägers von  $\mu$  gerechtfertigt ist. Insbesondere ist  $\tilde{f}$  eine glatte Abbildung. Aus der ersten Integraldarstellung von  $\tilde{f}$  in (III.8) und  $\int_{\mathbb{R}^k} \mu(y) dy = 1$  erhalten wir

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} (f(x) - f(x-y))\mu(y) dy = \int_{D_\delta^k} (f(x) - f(x-y))\mu(y) dy$$

wobei die zweite Gleichheit aus  $\text{supp}(\mu) \subseteq D_\delta^k$  folgt. Zusammen mit (III.7) erhalten wir

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \int_{D_\delta^k} \|f(x) - f(x-y)\|\mu(y) dy \leq \varepsilon \int_{D_\delta^k} \mu(y) dy = \varepsilon,$$

für alle  $x \in D^k$ . □

III.5.27. LEMMA. *Es sei  $k < n$  und  $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Abbildung. Dann ist  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{f}(D^k)$  dicht in  $\mathbb{R}^n$ .*

BEWEIS. Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{f}(I^k)$  dicht in  $\mathbb{R}^n$  ist. Sei  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $W$  der Würfel mit Mittelpunkt  $y$  und Seitenlänge  $\varepsilon$ . Es ist  $W \setminus \tilde{f}(I^k) \neq \emptyset$  zu verifizieren. Da glatte Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig Lipschitzstetig sind existiert eine Konstante  $C > 0$ , sodass

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|, \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in I^k. \quad (\text{III.9})$$

Da  $k < n$  finden wir  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N^k \left(\frac{C\sqrt{k}}{N}\right)^n < \varepsilon^n$ . Wir unterteilen  $I^k$  in  $N^k$  viele Würfel der Seitenlänge  $1/N$ . Ist  $Q$  einer dieser Würfel, und bezeichnet  $x_0$  seinen Mittelpunkt, dann erhalten wir aus (III.9) die Abschätzung  $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{C\sqrt{k}}{2N}$ , für alle  $x \in Q$ . Insbesondere ist  $f(Q)$  in einem  $n$ -dimensionalen Würfel mit Mittelpunkt  $f(x_0)$  und Seitenlänge  $\frac{C\sqrt{k}}{N}$  enthalten. Wir finden daher  $N^k$  viele Würfel  $W_i \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Seitenlänge  $\frac{C\sqrt{k}}{N}$  und so, dass  $f(I^k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i$ . Für das Volumen erhalten wir  $\text{vol}(\bigcup_{i=1}^{N^k} W_i) \leq N^k \left(\frac{C\sqrt{k}}{N}\right)^n < \varepsilon^n = \text{vol}(W)$ . Es folgt daher  $W \setminus \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i \neq \emptyset$  und weil  $\tilde{f}(I^k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i$  auch  $W \setminus \tilde{f}(I^k) \neq \emptyset$ . □

III.5.28. LEMMA. *Es sei  $k < n$  und  $f : (D^k, \partial D^k) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n)$ . Dann existiert eine Homotopie  $H : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n)$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1(D^k) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$ .*

BEWEIS. Da  $f(\partial D^k)$  kompakt und  $\mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$  offen ist, existiert  $\varepsilon > 0$  mit

$$\{f(x) + y \mid x \in \partial D^k, \|y\| \leq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n. \quad (\text{III.10})$$

Nach Lemma III.5.26 existiert eine glatte Abbildung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\| \leq \varepsilon, \quad \text{für } x \in D^k. \quad (\text{III.11})$$

Definiere  $G : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n)$ ,  $G(x, t) := f(x) + t(\tilde{f}(x) - f(x))$ . Beachte, dass wegen (III.10) und (III.11) tatsächlich  $G_t(\partial D^k) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$  gilt,  $t \in I$ . Offensichtlich ist  $G_0 = f$  und  $G_1 = \tilde{f}$ . Nach Lemma III.5.27 ist  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{f}(D^k)$  dicht in  $\mathbb{R}^n$ , also existiert  $y_0 \in B_{1/2}^n$  mit  $y_0 \notin \tilde{f}(D^k)$ . Betrachte nun  $r : \mathbb{R}^n \setminus \{y_0\} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $r(y) := y_0 + \lambda(y) \frac{y - y_0}{\|y - y_0\|}$ , wobei

$$\lambda(y) := -\frac{\langle y_0, y - y_0 \rangle}{\|y - y_0\|} + \sqrt{\frac{\langle y_0, y - y_0 \rangle^2}{\|y - y_0\|^2} - \|y_0\|^2 + 1},$$

dh.  $r(y)$  ist der Schnittpunkt des Strahls von  $y_0$  durch  $y$  mit  $S^{n-1}$ . Beachte, dass für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$  und  $t \in I$  stets  $(1-t)y + tr(y) \in \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$  gilt. Wir erhalten daher eine Homotopie  $\tilde{G} : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n)$ ,  $\tilde{G}(x, t) := (1-t)\tilde{f}(x) + tr(\tilde{f}(x))$ . Offensichtlich gilt  $\tilde{G}_0 = \tilde{f}$  und  $\tilde{G}_1(\partial D^k) \subseteq S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$ . Setzen wir  $G$  und  $\tilde{G}$  zusammen, so erhalten wir die gewünschte Homotopie  $H$ .  $\square$

**BEWEIS VON SATZ III.5.25.** Aus Lemma III.5.28 und Proposition III.5.24 folgt  $\pi_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n) = 0$  für  $1 \leq k < n$ . Da die Inklusionen  $D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus D_{1/2}^n$  Homotopieäquivalenzen sind, erhalten wir  $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ , für  $1 \leq k < n$ , siehe Korollar III.5.20. Damit ist (ii) gezeigt. Mit Hilfe der langen exakten Sequenz des Paares  $(D^n, S^{n-1})$  haben wir in Beispiel III.5.17  $\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_{k-1}(S^{n-1})$  hergeleitet,  $k \geq 1$  und  $n \geq 0$ . Aus (ii) folgt daher nun auch (i).  $\square$

**III.6. Faserungen.** Eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$  wird *Faserung* oder *Hurewicz-Faserung* genannt wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich allen topologischen Räumen hat, dh. ist  $H : X \times I \rightarrow B$  eine Homotopie und  $\tilde{h} : X \rightarrow E$  stetig mit  $p \circ \tilde{h} = H_0$ , dann existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ . Es wird hier nicht verlangt, dass die Homotopie  $\tilde{H}$  eindeutig ist, und sie wird es i.A. auch nicht sein.

**III.6.1. BEISPIEL.** Sind  $B$  und  $F$  topologische Räume, dann ist die kanonische Projektion  $p : B \times F \rightarrow B$  ist eine sogenannte *triviale* Hurewicz-Faserung. Sei dazu  $H : X \times I \rightarrow B$  eine Homotopie und  $h : X \rightarrow B \times F$  mit  $p \circ h = H_0$ . Bezeichne die Komponenten von  $h$  mit  $h = (h_B, h_F)$ . Es gilt dann  $h_B = H_0$ . Setzen wir  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow B \times F$ ,  $\tilde{H}(x, t) := (H(x, t), h_F(x))$  dann gilt  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}_0 = (h_B, h_F) = h$ .

**III.6.2. BEISPIEL.** Jede Überlagerung ist auch eine Hurewicz-Faserung, siehe Satz II.3.3.

Eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$  wird *Serre-Faserung* genannt wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich aller Würfel  $I^n$  hat, dh. ist  $H : I^n \times I \rightarrow B$  eine Homotopie und  $\tilde{h} : I^n \rightarrow E$  stetig mit  $p \circ \tilde{h} = H_0$ , dann existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}_1 = \tilde{h}$ .



III.6.3. BEISPIEL. Jede Hurewicz-Faserung ist auch eine Serre-Faserung.

Eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$  wird (*lokal triviales*) *Faserbündel* genannt, wenn zu jedem Punkt  $x \in B$  eine Umgebung  $U$  von  $x$ , ein topologischer Raum  $F$  und ein Homöomorphismus  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  mit  $p_U \circ \varphi = p$  existieren. Dabei bezeichnet  $p_U : U \times F \rightarrow U$  die kanonische Projektion. Jeder solche Homöomorphismus  $\varphi$  wird als *Trivialisierung* von  $p$  über  $U$  bezeichnet. Ist  $x \in B$  so wird  $p^{-1}(x)$  die *Faser* über  $x$  genannt.

III.6.4. BEISPIEL. Sind  $B$  und  $F$  zwei topologische Räume, dann ist die kanonische Projektion  $p : B \times F \rightarrow B$  ein Faserbündel.

III.6.5. BEMERKUNG. Ist  $B$  ein parakompakter Hausdorffraum und  $p : E \rightarrow B$  ein Faserbündel, dann ist  $p$  auch eine Hurewicz-Faserung, siehe [11, Corollary 14 in Section 2.7].

III.6.6. BEMERKUNG. Wirkt eine kompakte Lie Gruppe  $G$  frei auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ , dann ist die Orbitprojektion  $M \rightarrow M/G$  ein Faserbündel, siehe die Vorlesung über Differentialgeometrie. Dies liefert eine Menge interessanter Faserbündel, wir werden von diesem Resultat aber nicht Gebrauch machen.

III.6.7. PROPOSITION. *Jedes Faserbündel ist eine Serre-Faserung.*

BEWEIS. Es sei  $p : E \rightarrow B$  ein Faserbündel. Es ist die Homotopieliftunseigenschaft für Würfel  $I^n$  zu verifizieren. Sei dazu  $H : I^n \times I \rightarrow B$  eine Homotopie und  $\tilde{h} : I^n \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{h} = H_0$ . Es ist eine Abbildung  $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$  zu konstruieren. Wir nehmen zunächst an, es gibt eine offene Teilmenge  $U \subseteq B$  und eine Trivialisierung  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ,  $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$  mit  $H(I^n \times I) \subseteq U$ . Dann lässt sich die gesuchte Abbildung  $\tilde{H}$  sofort angeben,

$$\tilde{H}(s_1, \dots, s_n, t) := \varphi^{-1}(H(s_1, \dots, s_n, t), p_F(\varphi(\tilde{h}(s_1, \dots, s_n))))),$$

wobei  $p_F : U \times F \rightarrow F$  die kanonische Projektion bezeichnet. Etwas allgemeiner lässt sich damit folgendes Problem lösen. Ist  $H : X \rightarrow U$  stetig,  $A \subseteq X$  ein Retrakt und  $\tilde{h} : A \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{h} = H|_A$ , dann existiert eine Abbildung  $\tilde{H} : X \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}|_A = \tilde{h}$ . Um eine solche Abbildung  $\tilde{H}$  angeben zu können wählen wir eine Retraktion  $r : X \rightarrow A$  und setzen  $\tilde{H} := \varphi^{-1} \circ (H, p_F \circ \varphi \circ \tilde{h} \circ r)$ . Diese hat dann die gewünschten Eigenschaften.

Nun zum allgemeinen Fall. Ist  $k \geq 1$  dann können wir  $I^n \times I$  in  $k^{n+1}$ -viele Würfel zerlegen,

$$Q_{i_1, \dots, i_n, j} := \left[ \frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k} \right] \times \dots \times \left[ \frac{i_n-1}{k}, \frac{i_n}{k} \right] \times \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right], \quad i_1, \dots, i_n, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Auf Grund der Kompaktheit von  $I^n \times I$  kann  $k$  so gewählt werden, dass das Bild  $H(Q_{i_1, \dots, i_n, j})$  jedes solchen Würfels in einer offenen Teilmenge  $U_{i_1, \dots, i_n, j}$  von  $B$  enthalten ist über der das Faserbündel  $p$  trivial ist. Nach obigen Bemerkungen lässt

sich die Einschränkung  $H|_{Q_{i_1, \dots, i_n, j}}$  zu einer stetigen Abbildung  $Q_{i_1, \dots, i_n, j} \rightarrow E$  liften, wobei dieser Lift auf einem Retrakt von  $Q_{i_1, \dots, i_n, j}$  beliebig vorgegeben werden kann. Damit lässt sich nun der gesuchte Lift  $\tilde{H}$  induktiv auf den Würfeln  $Q_{1, \dots, 1, 1}$ ,  $Q_{1, \dots, 1, 2}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{1, \dots, 1, k}$ ,  $Q_{1, \dots, 1, 2, 1}$ ,  $Q_{1, \dots, 1, 2, 2}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{1, \dots, 1, 2, k}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{1, \dots, 1, k, 1}$ ,  $Q_{1, \dots, 1, k, 2}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{1, \dots, 1, k, k}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{1, \dots, 2, 1, 1}$ ,  $\dots$ ,  $Q_{k, \dots, k, k}$  konstruieren. Ist  $Q_{i_1, \dots, i_n, j}$  einer dieser Würfel und bezeichnet  $B$  die Vereinigung von  $I^n \times \{0\}$  mit all den Vorgängern von  $Q_{i_1, \dots, i_n, j}$  in dieser Liste, dann ist  $A := B \cap Q_{i_1, \dots, i_n, j}$  ein Retrakt von  $Q_{i_1, \dots, i_n, j}$ . Der auf  $B$  bereits konstruierte, bzw. durch  $\tilde{h}$  vorgegebene, Lift lässt sich daher stetig zu einem Lift auf  $B \cup Q_{i_1, \dots, i_n, j}$  fortsetzen.  $\square$

III.6.8. LEMMA. *Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Weiters seien  $H : I^n \rightarrow B$  und  $\tilde{h} : J^{n-1} \rightarrow E$  stetig, sodass  $p \circ \tilde{h} = H|_{J^{n-1}}$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $\tilde{H} : I^n \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}|_{J^{n-1}} = \tilde{h}$ .*

BEWEIS. Dies folgt aus der Tatsache, dass das Paar  $(I^n, J^{n-1})$  homöomorph zum Paar  $(I^n, I^{n-1} \times \{0\})$  ist.  $\square$

III.6.9. PROPOSITION. *Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $x_0 \in E$ ,  $b_0 := p(x_0)$  und  $F := p^{-1}(b_0)$ . Dann induziert  $p$  einen Isomorphismus  $\pi_n(E, F, x_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ , für alle  $n \geq 1$ .*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass  $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  surjektiv ist. Sei dazu  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ , wobei  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . Nach Lemma III.6.8 existiert eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : I^n \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{f} = f$  und  $\tilde{f}|_{J^{n-1}} = c_{x_0}$ . Es folgt  $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$ , also definiert  $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$  ein Element  $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, x_0)$ , für das offensichtlich  $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$  gilt. Nun zur Injektivität von  $p_*$ . Seien dazu  $[f], [g] \in \pi_n(E, F, x_0)$  mit  $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ . Ist  $p_*([\tilde{f}]) = p_*([\tilde{g}]) \in \pi_n(B, b_0)$ , dann existiert eine Homotopie  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$  von  $H_0 = p \circ f$  nach  $H_1 = p \circ g$ . Nach Lemma III.6.8 existiert eine stetige Abbildung  $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ \tilde{H} = H$ ,  $\tilde{H}_0 = f$ ,  $\tilde{H}_1 = g$  und  $\tilde{H}|_{J^{n-1} \times I} = c_{x_0}$ . Es folgt  $\tilde{H}(\partial I^n \times I) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$ . Also ist  $\tilde{H} : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (E, F, x_0)$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  und damit  $[f] = [g] \in \pi_n(E, F, x_0)$ .  $\square$

III.6.10. SATZ (Lange exakte Sequenz einer Faserung). *Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $x_0 \in E$ ,  $b_0 := p(x_0)$  und  $F := p^{-1}(b_0)$ . Dann ist die folgende Sequenz exakt.<sup>33</sup>*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

Dabei sind  $i_* : \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0)$  und  $p_* : \pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  die von der Inklusion  $i : (F, x_0) \rightarrow (E, x_0)$  und der Projektion  $p : (E, x_0) \rightarrow (B, b_0)$

<sup>33</sup>Bis auf die letzten drei Abbildungen sind dies alles Gruppenhomomorphismen. Bei  $\pi_1(B, b_0)$ ,  $\pi_0(F, x_0)$  und  $\pi_0(E, x_0)$  ist die Exaktheit wie in Bemerkung III.5.14 aufzufassen.

induzierten Abbildungen. Der Randoperator  $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$  ist durch die Komposition  $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{(p_*)^{-1}} \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial^{pair}} \pi_{n-1}(F, x_0)$  gegeben, wobei  $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  den Isomorphismus aus Proposition III.6.9 ist und  $\partial^{pair} : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$  der Randoperator in der langen exakten Sequenz des Paares  $(E, F)$  bezeichnet, siehe Satz III.5.15.

BEWEIS. Von der Exaktheit bei  $\pi_0(E, x_0)$  abgesehen folgt dies sofort aus Satz III.5.15 und der offensichtlichen Tatsache, dass die Komposition  $\pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$  mit  $p_* : \pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  übereinstimmt. Die Exaktheit bei  $\pi_0(E, x_0)$  lässt sich ohne Probleme direkt aus der Homotopieliftungseigenschaft herleiten.  $\square$

III.6.11. BEMERKUNG. Wenden wir Satz III.6.10 auf eine punktierte Überlagerung  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  an, vgl. Beispiel III.6.2, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_{n-1}(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

denn aus der Diskretheit der Faser  $F := p^{-1}(x_0)$  folgt  $\pi_n(F, x_0) = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Für Überlagerungen reduziert sich Satz III.6.10 daher auf die Aussage von Satz III.3.19.

III.6.12. BEISPIEL (Hopffaserung). Wir betrachten  $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$ , vgl. Beispiel I.6.8, und die Hopffaserung  $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ,  $p(z_0, \dots, z_n) = [(z_0, \dots, z_n)]$ . Dies ist ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu  $S^1$ . Um dies einzusehen betrachte wir die offene Menge  $U_i := \{[(z_0, \dots, z_n)] : z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$ . Wegen  $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{C}P^n$  genügt es Trivialisierungen von  $p$  über  $U_i$  zu konstruieren. Es gilt  $p^{-1}(U_i) = \{(z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_i \neq 0\}$ . Die Abbildung  $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1$ ,  $\varphi_i(z_0, \dots, z_n) := (p(z_0, \dots, z_n), \frac{z_i}{|z_i|})$  ist ein Homöomorphismus mit Inverser  $\varphi_i^{-1} : U_i \times S^1 \rightarrow p^{-1}(U_i)$ ,  $\varphi_i^{-1}([(z_0, \dots, z_n)], \lambda) = \frac{\lambda |z_i|}{z_i} (z_0, \dots, z_n)$ . Also ist  $\varphi_i$  eine Trivialisierung von  $p$  über  $U_i$ , und  $p$  daher ein Faserbündel. Nach Proposition III.6.7 ist  $p$  daher eine Serre-Faserung. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\cdots \rightarrow \pi_k(S^1) \rightarrow \pi_k(S^{2n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S^1) \rightarrow \cdots \quad (\text{III.12})$$

Für  $k \geq 3$  ist  $\pi_k(S^1) = 0 = \pi_{k-1}(S^1)$ , aus der Exaktheit von (III.12) folgt daher, dass die Projektion  $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  Isomorphismen

$$\pi_k(S^{2n+1}) \cong \pi_k(\mathbb{C}P^n), \quad k \geq 3, \quad n \geq 0, \quad (\text{III.13})$$

induziert, vgl. Beispiel III.5.13. Ist  $n \geq 1$  dann gilt  $\pi_1(S^{2n+1}) = 0 = \pi_0(S^1)$  und die Exaktheit von (III.12) impliziert  $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$ . Daher sind alle  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 0$ , einfach zusammenhängend, vgl. Beispiel I.9.17. Ist  $n \geq 1$  so gilt auch  $\pi_2(S^{2n+1}) = 0 = \pi_1(S^{2n+1})$ , siehe Satz III.5.25, und aus der Exaktheit von (III.12)

erhalten wir  $\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ . Im Fall  $n = 1$  haben wir einen Homöomorphismus  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ , es folgt daher  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$  sowie

$$\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2), \quad k \geq 3. \quad (\text{III.14})$$

III.6.13. BEMERKUNG. Die Berechnung von  $\pi_2(S^2)$  in Beispiel III.6.12 ermöglicht es einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, vgl. Satz I.5.3, für stetige Abbildungen  $f : D^3 \rightarrow D^3$  zu geben. Hätte  $f$  nämlich keinen Fixpunkt dann können wir wie im Beweis von Satz I.5.3 eine Retraktion  $r : D^3 \rightarrow S^2$  definieren, dh.  $r \circ \iota = \text{id}_{S^2}$  wobei  $\iota : S^2 \rightarrow D^3$  die kanonische Inklusion bezeichnet. Für die induzierten Homomorphismen zwischen den zweiten Homotopiegruppen folgt  $r_* \circ \iota_* = \text{id}_{\pi_2(S^2)}$  aber auch  $r_* \circ \iota_* = 0$ , denn  $\pi_2(D^3) = 0$ . Also ist  $\text{id}_{\pi_2(S^2)} = 0$  und damit auch  $\pi_2(S^2) = 0$ , ein Widerspruch zu  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ .

III.6.14. BEMERKUNG. Die Tatsache, dass  $\pi_2(S^2) \neq 0$ , vgl. Beispiel III.6.12, erlaubt es auch zu zeigen, dass  $\mathbb{R}^3$  nicht zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorph sein kann,  $n \neq 3$ . Für  $n < 3$  haben wir dies bereits gezeigt, siehe Satz I.7.5. Sei daher  $n > 3$ . Wäre  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Homöomorphismus und  $P \in \mathbb{R}^n$ , dann liefert die Einschränkung von  $f$  auch einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}^n \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$ ,  $Q := f(P)$ . Es folgt  $\pi_2(S^{n-1}) \cong \pi_2(\mathbb{R}^n \setminus \{P\}) \cong \pi_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}) \cong \pi_2(S^2)$ . Nach Satz III.5.25 gilt  $\pi_2(S^{n-1}) = 0$  und dies liefert nun einen Widerspruch zu  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ . Also kann es keinen Homöomorphismus  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $n \geq 3$ , geben.

III.6.15. BEISPIEL. Auf  $S^{4n+3} \subseteq \mathbb{H}^{n+1}$  betrachte die Äquivalenzrelation  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{H} : \lambda x = y$  und die Projektion auf den Quotientenraum  $p : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n = S^{4n+3}/\sim$ , vgl. Aufgabe 17. Die Abbildung  $p$  ist ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu  $S^3$ , siehe Aufgabe 29. Aus der damit assoziierten langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen folgt, siehe Aufgabe 30,

$$\pi_k(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^{4n+3}), \quad k \geq 1, \quad n \geq 1. \quad (\text{III.15})$$

Insbesondere gilt  $\pi_k(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_{k-1}(S^3)$ ,  $1 \leq k \leq 4n+2$  und  $\pi_0(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_1(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_2(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_3(\mathbb{H}P^n) = 0$ , dh.  $\mathbb{H}P^n$  3-zusammenhängend,  $n \geq 0$ . Im Fall  $n = 1$  haben wir einen Homöomorphismus  $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$  und daher ein Faserbündel  $S^7 \rightarrow S^4$  mit Fasern homöomorph zu  $S^3$ . Aus (III.15) erhalten wir in diesem Fall

$$\pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^7), \quad k \geq 1. \quad (\text{III.16})$$

III.6.16. BEISPIEL. In Aufgabe 31 wird ein Faserbündel  $S^{15} \rightarrow S^8$  mit Fasern homöomorph zu  $S^7$  konstruiert. Aus der entsprechenden langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen erhalten wir

$$\pi_k(S^8) \cong \pi_{k-1}(S^7) \times \pi_k(S^{15}), \quad k \geq 1. \quad (\text{III.17})$$

III.6.17. BEMERKUNG. Um einen Eindruck der Komplexität der höheren Homotopiegruppen zu bekommen seien hier einige Resultate über die Homotopiegruppen der Sphären zusammengefasst. Die folgende Tabelle zeigt die Gruppe

$\pi_k(S^n)$  in der  $k$ -ten Zeile und  $n$ -Spalte.

| $k \setminus n$ | 1            | 2                 | 3                 | 4                                     | 5                 | 6                 | 7                 | 8                 | 9              | 10             | 11           |
|-----------------|--------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|--------------|
| 1               | $\mathbb{Z}$ | 0                 | 0                 | 0                                     | 0                 | 0                 | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 2               | 0            | $\mathbb{Z}$      | 0                 | 0                                     | 0                 | 0                 | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 3               | 0            | $\mathbb{Z}$      | $\mathbb{Z}$      | 0                                     | 0                 | 0                 | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 4               | 0            | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$                          | 0                 | 0                 | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 5               | 0            | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$                        | $\mathbb{Z}$      | 0                 | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 6               | 0            | $\mathbb{Z}_{12}$ | $\mathbb{Z}_{12}$ | $\mathbb{Z}_2$                        | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$      | 0                 | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 7               | 0            | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$   | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$      | 0                 | 0              | 0              | 0            |
| 8               | 0            | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_{24}$ | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$      | 0              | 0              | 0            |
| 9               | 0            | $\mathbb{Z}_3$    | $\mathbb{Z}_3$    | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_{24}$ | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$   | 0              | 0            |
| 10              | 0            | $\mathbb{Z}_{15}$ | $\mathbb{Z}_{15}$ | $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$ | $\mathbb{Z}_2$    | 0                 | $\mathbb{Z}_{24}$ | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$   | 0            |
| 11              | 0            | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}_{15}$                     | $\mathbb{Z}_2$    | $\mathbb{Z}$      | 0                 | $\mathbb{Z}_{24}$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$ |

Die erste Spalte haben wir in Satz I.4.1 und Beispiel III.3.20 verifiziert. In Beispiel III.6.12 haben  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$  gezeigt. Die Tatsache, dass ab  $k = 3$  die zweite und dritte Spalte dieser Tabelle übereinstimmen haben wir in selbigem Beispiel aus der Hopffaserung  $S^3 \rightarrow S^2$  hergeleitet, siehe (III.14). Dass in der rechten oberen Hälfte dieser Tabelle nur triviale Gruppen anzutreffen sind folgt aus Satz III.5.25. Auch die Isomorphismen (III.16) und (III.17) sind für kleine  $k$  in dieser Tabelle ersichtlich. Auch sei hier auf ein Phänomen hingewiesen, dass wir in Abschnitt III.9 beweisen werden. Ist  $k \geq 0$  fix und betrachten wir die Gruppen  $\pi_{k+n}(S^n)$  dann verleitet die Tabelle oben zu der Vermutung, dass diese Gruppen für grosse  $n$  alle isomorph sind. Dies ist tatsächlich der Fall, siehe Bemerkung III.9.20. Die Einträge in der Diagonale der Tabelle,  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , werden wir in Satz III.9.11 verifizieren. Die meisten Gruppen in obiger Tabelle sind endlich. Tatsächlich gilt auf Grund eines Resultats von Serre, dass  $\pi_k(S^n)$  mit Ausnahme von  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  und  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$  stets endlich sind.

III.6.18. BEISPIEL (Homotopiegruppen der orthogonale Gruppen). Betrachte die Abbildung  $p : \text{SO}_{n+1} \rightarrow S^n$ ,  $p(A) := Ae_1$ , wobei  $e_1 \in S^n$  den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Wir wollen zunächst verifizieren, dass  $p$  ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu  $\text{SO}_n$  ist. Wir werden im folgenden  $\text{SO}_n$  als Untergruppe von  $\text{SO}_{n+1}$  auffassen,  $\text{SO}_n = \{A \in \text{SO}_{n+1} : Ae_1 = e_1\} = p^{-1}(e_1)$ . Für  $A, B \in \text{SO}_{n+1}$  gilt offensichtlich  $p(A) = p(B)$  genau dann wenn  $B^{-1}A \in \text{SO}_n$ . Sei nun  $b_0 \in S^n$  und wähle  $b_1, \dots, b_n \in S^n$ , sodass  $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \text{SO}_{n+1}$ . Dann ist  $U := \{x \in S^n : \det(x, b_1, \dots, b_n) > 0\}$  eine offene Umgebung von  $b_0$ . Wir werden nun eine Trivialisierung von  $p$  über  $U$  konstruieren. Wir erinnern uns dazu, dass  $\text{SO}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ ,  $(A, D) \mapsto AD$ , einen Homöomorphismus definiert, siehe Beispiel I.7.12. Wir bezeichnen den inversen Homöomorphismus mit  $(\psi_1, \psi_2) : \text{GL}_{n+1}^+(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{R})$ . Es ist dann  $\sigma : U \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ ,  $\sigma(x) := \psi_1(x, b_1, \dots, b_n)$ , eine stetige Abbildung mit  $p(\sigma(x)) = x$ , für  $x \in U$ , denn aus  $\psi_1(x, b_1, \dots, b_n)\psi_2(x, b_1, \dots, b_n) = (x, b_1, \dots, b_n)$  und  $|x| = 1$

folgt, dass die erste Spalte von  $\psi_2(x, b_1, \dots, b_n)$  mit dem ersten Einheitsvektor  $e_1$  übereinstimmen muss. Für  $A \in p^{-1}(U)$  erhalten wir  $p(\sigma(p(A))) = p(A)$ , also  $\sigma(p(A))^{-1}p(A) \in \text{SO}_n \subseteq \text{SO}_{n+1}$ . Wir definieren nun die gesuchte Trivialisierung durch  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{SO}_n$ ,  $\varphi(A) := (p(A), \sigma(p(A))^{-1}A)$ . Dies ist tatsächlich ein Homöomorphismus mit Inverser  $U \times \text{SO}_n \rightarrow p^{-1}(U)$ ,  $(x, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) \mapsto \sigma(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Also ist  $p : \text{SO}_{n+1} \rightarrow S^n$  ein Faserbündel und daher auch eine Serre Faserung, siehe Proposition III.6.7. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\cdots \rightarrow \pi_{k+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\text{SO}_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\text{SO}_{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^n) \rightarrow \cdots \quad (\text{III.18})$$

wobei  $i : \text{SO}_n \rightarrow \text{SO}_{n+1}$  die Inklusion bezeichnet. Für  $k = 0$  und  $n \geq 1$  ist  $\pi_0(S^n) = 0$  und wegen der Exaktheit von (III.18) daher  $i_* : \pi_0(\text{SO}_n) \rightarrow \pi_0(\text{SO}_{n+1})$  surjektiv. Induktiv folgt  $\pi_0(\text{SO}_n) = 0$ , denn offensichtlich ist  $\pi_0(\text{SO}_1) = 0$ . Wir sehen daher, dass  $\text{SO}_n$  für jedes  $n \geq 1$  wegzusammenhängend ist. Für  $k + 2 \leq n$  ist  $\pi_{k+1}(S^n) = 0 = \pi_k(S^n)$ , siehe Satz III.5.25, wegen der Exaktheit von (III.18) induziert die Inklusion  $i : \text{SO}_n \rightarrow \text{SO}_{n+1}$  daher Isomorphismen  $\pi_k(\text{SO}_n) \cong \pi_k(\text{SO}_{n+1})$ ,  $k + 2 \leq n$ . Mittels Induktion folgt

$$\pi_k(\text{SO}_{k+2}) \cong \pi_k(\text{SO}_n), \quad k + 2 \leq n. \quad (\text{III.19})$$

Für hinreichend große  $n$  ist daher  $\pi_k(\text{SO}_n)$  unabhängig von  $n$ , dies wird als *Stabilität* bezeichnet. Etwa erhalten wir

$$\mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\text{SO}_3) \cong \pi_1(\text{SO}_4) \cong \pi_1(\text{SO}_5) \cong \cdots,$$

denn  $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_2 \cong \text{SO}_3$  ist die universelle Überlagerung von  $\text{SO}_3$  und daher  $\pi_1(\text{SO}_3) \cong \mathbb{Z}_2$ , vgl. die Beispiele II.5.5 und II.6.3. Da  $\text{SO}_2 \cong S^1$  ist  $\pi_1(\text{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$ . Für die stabilen zweiten Homotopiegruppen erhalten wir

$$0 = \pi_2(\text{SO}_4) \cong \pi_2(\text{SO}_5) \cong \pi_2(\text{SO}_6) \cong \cdots,$$

denn aus der Überlagerung  $S^3 \times S^3 \rightarrow \text{SO}_4$ , siehe Beispiel II.5.10, folgt mittels Satz III.3.19 und Satz III.5.25,  $\pi_2(\text{SO}_4) \cong \pi_2(S^3 \times S^3) \cong \pi_2(S^3) \times \pi_2(S^3) = 0$ . Im nicht stabilen Bereich gilt  $\pi_2(\text{SO}_2) = 0$ , denn  $\text{SO}_2 \cong S^1$ , und  $\pi_2(\text{SO}_3) = 0$ , auf Grund der Überlagerung  $S^3 \rightarrow \text{SO}_3$ .

Da die Inklusion  $\text{SO}_n \rightarrow \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$  eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiel I.8.14, gilt  $\pi_k(\text{SO}_n) \cong \pi_k(\text{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ . Folglich sind alle  $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$  wegzusammenhängend und es gilt  $\pi_1(\text{GL}_1^+(\mathbb{R})) = 0$ ,  $\pi_1(\text{GL}_2^+(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(\text{GL}_n^+(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $n \geq 3$ , sowie  $\pi_2(\text{GL}_n^+(\mathbb{R})) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Auch die Inklusion  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$  ist eine Homotopieäquivalenz und daher  $\pi_k(\text{SL}_n(\mathbb{R})) \cong \pi_k(\text{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ .

Aus dem Wegzusammenhang von  $\text{SO}_n$  folgt auch, dass  $\text{O}_n$  genau zwei Wegzusammenhangskomponenten besitzt,  $\text{O}_n = \text{SO}_n \sqcup \{A \in \text{O}_n : \det A = -1\}$ . Ist  $B \in \text{O}_n$  und  $\det B = -1$  dann liefert Multiplikation mit  $B$  einen Homöomorphismus  $\text{SO}_n \cong \{A \in \text{O}_n : \det A = -1\}$ . Es gilt daher  $\pi_0(\text{O}_n) \cong \mathbb{Z}_2$  und  $\pi_k(\text{O}_n) \cong \pi_k(\text{SO}_n)$ ,  $1 \leq k$ , egal welchen Basispunkt wir in  $\text{O}_n$  verwenden. Aus

(III.19) erhalten wir daher auch für  $O_n$  ein Stabilitätsphänomen,

$$\pi_k(O_{k+2}) \cong \pi_k(O_n), \quad k + 2 \leq n.$$

Da die Inklusion  $O_n \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  eine Homotopieäquivalenz ist, erhalten wir auch entsprechende Resultate für die Homotopiegruppen von  $GL_n(\mathbb{R})$ . Insbesondere folgt, dass  $GL_n(\mathbb{R})$  aus zwei homöomorphen Zusammenhangskomponenten besteht,  $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \sqcup GL_n^-(\mathbb{R})$ , wobei  $GL_n^- = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A < 0\}$ . Multiplikation mit  $B \in GL_n^-(\mathbb{R})$  liefert einen Homöomorphismus  $GL_n^+(\mathbb{R}) \cong GL_n^-(\mathbb{R})$ .

Ohne Beweis sei hier noch folgendes Periodizitätsresultat für die stabilen Homotopiegruppen erwähnt:

$$\pi_{k+8}(O_{(k+8)+2}) \cong \pi_k(O_{k+2}).$$

Dies wird als *Bott Periodizität* bezeichnet. Die Gruppen sind durch

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} k \bmod 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \pi_k(O_{k+2}) & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} \end{array}$$

gegeben. Die ersten drei Spalten folgen aus unseren Berechnungen oben.

III.6.19. BEISPIEL (Homotopiegruppen der unitären Gruppen). Nun zur komplexen Version von Beispiel III.6.18. Betrachte die Abbildung  $p : U_{n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ ,  $p(A) := Ae_1$ , wobei  $e_1 \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Wir verifizieren zunächst, dass  $p$  ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu  $U_n$  ist. Wir werden im folgenden  $U_n$  als Untergruppe von  $U_{n+1}$  auffassen,  $U_n = \{A \in U_{n+1} : Ae_1 = e_1\} = p^{-1}(e_1)$ . Für  $A, B \in U_{n+1}$  gilt offensichtlich  $p(A) = p(B)$  genau dann wenn  $B^{-1}A \in U_n$ . Sei nun  $b_0 \in S^{2n+1}$  und wähle  $b_1, \dots, b_n \in S^{2n+1}$ , sodass  $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in U_{n+1}$ . Dann ist  $V := \{z \in S^{2n+1} : \det(z, b_1, \dots, b_n) \neq 0\}$  eine offene Umgebung von  $b_0$ . Wir werden nun eine Trivialisierung von  $p$  über  $V$  konstruieren. Wir erinnern uns dazu, dass  $U_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{C})$ ,  $(A, D) \mapsto AD$ , einen Homöomorphismus definiert, siehe Beispiel I.7.10. Wir bezeichnen den inversen Homöomorphismus mit  $(\psi_1, \psi_2) : GL_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow U_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{C})$ . Es ist dann  $\sigma : V \rightarrow U_{n+1}$ ,  $\sigma(z) := \psi_1(z, b_1, \dots, b_n)$ , eine stetige Abbildung mit  $p(\sigma(z)) = z$ , für  $z \in V$ , denn aus  $\psi_1(z, b_1, \dots, b_n)\psi_2(z, b_1, \dots, b_n) = (z, b_1, \dots, b_n)$  und  $|z| = 1$  folgt, dass die erste Spalte von  $\psi_2(z, b_1, \dots, b_n)$  mit dem ersten Einheitsvektor  $e_1$  übereinstimmen muss. Für  $A \in p^{-1}(V)$  erhalten wir  $p(\sigma(p(A))) = p(A)$ , also  $\sigma(p(A))^{-1}p(A) \in U_n \subseteq U_{n+1}$ . Wir definieren nun die gesuchte Trivialisierung durch  $\varphi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times U_n$ ,  $\varphi(A) := (p(A), \sigma(p(A))^{-1}A)$ . Dies ist tatsächlich ein Homöomorphismus mit Inverser  $V \times U_n \rightarrow p^{-1}(V)$ ,  $(z, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) \mapsto \sigma(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Also ist  $p : U_{n+1} \rightarrow S^{2n+1}$  ein Faserbündel und daher auch eine Serre Faserung, siehe Proposition III.6.7. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(U_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(U_{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \rightarrow \dots \quad (\text{III.20})$$

wobei  $i : U_n \rightarrow U_{n+1}$  die Inklusion bezeichnet. Für  $k = 0$  und  $n \geq 1$  ist  $\pi_0(S^{2n+1}) = 0$  und wegen der Exaktheit von (III.20) daher  $i_* : \pi_0(U_n) \rightarrow \pi_0(U_{n+1})$  surjektiv. Induktiv folgt  $\pi_0(U_n) = 0$ , denn wegen  $U_1 \cong S^1$  ist  $\pi_0(U_1) = 0$ . Wir sehen daher, dass  $U_n$  für jedes  $n \geq 1$  wegzusammenhängend ist. Für  $k \leq 2n - 1$  ist  $\pi_{k+1}(S^{2n+1}) = 0 = \pi_k(S^{2n+1})$ , siehe Satz III.5.25, wegen der Exaktheit von (III.20) induziert die Inklusion  $i : U_n \rightarrow U_{n+1}$  daher Isomorphismen  $\pi_k(U_n) \cong \pi_k(U_{n+1})$ ,  $k \leq 2n - 1$ . Mittels Induktion folgt

$$\pi_k(U_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) \cong \pi_k(U_n), \quad \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \leq n, \quad (\text{III.21})$$

wobei  $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $\frac{k+1}{2}$  bezeichnet. Für hinreichend große  $n$  ist daher  $\pi_k(U_n)$  unabhängig von  $n$ , wieder liegt ein Stabilitätsphänomen vor. Wegen  $U_1 \cong S^1$  und (III.21) erhalten wir

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(U_1) \cong \pi_1(U_2) \cong \pi_1(U_3) \cong \dots$$

Da  $U_2 \cong \text{SU}_2 \times S^1 \cong S^3 \times S^1$  folgt  $\pi_2(U_2) \cong \pi_2(S^3) \times \pi_2(S^1) = 0$  und daher

$$0 = \pi_2(U_1) \cong \pi_2(U_2) \cong \pi_2(U_3) \cong \dots$$

Erinnern wir uns an den Homöomorphismus  $U_n \cong \text{SU}_n \times S^1$  aus Beispiel I.7.9, so erhalten wir  $\pi_k(U_n) \cong \pi_k(\text{SU}_n) \times \pi_k(S^1)$ . Es folgt  $\pi_0(\text{SU}_n) = 0$ , dh. alle  $\text{SU}_n$  sind wegzusammenhängend. Aus  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(U_n) \cong \pi_1(\text{SU}_n) \times \pi_1(\mathbb{Z}) \cong \pi_1(\text{SU}_n) \times \mathbb{Z}$  schließen wir  $\pi_1(\text{SU}_n) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Daher sind alle  $\text{SU}_n$  einfach zusammenhängend. Für  $k \geq 2$  gilt  $\pi_k(\text{SU}_n) \cong \pi_k(U_n)$ . Da die kanonischen Inklusionen  $U_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  und  $\text{SU}_n \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{C})$  Homotopieäquivalenzen sind erhalten wir  $\pi_k(U_n) \cong \pi_k(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$  und  $\pi_k(\text{SU}_n) \cong \pi_k(\text{SL}_n(\mathbb{C}))$ . Insbesondere ist  $\text{SL}_n(\mathbb{C})$  einfach zusammenhängend, für jedes  $n \geq 1$ .

Schließlich sei noch die komplexe Version der Bott Periodizität erwähnt,

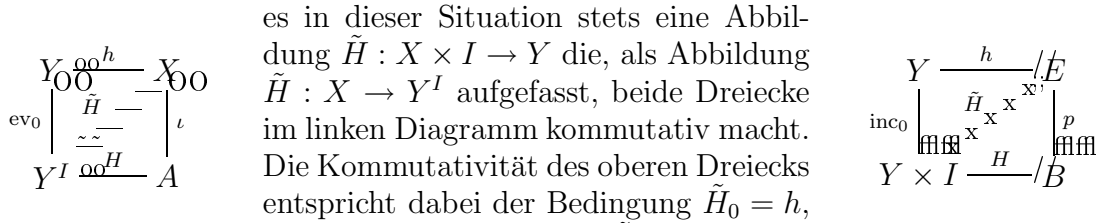
$$\pi_{k+2}(U_{\lceil \frac{(k+2)+1}{2} \rceil}) \cong \pi_k(U_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}),$$

es gilt daher  $\pi_k(U_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) = 0$  für gerades  $k$  und  $\pi_k(U_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) \cong \mathbb{Z}$  für ungerades  $k$ .

**III.7. Kofaserungen.** Eine stetige Abbildung  $\iota : A \rightarrow X$  wird *Kofaserung* genannt wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Ist  $Y$  ein topologischer Raum,  $h : X \rightarrow Y$  stetig und  $H : A \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie mit  $H_0 = h \circ \iota$ , dann existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  mit  $\tilde{H}_0 = h$  und  $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$ , für alle  $t \in I$ . Wir sagen ein Paar  $(X, A)$  hat die *Homotopieerweiterungseigenschaft* wenn die Inklusion  $\iota : A \rightarrow X$  eine Kofaserung ist. Dies bedeutet, dass eine auf  $A \subseteq X$  definierte Homotopie  $H : A \times I \rightarrow Y$  deren Anfangsabbildung  $H_0$  zu einer Abbildung  $h : X \rightarrow Y$  ausgedehnt ist (dh.  $h(a) = H_0(a)$ ,  $a \in A$ ) zu einer Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  fortgesetzt werden kann (dh.  $\tilde{H}(a, t) = H(a, t)$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ ) deren Anfangsabbildung  $\tilde{H}_0$  mit  $h$  übereinstimmt (dh.  $\tilde{H}(x, 0) = h(x)$ ,  $x \in X$ .)



III.7.1. BEMERKUNG. Der Begriff der Kofaserungen ist dual zum Begriff der Faserung. Sei dazu  $\iota : A \rightarrow Y$ ,  $h : X \rightarrow Y$  und  $H : A \times I \rightarrow Y$ . Wir bezeichnen mit  $Y^I$  die Menge der stetigen Abbildungen  $I \rightarrow Y$ . Beachte, dass  $H$  als Abbildung  $H : A \rightarrow Y^I$  aufgefasst werden kann,  $H(a)(t) := H(a, t)$ .<sup>34</sup> Weiters bezeichne  $ev_0 : Y^I \rightarrow Y$  die durch Auswertung bei  $t = 0$  gegebene Abbildung. Die Voraussetzung  $H_0 = h \circ \iota$  bedeutet gerade, dass das äussere Quadrat im linken Diagramm kommutiert,  $ev_0 \circ H = h \circ \iota$ . Liegt eine Kofaserung vor, dann gibt



es in dieser Situation stets eine Abbildung  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  die, als Abbildung  $\tilde{H} : X \rightarrow Y^I$  aufgefasst, beide Dreiecke im linken Diagramm kommutativ macht. Die Kommutativität des oberen Dreiecks entspricht dabei der Bedingung  $\tilde{H}_0 = h$ , und die des unteren Dreiecks der Bedingung  $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$ . Die Dualität mit dem Begriff der Faserung manifestiert sich nun in der Tatsache, dass in der eine Faserung charakterisierende Eigenschaft, siehe das Diagramm rechts, alle Pfeile in die umgekehrte Richtung zeigen. Dies wird als *Eckmann–Hilton Dualität* bezeichnet.

III.7.2. PROPOSITION. *Eine Kofaserung  $\iota : A \rightarrow X$  ist stets ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dh.  $\iota : A \rightarrow \iota(A)$  ist ein Homöomorphismus, wobei  $\iota(A)$  mit der von  $X$  induzierten Topologie versehen ist.*

BEWEIS. Wir betrachten den Abbildungszyylinder  $Z_\iota = X \sqcup (A \times I) /_{(a,1) \sim \iota(a)}$ , vgl. Beispiel I.9.11, sowie die Abbildungen  $H : A \times I \rightarrow Z_\iota$ ,  $H(a, t) := [(a, 1 - t)]$ , und  $h : X \rightarrow Z_\iota$ ,  $h(x) := [x]$ . Dies sind stetige Abbildungen und es gilt  $h \circ \iota = H_0$ , denn  $h(\iota(a)) = [\iota(a)] = [(a, 1)] = H(a, 0)$  für  $a \in A$ . Da  $\iota$  eine Kofaserung ist existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z_\iota$  mit  $\tilde{H}_0 = h$  und  $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$ ,  $t \in I$ . Insbesondere gilt  $\tilde{H}_1 \circ \iota = H_1$ . Wir erinnern uns, dass  $H_1 : A \rightarrow Z_\iota$ ,  $a \mapsto [(a, 0)]$ , eine Einbettung ist, dh.  $H_1 : A \rightarrow H_1(A)$  ist ein Homöomorphismus. Es liefert daher  $(H_1)^{-1} \circ \tilde{H}_1|_{\iota(A)} : \iota(A) \rightarrow H_1(A) \rightarrow A$  eine zu  $\iota$  inverse stetige Abbildung. □

III.7.3. BEMERKUNG. Auf Grund von Proposition III.7.2 ist  $\iota : A \rightarrow X$  genau dann eine Kofaserung, wenn das Paar  $(X, \iota(A))$  die Homotopieerweiterungseigenschaft. Es genügt daher Paare mit Homotopieerweiterungseigenschaft zu untersuchen.

III.7.4. LEMMA. *Hat  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft dann ist  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ein Retrakt von  $X \times I$ .*

BEWEIS. Betrachte die stetigen Abbildungen  $h : X \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ,  $h(x) := (x, 0)$ , und  $H : A \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ,  $H(a, t) := (a, t)$ . Offensichtlich

---

<sup>34</sup>Wir wollen zu diesem Zeitpunkt noch keine Topologie auf  $Y^I$  einführen, versuchen hier also nicht die stetigen Abbildungen  $A \times I \rightarrow Y$  als die stetigen Abbildungen  $A \rightarrow Y^I$  zu charakterisieren.

gilt  $H_0 = h|_A$ , wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft von  $(X, A)$  existiert daher eine Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  mit  $\tilde{H}_0 = h$  und  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$ . Es folgt  $\tilde{H}(x, 0) = (x, 0)$ ,  $x \in X$ , und  $\tilde{H}(a, t) = (a, t)$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ , also ist  $\tilde{H}$  eine Retraktion auf  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ .  $\square$

III.7.5. PROPOSITION. *Ist  $X$  ein Hausdorffraum und hat  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft, dann ist  $A$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$ .*

BEWEIS. Nach Lemma III.7.4 existiert eine Retraktion  $r : X \times I \rightarrow X \times I$ , sodass  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) = \{(x, t) \in X \times I : r(x, t) = (x, t)\}$ . Mit  $X$  ist auch  $X \times I$  ein Hausdorffraum, aus der Stetigkeit von  $r$  folgt daher, dass  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X \times I$  ist. Daher ist auch  $A \times \{1\}$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X \times \{1\}$ , also  $A$  abgeschlossen in  $X$ .  $\square$

III.7.6. PROPOSITION. *Es sei  $A$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$ . Dann hat  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft genau dann, wenn  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ein Retrakt von  $X \times I$  ist.*

BEWEIS. Eine Implikation haben wir bereits in Lemma III.7.4 bewiesen. Sei nun umgekehrt  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ein Retrakt von  $X \times I$  und  $r : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  eine Retraktion. Um die Homotopieerweiterungseigenschaft von  $(X, A)$  zu verifizieren betrachten wir eine stetige Abbildung  $h : X \rightarrow Y$  sowie eine Homotopie  $H : A \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = h|_A$ . Definiere eine Abbildung  $g : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y$  durch  $g(x, 0) := h(x)$ ,  $x \in X$ , und  $g(a, t) := H(a, t)$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Wegen  $H_0 = h|_A$  ist dies wohldefiniert. Beachte, dass  $X \times \{0\}$  ein abgeschlossener Teilraum von  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ist. Wegen der Abgeschlossenheit von  $A$ , ist auch  $A \times I$  ein abgeschlossener Teilraum von  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ . Die Einschränkungen von  $g$  auf  $X \times \{0\}$  bzw.  $A \times I$  sind stetig. Nach Lemma I.1.2 ist daher auch  $g$  stetig. Also liefert  $\tilde{H} := g \circ r : X \times I \rightarrow Y$  die gewünschte Homotopie.  $\square$

III.7.7. PROPOSITION. *Hat das Paar  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft und ist  $Z$  ein weiterer topologischer Raum dann hat auch das Paar  $(X \times Z, A \times Z)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft.*

BEWEIS. Wir geben den Beweis nur für den Fall, dass  $X$  ein Hausdorffraum ist. Nach Lemma III.7.4 ist  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  ein Retrakt von  $X \times I$ . Damit ist auch  $(X \times Z \times \{0\}) \cup (A \times Z \times I)$  ein Retrakt von  $X \times Z \times I$ . Nach Proposition III.7.6 hat daher auch  $(X \times Z, A \times Z)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft. Beachte hier, dass  $A$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$  ist, siehe Proposition III.7.5, und damit auch  $A \times Z$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X \times Z$  ist.  $\square$

III.7.8. BEISPIEL. Es sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $Z_f = (Y \sqcup (X \times I)) / (x, 1) \sim f(x)$  der Abbildungszylinder. Weiters bezeichne  $\iota : X \sqcup Y \rightarrow Z_f$  die durch  $\iota(x) = [(x, 0)]$ ,

$x \in X$ , und  $\iota(y) = [y]$ ,  $y \in Y$ , definierte Einbettung. Dann ist  $\iota$  eine Kofaserung. Fassen wir  $X \sqcup Y$  als Teilraum in  $Z_f$  auf dann besagt dies gerade, dass das Paar  $(Z_f, X \cup Y)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft hat. Offensichtlich folgt daraus, dass auch  $(Z_f, X)$  und  $(Z_f, Y)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft haben. Bis auf Homotopie(äquivalenz) kann daher jede Abbildung als Kofaserung betrachtet werden, vgl. Beispiel I.9.11. Um die Homotopieerweiterungseigenschaft von  $(Z_f, X \cup Y)$  zu verifizieren betrachten wir die kanonische Projektion  $p : Y \sqcup (X \times I) \rightarrow Z_f$  und wählen eine Retraktion  $r = (r_1, r_2) : I \times I \rightarrow I \times I$  auf  $(I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$ . Wir definieren eine stetige Abbildung  $r' : (Y \sqcup (X \times I)) \times I \rightarrow Z_f \times I$  durch  $r'(y, t) := (y, t)$  für  $(y, t) \in Y \times I$ , und  $r'(x, s, t) := (p(x, r_1(s, t)), r_2(s, t))$  für  $(x, s, t) \in X \times I \times I$ . Aus  $r_1(1, t) = 1$  und  $r_2(1, t) = t$  erhalten wir  $r'(x, 1, t) = r'(f(x), t)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in I$ , also faktorisiert  $r'$  zu einer Abbildung  $r'' : Z_f \times I \rightarrow Z_f \times I$ , dh.  $r' = r'' \circ (p \times \text{id}_I)$ . Mit  $p$  ist auch  $p \times \text{id}_I : (Y \sqcup (X \times I)) \times I \rightarrow Z_f \times I$  eine Quotientenabbildung, siehe [10, Satz 5 in Kapitel I.7.9], also ist  $r''$  stetig. Setze  $W := (Z_f \times \{0\}) \cup ((X \cup Y) \times I) \subseteq Z_f \times I$ . Nach Konstruktion gilt  $r''(Z_f \times I) \subseteq W$  und  $r''|_W = \text{id}_W$ , also ist  $r''$  eine Retraktion von  $Z_f \times I$  auf  $W$ . Da  $X \cup Y$  angeschlossen in  $Z_f$  ist, folgt nun aus Proposition III.7.6, dass  $(Z_f, X \cup Y)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft hat.

III.7.9. BEISPIEL. Das Paar  $(D^n, S^{n-1})$  hat die Homotopieerweiterungseigenschaft. Dies folgt aus Beispiel III.7.8, denn  $D^n$  ist homöomorph zum Abbildungszylinder der konstanten Abbildung  $S^{n-1} \rightarrow \{*\}$ . Alternativ könnten wir in diesem einfach Beispiel auch explizit eine Retraktion  $r : D^n \times I \rightarrow (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$  angeben und mit Hilfe von Proposition III.7.6 argumentieren. Das Paar  $(I^n, \partial I^n)$  ist homöomorph zu  $(D^n, S^{n-1})$  und hat daher ebenfalls die Homotopieerweiterungseigenschaft.

III.7.10. PROPOSITION. *Es habe  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft und  $A$  sei kontrahierbar. Dann ist die kanonische Projektion  $p : X \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Da  $A$  kontrahierbar ist existieren ein Punkt  $a_0 \in A$  und eine Homotopie  $H : A \times I \rightarrow A$  mit  $H_0 = \text{id}_A$  und  $H_1(A) = \{a_0\}$ . Weiters sei  $h := \text{id}_X : X \rightarrow X$ . Auf Grund der Homotopieerweiterungseigenschaft von  $(X, A)$  existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow X$  mit  $\tilde{H}_0 = h$  und  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$ . Es folgt  $\tilde{H}(x, 0) = x$ ,  $\tilde{H}(a, t) \in A$  und  $\tilde{H}(a, 1) = a_0$ , für alle  $x \in X$ ,  $a \in A$  und  $t \in I$ . Wegen  $\tilde{H}(a, t) \in A$  faktorisiert  $\tilde{H}$  zu einer Abbildung  $\bar{H} : X/A \times I \rightarrow X/A$ , dh.  $p \circ \tilde{H} = \bar{H} \circ (p \times \text{id}_I)$ . Beachte, dass  $\bar{H}$  stetig ist, denn  $p \times \text{id}_I : X \times I \rightarrow X/A \times I$  ist eine Quotientenabbildung. Da  $\tilde{H}_1(a) = a_0$  faktorisiert  $\tilde{H}_1$  zu einer stetigen Abbildung  $g : X/A \rightarrow X$ , dh.  $g \circ p = \tilde{H}_1$ . Aus der Surjektivität von  $p : X \rightarrow X/A$  folgt nun auch  $p \circ g = \bar{H}_1$ , denn zu  $z \in X/A$  existiert  $x \in X$  mit  $p(x) = z$  und daher  $p(g(z)) = p(g(p(x))) = p(\tilde{H}_1(x)) = \tilde{H}_1(p(x)) = \bar{H}_1(z)$ . Insgesamt erhalten wir  $g \circ p = \tilde{H}_1 \stackrel{\tilde{H}}{\simeq} \tilde{H}_0 = \text{id}_X$  und  $p \circ g = \bar{H}_1 \stackrel{\bar{H}}{\simeq} \bar{H}_0 = \text{id}_{X/A}$ . Also ist  $p$  eine Homotopieäquivalenz.  $\square$

Ist  $A \subseteq X$  ein Teilraum dann werden zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  *homotop relativ A* genannt, falls eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$  und  $H_t(a) = a$  existieren,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Insbesondere müssen  $f$  und  $g$  auf  $A$  übereinstimmen. Wir schreiben in diesem Fall  $f \simeq g \text{ rel } A$ , und nennen  $H$  eine Homotopie relativ  $A$ . Homotop relativ  $A$  zu sein ist eine Äquivalenzrelation. Ist  $\iota : A \rightarrow X$  eine Kofaserung dann nennen wir zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  *homotop relativ A* falls sie homotop relativ  $\iota(A)$  sind, dh. falls eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$  und  $H_t \circ \iota = \iota$  existiert,  $t \in I$ , vgl. Proposition III.7.2.

III.7.11. SATZ. *Es seien  $i : A \rightarrow X$  und  $j : A \rightarrow Y$  zwei Kofaserungen. Weiters sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz mit  $f \circ i = j$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ j = i$ ,  $g \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ rel } A$ , dh. es existieren Homotopien  $H : X \times I \rightarrow X$  und  $G : Y \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = g \circ f$ ,  $H_1 = \text{id}_X$ ,  $G_0 = f \circ g$ ,  $G_1 = \text{id}_Y$ ,  $H_t \circ i = j$  und  $G_t \circ j = i$  für alle  $t \in I$ .*

Wir beginnen den Beweis von Satz III.7.11 mit einigen Lemmata.

III.7.12. LEMMA. *Es seien  $i : A \rightarrow X$  und  $j : A \rightarrow Y$  Kofaserungen und  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f \circ i = j$ . Weiters existiere eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $g' : Y \rightarrow X$  mit  $g' \circ j = i$  und  $g' \simeq g$ .*

BEWEIS. Da  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = g \circ f$  und  $H_1 = \text{id}_X$ . Betrachte die Homotopie  $G : A \times I \rightarrow X$ ,  $G := H \circ (i \times \text{id}_I)$ . Offensichtlich ist  $G_0 = H_0 \circ i = g \circ f \circ i = g \circ j$  und  $G_1 = H_1 \circ i = i$ . Da  $j$  eine Kofaserung ist, existiert eine Homotopie  $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow X$  mit  $\tilde{G}_0 = g$  und  $\tilde{G}_t \circ j = G_t$ , für alle  $t \in I$ . Betrachte nun  $g' := \tilde{G}_1 : Y \rightarrow X$ . Es gilt dann  $g' = \tilde{G}_1 \simeq \tilde{G}_0 = g$  via  $\tilde{G}$ , und  $g' \circ j = \tilde{G}_1 \circ j = G_1 = i$ .  $\square$

III.7.13. LEMMA. *Es sei  $i : A \rightarrow X$  eine Kofaserung und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, sodass  $f \circ i = i$  und  $f \simeq \text{id}_X$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $k : X \rightarrow X$  mit  $k \circ i = i$  und  $k \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = k \circ f$ ,  $H_1 = \text{id}_X$  und  $H_t \circ i = i$ .*

BEWEIS. Da  $f \simeq \text{id}_X$  existiert eine Homotopie  $F : X \times I \rightarrow X$  mit  $F_0 = f$  und  $F_1 = \text{id}_X$ . Betrachte nun die Homotopie  $G : A \times I \rightarrow X$ ,  $G := F \circ (i \times \text{id}_I)$ . Da  $G_0 = F_0 \circ i = f \circ i = i = \text{id}_X \circ i$  und weil  $i$  eine Kofaserung ist existiert eine Homotopie  $\tilde{G} : X \times I \rightarrow X$  mit  $\tilde{G}_0 = \text{id}_X$  und  $\tilde{G}_t \circ i = G_t$ . Setzen wir  $k := \tilde{G}_1 : X \rightarrow X$ , dann gilt  $k \circ i = \tilde{G}_1 \circ i = G_1 = F_1 \circ i = i$ . Es bleibt noch  $k \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$  zu zeigen. Für die Konstruktion von  $H$  betrachten wir zunächst

$$l : X \times I \rightarrow X, \quad l(x, s) := \begin{cases} \tilde{G}(f(x), 1 - 2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ F(x, 2s - 1) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Beachte, dass  $l$  wegen  $\tilde{G}(f(x), 1 - 2\frac{1}{2}) = \tilde{G}_0(f(x)) = f(x) = F_0(x) = F(x, 2\frac{1}{2} - 1)$  wohldefiniert und stetig ist, vgl. Lemma I.1.2. Offensichtlich gilt  $l_0 = k \circ f$  und  $l_1 = \text{id}_X$ . Weiters betrachten wir  $L : A \times I \times I \rightarrow X$ ,

$$L(a, s, t) := \begin{cases} \tilde{G}(i(a), 1 - 2s(1-t)) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ F(i(a), 1 - 2(1-s)(1-t)) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Lemma I.1.2 und  $\tilde{G}(i(a), 1 - 2\frac{1}{2}(1-t)) = \tilde{G}_t(i(a)) = G_t(a) = F_t(i(a)) = F(i(a), 1 - 2(1 - \frac{1}{2})(1-t))$  folgt, dass  $L$  wohldefiniert und stetig ist. Mit  $i : A \rightarrow X$  ist auch  $i \times \text{id}_I : A \times I \rightarrow X \times I$  eine Kofaserung, siehe Proposition III.7.7. Offensichtlich gilt  $L(a, s, 0) = l(i(a), s)$ , also existiert eine Homotopie  $\tilde{L} : X \times I \times I \rightarrow X$  mit  $\tilde{L}(x, s, 0) = l(x, s)$  und  $\tilde{L}(i(a), s, t) = L(a, s, t)$ ,  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $s, t \in I$ . Wir können nun die gesuchte Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  durch

$$H(x, t) := \begin{cases} \tilde{L}(x, 0, 3t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \tilde{L}(x, 3t - 1, 1) & \text{falls } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \tilde{L}(x, 1, 3 - 3t) & \text{falls } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definieren. Aus  $H_0(x) = \tilde{L}(x, 0, 0) = l_0(x) = (k \circ f)(x)$  erhalten wir  $H_0 = k \circ f$ , und aus  $H_1(x) = \tilde{L}(x, 1, 0) = l_1(x) = x$  folgt  $H_1 = \text{id}_X$ . Es bleibt noch  $H_t \circ i = i$  zu verifizieren. Dies folgt aber sofort aus  $\tilde{L}(i(a), 0, t) = L(a, 0, t) = \tilde{G}_1(i(a)) = k(i(a)) = i(a)$ ,  $\tilde{L}(i(a), 1, t) = L(a, 1, t) = F_1(i(a)) = i(a)$  und  $\tilde{L}(i(a), s, 1) = L(a, s, 1) = i(a)$ ,  $a \in A$ ,  $s, t \in I$ .  $\square$

III.7.14. LEMMA. *Es seien  $i : A \rightarrow X$ ,  $j : A \rightarrow Y$  Kofaserungen und  $f : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f \circ i = j$ . Weiters existiere  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ . Dann existiert auch eine stetige Abbildung  $g' : Y \rightarrow X$  mit  $g' \circ j = i$  und  $g' \circ f \simeq \text{id}_X$  rel  $A$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$ ,  $H_1 = g' \circ f$ ,  $H_0 = \text{id}_X$ ,  $H_t \circ i = i$ .*

BEWEIS. Nach Lemma III.7.12 existiert eine stetige Abbildung  $g'' : Y \rightarrow X$  mit  $g'' \circ j = i$  und  $g'' \circ f \simeq \text{id}_X$ . Offensichtlich gilt  $(g'' \circ f) \circ i = i$ . Wenden wir Lemma III.7.13 auf  $g'' \circ f$  an erhalten wir eine stetige Abbildung  $k : X \rightarrow X$  mit  $k \circ i = i$  und  $k \circ g'' \circ f \simeq \text{id}_X$  rel  $A$ . Für  $g' := k \circ g'' : Y \rightarrow X$  gilt dann  $g' \circ j = i$  und  $g' \circ f \simeq \text{id}_X$  rel  $A$ .  $\square$

BEWEIS VON SATZ III.7.11. Aus Lemma III.7.14 erhalten wir eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ j = i$  und  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  rel  $A$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = g \circ f$ ,  $H_1 = \text{id}_X$  und  $H_t \circ i = i$ . Mit  $f$  ist auch  $g$  eine Homotopieäquivalenz. Wenden wir nun Lemma III.7.14 auf  $g$  an so erhalten wir eine stetige Abbildung  $f' : X \rightarrow Y$  mit  $f' \circ i = j$  und  $f' \circ g \simeq \text{id}_Y$  rel  $A$ , dh. es existiert eine Homotopie  $G' : Y \times I \rightarrow Y$  mit  $G'_0 = f' \circ g$ ,  $G'_1 = \text{id}_Y$  und  $G'_t \circ j = j$ . Es ist nun  $f' \circ g \circ f \circ g \simeq f \circ g$  rel  $A$  via der Homotopie  $G' \circ ((f \circ g) \times \text{id}_I)$ , aber auch  $f' \circ g \circ f \circ g \simeq f' \circ g$  rel  $A$  via der Homotopie  $f' \circ H \circ (g \times \text{id}_I)$ . Es folgt  $f \circ g \simeq f' \circ g$  rel  $A$  und damit auch  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  rel  $A$ .  $\square$

Hat ein Paar  $(X, A)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft so stimmen die verschiedenen Begriffe von Deformationsretraktionen die wir in Definition I.8.7 besprochen haben überein. Genauer gilt

III.7.15. KOROLLAR. *Das Paar  $(Y, A)$  habe die Homotopieerweiterungseigenschaft. Dann sind äquivalent:*

- (i)  *$A$  ist Deformationsretrakt von  $Y$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : Y \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = \text{id}_Y$ ,  $H_1(Y) \subseteq A$  und  $H_t|_A = \text{id}_A$  für alle  $t \in I$ .*
- (ii)  *$A$  ist schwacher Deformationsretrakt von  $Y$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : Y \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = \text{id}_Y$ ,  $H_1(Y) \subseteq A$  und  $H_1|_A = \text{id}_A$ .*
- (iii) *Die kanonische Inklusion  $\iota : A \rightarrow Y$  ist eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Ist  $H$  eine Homotopie wie in (ii) und setzen wir  $r := H_1 : Y \rightarrow A$ , dann gilt  $r \circ \iota = \text{id}_A$  sowie  $\iota \circ r = H_1 \stackrel{H}{\simeq} H_0 = \text{id}_Y$ , also ist  $\iota$  eine Homotopieäquivalenz und damit die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) gezeigt. Nun zum Beweis von (iii) $\Rightarrow$ (i). Wenden wir Satz III.7.11 auf  $X := A$ ,  $f := \iota$  und die beiden Kofaserungen  $i := \text{id}_A$ ,  $j := \iota$  an, so erhalten wir eine Homotopie  $G : Y \times I \rightarrow Y$  mit  $G_0(Y) \subseteq A$ ,  $G_1 = \text{id}_Y$  und  $G_t|_A = \text{id}_A$ ,  $t \in I$ . Es ist daher  $H(x, t) := G(x, 1 - t)$  die gesuchte retrahierende Deformation.  $\square$

III.7.16. KOROLLAR. *Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn  $X$  Deformationsretrakt von  $Z_f$  ist. Dabei fassen wir wieder  $X$  als Teilraum des Abbildungszyklinders  $Z_f = (Y \sqcup (X \times I)) /_{(x,1) \sim f(x)}$  auf,  $x \mapsto [(x, 0)]$ ,*

BEWEIS. Es bezeichnen  $i : X \rightarrow Z_f$  und  $j : Y \rightarrow Z_f$  die kanonischen Einbettungen. Nach Beispiel I.9.11 ist  $j$  eine Homotopieäquivalenz und  $j \circ f \simeq i$ . Es ist daher  $i$  eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn  $f$  eine ist. Zusammen mit Korollar III.7.15 und Beispiel III.7.8 folgt die Behauptung.  $\square$

III.7.17. KOROLLAR. *Zwei topologische Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn ein topologischer Raum  $Z$  existiert der sowohl  $X$  als auch  $Y$  als Deformationsretrakt enthält.*

BEWEIS. Sind  $X$  und  $Y$  als Deformationsretrakte in  $Z$  eingebettet dann folgt sofort  $X \simeq Z \simeq Y$  und daher  $X \simeq Y$ . Sei nun umgekehrt  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz und  $Z_f$  ihr Abbildungszyklinder. Nach Korollar III.7.16 ist  $X$  ein Deformationsretrakt von  $Z_f$ . Nach Beispiel I.9.11 ist auch  $Y$  ein Deformationsretrakt von  $Z_f$ . Also folgt die Behauptung mit  $Z := Z_f$ .  $\square$

**III.8. CW-Komplexe.** Ein topologischer Raum wird als  $n$ -Zelle bezeichnet wenn er homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Einpunktige Räume sind daher 0-Zellen, die Intervalle  $(0, 1)$ ,  $(0, \infty)$  und  $(-1, 1)$  sind 1-Zellen,  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  ist eine  $n$ -Zelle,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Unter einer *Zellenzerlegung* eines topologischen Raumes  $X$  verstehen wir eine Familie  $\mathcal{E}$  paarweise disjunkter Teilmengen  $e \subseteq X$  mit  $\bigcup_{e \in \mathcal{E}} e = X$ , sodass jedes  $e \in \mathcal{E}$  eine Zelle ist, dh. es existiert  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $e \cong \mathbb{R}^n$ .

Das Paar  $(X, \mathcal{E})$  wird in diesem Fall als ein *zellenzerlegter Raum* bezeichnet. Unter dem *n-Skelett* oder *n-Gerüst* eines zellenzerlegten Raums  $(X, \mathcal{E})$  verstehen wir den Teilraum  $X^n := \bigcup_{0 \leq k \leq n} \bigcup_{e \in \mathcal{E}_k} e$ , wobei  $\mathcal{E}_k$  die Menge der  $k$ -Zellen von  $\mathcal{E}$  bezeichnet.<sup>35</sup> Offensichtlich gilt  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n = X$ . Wir werden einen zellenzerlegten Raum oft nur mit  $X$  bezeichnen und die Zellenzerlegung  $\mathcal{E}$  in der Notation unterdrücken. Sprechen wir von den Zellen bzw.  $n$ -Zellen des zellenzerlegten Raums so sind die Zellen aus  $\mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{E}_n$  gemeint.

III.8.1. DEFINITION (Charakteristische Abbildung). Es sei  $X$  ein zellenzerlegter Raum und  $e$  eine  $n$ -Zelle von  $X$ . Eine stetige Abbildung  $\varphi : D^n \rightarrow X$  wird *charakteristische Abbildung für  $e$*  genannt, falls die Einschränkung  $\varphi|_{B^n}$  einen Homöomorphismus von  $B^n$  auf  $e$  liefert und  $\varphi(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$  gilt. Die Einschränkung  $\varphi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  wird in diesem Fall als *Klebeabbildung* bezeichnet.

III.8.2. LEMMA. *Es sei  $X$  ein zellenzerlegter Hausdorffraum,  $e$  eine  $n$ -Zelle von  $X$  und  $\varphi : D^n \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für  $e$ . Dann gilt:*

- (i)  $\varphi(D^n) = \bar{e}$ ,  $\bar{e} \subseteq X^n$  und  $\bar{e}$  ist kompakt.
- (ii)  $\varphi(S^{n-1}) = \bar{e} \setminus e$ ,  $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$  und  $\bar{e} \setminus e$  ist kompakt.

BEWEIS. Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist  $\varphi(D^n)$  kompakt und wegen der Hausdorffeigenschaft von  $X$  auch abgeschlossen. Aus  $\varphi(B^n) = e$  und der Stetigkeit von  $\varphi$  folgt  $e \subseteq \varphi(D^n) \subseteq \bar{e}$ . Wir erhalten  $\varphi(D^n) = \bar{e}$  womit (i) gezeigt wäre. Nun zu (ii): Beachte, dass  $\varphi(S^{n-1}) \cap e = \emptyset$ , denn  $\varphi(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$  und  $e \cap X^{n-1} = \emptyset$ . Zusammen mit  $\varphi(B^n) = e$  und  $\varphi(D^n) = \bar{e}$  folgt sofort  $\varphi(S^{n-1}) = \bar{e} \setminus e$  und damit auch  $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$ . Als stetiges Bild der kompakten Menge  $S^{n-1}$  ist auch  $\bar{e} \setminus e$  kompakt.  $\square$

III.8.3. BEISPIEL. Betrachte folgende Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ .  $e_1 := \{(0, 1)\}$ ,  $e_2 := \{(0, -1)\}$ ,  $e_3 := \{(1, 0)\}$ ,  $e_4 := \{0\} \times (-1, 1)$ ,  $e_5 := (0, 1) \times \{0\}$  und  $X := e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4 \cup e_5$ . Die Teilmengen  $e_i$  liefern eine Zellenzerlegung von  $X$  mit 0-Zellen  $e_1, e_2, e_3$  und 1-Zellen  $e_4, e_5$ . Es gilt daher  $X^0 = e_1 \cup e_2 \cup e_3$  und  $X^1 = X$ . Die 1-Zelle  $e_5$  kann keine charakteristische Abbildung besitzen, denn  $\bar{e}_5 \setminus e_5 = \{(0, 0), (1, 0)\}$  ist nicht in  $X^0$  enthalten, vgl. Lemma III.8.2(ii).

III.8.4. BEISPIEL. Betrachte folgende Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ .  $e_1 := \{(0, 1)\}$ ,  $e_2 := \{(0, -1)\}$ ,  $e_3 := \{(1, 0)\}$ ,  $e_4 := \{0\} \times (-1, 1)$ ,  $e_5 := \{(x, \sin(\pi/x)) : x \in (0, 1)\}$  und  $X := e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4 \cup e_5$ . Die Teilmengen  $e_i$  liefern eine Zellenzerlegung von  $X$  mit 0-Zellen  $e_1, e_2, e_3$  und 1-Zellen  $e_4, e_5$ . Es gilt daher  $X^0 = e_1 \cup e_2 \cup e_3$  und  $X^1 = X$ . Die 1-Zelle  $e_5$  kann keine charakteristische Abbildung besitzen, denn  $\bar{e}_5 \setminus e_5 = \{(1, 0)\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$  ist nicht in  $X^0$  enthalten, vgl. Lemma III.8.2(ii).

<sup>35</sup>Die Dimension einer Zelle ist wohldefiniert, dh. eine  $n$ -Zelle kann nicht  $m$ -Zelle sein wenn  $m \neq n$ , siehe Satz III.9.12 unten. Da wir diesen Satz noch nicht zur Verfügung haben, soll eine Zellenzerlegung  $\mathcal{E}$  auch eine Zerlegung  $\mathcal{E} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}_n$  beinhalten, wobei  $\mathcal{E}_n$  nur aus  $n$ -Zellen besteht.

III.8.5. DEFINITION (CW-Komplexe). Ein zellenzerlegter Hausdorffraum  $X$  wird *CW-Komplex* genannt wenn jede Zelle von  $X$  eine charakteristische Abbildung besitzt und folgende beiden Axiome erfüllt sind:

- (C) Ist  $e$  eine Zelle von  $X$  so trifft  $\bar{e}$  nur endlich viele andere Zellen.
- (W)  $A \subseteq X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist für jede Zelle  $e$  von  $X$ .

Die Zellenzerlegung wird in diesem Fall als *CW-Zerlegung* von  $X$  bezeichnet. Besteht die Zellenzerlegung nur aus endlich vielen Zellen so sprechen wir von einem *endlichen CW-Komplex*. Gilt  $X = X^n$  und  $X \neq X^{n-1}$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  so heißt der CW-Komplex *n-dimensional*, existiert kein solches  $n$ , dann wird er  *$\infty$ -dimensional* genannt.

III.8.6. BEMERKUNG. Der Begriff des CW-Komplexes wurde von Whitehead eingeführt. Die Buchstaben  $C$  und  $W$  beziehen sich dabei auf *closure finiteness* und *weak topology*.

III.8.7. BEMERKUNG. Ist  $X$  ein zellenzerlegter Hausdorffraum mit endlich vielen Zellen die alle eine charakteristische Abbildung besitzen, dann sind auch die Axiome (C) und (W) in Definition III.8.5 erfüllt und  $X$  ist ein CW-Komplex. Für (C) ist dies offensichtlich. Um (W) einzusehen seien  $e_1, \dots, e_k$  die Zellen von  $X$ . Dann gilt offensichtlich  $X = e_1 \cup \dots \cup e_k = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$  also  $A = A \cap X = A \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k) = (A \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (A \cap \bar{e}_k)$ . Ist nun jedes  $A \cap \bar{e}_i$  abgeschlossen, dann muss auch  $A$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen sein. Die Axiome (C) und (W) sind daher nur im Fall unendlich vieler Zellen relevant.

III.8.8. BEMERKUNG. Ein nichtleerer CW-Komplex muss mindestens eine 0-Zelle besitzen. Um dies einzusehen nehmen wir indirekt an es gilt  $X^0 = \emptyset$ . Weiters sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $X^n \neq \emptyset$  und  $X^{n-1} = \emptyset$ . Jede charakteristische Abbildung einer  $n$ -Zelle muss  $S^{n-1}$  nach  $X^{n-1} = \emptyset$  abbilden, was wegen  $S^{n-1} \neq \emptyset$ ,  $n \geq 1$ , einen Widerspruch liefert.

III.8.9. BEMERKUNG. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von einem CW-Komplex  $X$  in einen topologischen Raum  $Y$  ist genau dann stetig ist, wenn die Einschränkung  $f|_{\bar{e}} : \bar{e} \rightarrow Y$  stetig ist für jede Zelle  $e$  von  $X$ . Dies folgt sofort aus Axiom (W).

III.8.10. BEMERKUNG. Eine Teilmenge  $A$  eines CW-Komplexes  $X$  ist genau dann abgeschlossen wenn der Durchschnitt  $A \cap K$  mit jeder kompakten Teilmenge  $K$  von  $X$  abgeschlossen ist. Dies folgt sofort aus Axiom (W) in Definition III.8.5 und Lemma III.8.2(i).

III.8.11. PROPOSITION. *Es sei  $X$  ein CW-Komplex und für jede Zelle  $e$  von  $X$  sei  $\varphi_e$  eine charakteristische Abbildung für  $e$ . Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen topologischen Raum  $Y$  ist genau dann stetig, wenn die Komposition  $f \circ \varphi_e$  stetig ist, für jede Zelle  $e$ .*

BEWEIS. Die eine Implikation ist trivial, mit  $f$  ist natürlich auch jede der Kompositionen  $f \circ \varphi_e$  stetig. Sei nun umgekehrt  $f \circ \varphi_e$  stetig, für jede Zelle



$e$  von  $X$ . Weiters sei  $B \subseteq Y$  abgeschlossen. Es genügt zu zeigen, dass  $A := f^{-1}(B)$  abgeschlossen ist. Sei nun  $e$  eine  $n$ -Zelle von  $X$ , also  $\varphi_e : D^n \rightarrow X$ . Nach Axiom (W) in Definition III.8.5 genügt es zu zeigen, dass  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist. Nach Lemma III.8.2(i) gilt  $\varphi(D^n) = \bar{e}$  und daher auch  $A \cap \bar{e} = \varphi_e(\varphi_e^{-1}(A))$ . Nach Voraussetzung ist  $\varphi_e^{-1}(A) = (f \circ \varphi_e)^{-1}(B)$  abgeschlossen, also kompakt. Als stetige Bild einer kompakten Teilmenge ist daher auch  $A \cap \bar{e}$  kompakt und damit abgeschlossen.  $\square$

III.8.12. BEISPIEL. Jeder diskrete Raum ist in kanonischer Weise ein 0-dimensionaler CW-Komplex.

III.8.13. BEISPIEL. Graphen sind 1-dimensionale CW-Komplexe.

III.8.14. BEISPIEL.  $I = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$  ist eine CW-Zerlegung von  $I$ .

III.8.15. BEISPIEL. Das Quadrat  $I \times I$  besitzt eine CW-Zerlegung mit vier 0-Zellen (die Ecken), vier 1-Zellen (die Kanten ohne Ecken) und einer 2-Zelle  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

III.8.16. BEISPIEL.  $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k + 1)$  ist eine CW-Zerlegung von  $\mathbb{R}$  mit unendlich vielen 0-Zellen (die Punkte in  $\mathbb{Z}$ ) und unendlich vielen 1-Zellen  $(k, k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

III.8.17. BEISPIEL (CW-Zerlegung der Sphäre). Es sei  $P \in S^n$ ,  $n \geq 0$ . Dann liefert  $S^n = \{P\} \cup (S^n \setminus \{P\})$  eine CW-Zerlegung von  $S^n$  mit einer 0-Zelle  $P$  und einer  $n$ -Zelle  $S^n \setminus \{P\}$ .

III.8.18. BEISPIEL (CW-Zerlegung des Balls). Ist  $P \in S^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , dann liefert  $D^n = \{P\} \cup (S^{n-1} \setminus \{P\}) \cup B^n$  eine CW-Zerlegung von  $D^n$  mit einer 0-Zelle  $P$ , einer  $(n - 1)$ -Zelle  $S^{n-1} \setminus \{P\}$  und einer  $n$ -Zelle  $B^n$ .

III.8.19. BEISPIEL (CW Zerlegung von  $\mathbb{R}P^n$ ). Der reelle projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  besitzt eine CW-Zerlegung mit einer  $k$ -Zelle für jedes  $k = 0, 1, \dots, n$ , siehe Beispiel I.9.16.

III.8.20. BEISPIEL (CW-Zerlegung von  $\mathbb{C}P^n$ ). Der komplexe projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  besitzt eine CW-Zerlegung mit einer  $k$ -Zelle für jedes  $k = 0, 2, 4, \dots, 2n$ , siehe Beispiel I.9.17.

III.8.21. BEISPIEL (CW-Zerlegung von  $\mathbb{H}P^n$ ). Der quaternionische projektive Raum  $\mathbb{H}P^n$  besitzt eine CW-Zerlegung mit einer  $k$ -Zelle für jedes  $k = 0, 4, 8, \dots, 4n$ , siehe Aufgabe 17.

III.8.22. BEISPIEL. Die Zerlegung  $D^2 = B^2 \cup \bigcup_{P \in S^1} \{P\}$  liefert eine Zellenzerlegung von  $D^2$  mit einer 2-Zelle (das Innere  $B^2$ ) und unendlich vielen 0-Zellen (jeder Punkt am Rand  $S^1$ .) Offensichtlich besitzt jede Zelle eine charakteristische Abbildung und auch Axiom (W) aus Definition III.8.5 ist erfüllt, denn  $\bar{B}^2 = D^2$ . Allerdings ist Axiom (C) verletzt, denn der Abschluss der 2-Zelle trifft unendlich viele Zellen. Also ist dies keine CW-Zerlegung von  $D^2$ .

III.8.23. BEISPIEL. Die Zerlegung  $D^2 = \{0\} \cup \bigcup_{z \in S^1} \{z\} \cup \bigcup_{w \in S^1} \{rw : 0 < r < 1\}$  liefert eine Zellenzerlegung von  $D^2$  mit unendlich vielen 0-Zellen (der Mittelpunkt und jeder Punkt am Rand  $S^1$ ) und unendlich vielen 1-Zellen (jeder Radius.) Offensichtlich besitzt jede Zelle eine charakteristische Abbildung und Axiom (C) aus Definition III.8.5 ist erfüllt. Allerdings ist Axiom (W) verletzt, denn  $A = \{re^{i\theta} : r \in [0, 1], \theta \in (0, \pi/2)\}$  ist keine abgeschlossene Teilmenge von  $D^2$ , aber der Durchschnitt mit dem Abschluss einer beliebigen Zelle ist abgeschlossen. Also ist dies keine CW-Zerlegung von  $D^2$ .

III.8.24. LEMMA. *Es sei  $(X, \mathcal{E})$  ein CW-Komplex,  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  und  $X' := \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $(X', \mathcal{E}')$  ist ein CW-Komplex.
- (ii)  $X'$  ist abgeschlossen in  $X$ .
- (iii) Es gilt  $\bar{e} \subseteq X'$  für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}'$ .

BEWEIS. Ad (i) $\Rightarrow$ (iii): Es bezeichne  $\iota : X' \rightarrow X$  die kanonische Inklusion und es sei  $e \in \mathcal{E}'$ . Nach Voraussetzung existiert eine charakteristische Abbildung  $\varphi : D^n \rightarrow X'$  für die Zelle  $e$  von  $X'$ . Es ist dann  $\iota \circ \varphi : D^n \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für die Zelle  $e$  von  $X$ . Aus Lemma III.8.2(i) folgt  $\bar{e} = (\iota \circ \varphi)(D^n) \subseteq X'$ . Ad (iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei  $e \in \mathcal{E}$ . Da  $X$  das Axiom (W) erfüllt genügt es zu zeigen, dass  $X' \cap \bar{e}$  abgeschlossen in  $X$  ist. Da  $X' = \bigcup_{\bar{e} \in \mathcal{E}'} \bar{e}$  und weil  $X$  dem Axiom (C) genügt existieren  $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}'$  mit  $X' \cap \bar{e} = (e_1 \cup \dots \cup e_n) \cap \bar{e}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\bar{e}_i \subseteq X'$ , wir erhalten  $X' \cap \bar{e} \subseteq (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} \subseteq X' \cap \bar{e}$ , also  $X' \cap \bar{e} = (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e}$  und dies ist offensichtlich abgeschlossen in  $X$ . Ad (ii) $\Rightarrow$ (i): Als Teilraum eines Hausdorffraumes ist auch  $X'$  ein Hausdorffraum. Beachte weiters, dass auf Grund der Abgeschlossenheit von  $X'$  der Abschluss einer Teilmenge von  $X'$  in  $X'$  mit ihrem Abschluss in  $X$  übereinstimmt. Insbesondere ist eine Teilmenge von  $X'$  abgeschlossen in  $X'$  genau dann wenn sie abgeschlossen in  $X$  ist. Sei nun  $e \in \mathcal{E}'$  und  $\varphi : D^n \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für die Zelle  $e$  von  $X$ . Es folgt  $\varphi(D^n) \subseteq \bar{e} \subseteq X'$ , also ist  $\varphi$  auch charakteristische Abbildung für die Zelle  $e$  von  $X'$ . Damit besitzt jede Zelle der Zellenzerlegung  $\mathcal{E}'$  von  $X'$  eine charakteristische Abbildung. Axiom (C) für  $X'$  folgt sofort aus Axiom (C) für  $X$ . Es bleibt noch das Axiom (W) für  $(X', \mathcal{E}')$  zu verifizieren. Sei also  $A \subseteq X'$ , sodass  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist, für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}'$ . Es ist zu zeigen, dass  $A$  abgeschlossen ist. Da  $(X, \mathcal{E})$  Axiom (W) erfüllt genügt es zu zeigen, dass  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist, für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}$ . Für die Zellen  $e \in \mathcal{E}'$  ist dies nach Voraussetzung der Fall. Sei also  $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ . Da  $(X, \mathcal{E})$  dem Axiom (C) genügt existieren  $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}'$  mit  $A \cap \bar{e} = A \cap (e_1 \cup \dots \cup e_n) \cap \bar{e}$ . Es folgt  $A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} = ((A \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (A \cap \bar{e}_n)) \cap \bar{e}$  und dies ist abgeschlossen, denn jedes  $A \cap \bar{e}_i$  ist abgeschlossen.  $\square$

III.8.25. DEFINITION (CW-Teilräume). Es sei  $(X, \mathcal{E})$  ein CW-Komplex. Eine Teilmenge  $X'$  von  $X$  wird *CW-Teilraum* genannt, falls sie Vereinigung von Zellen in  $\mathcal{E}$  ist, dh. es existiert eine Teilmenge  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  mit  $X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e$ , und eine der drei

äquivalenten Bedingungen in Lemma III.8.24 erfüllt ist. In diesem Fall bezeichnen wir  $(X, X')$  als *CW-Paar*. Insbesondere ist ein CW-Teilraum in kanonischer Weise wieder ein CW-Komplex, siehe Lemma III.8.24(i).

III.8.26. BEMERKUNG. Der Durchschnitt beliebig vieler CW-Teilräumen von  $X$  ist wieder ein CW-Teilraum von  $X$ , siehe Lemma III.8.24(ii).

III.8.27. BEMERKUNG. Die Vereinigung beliebig vieler CW-Teilräume von  $X$  ist wieder ein CW-Teilraum von  $X$ , siehe Lemma III.8.24(iii).

III.8.28. BEMERKUNG. Das  $n$ -Skelett  $X^n$  eines CW-Komplexes  $X$  ist ein CW-Teilraum von  $X$ , siehe Lemma III.8.24(iii) und Lemma III.8.2(i).

III.8.29. BEMERKUNG. Ist  $X^n$  das  $n$ -Skelett eines CW-Komplexes  $X$  und sind  $e_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , gewisse  $(n+1)$ -Zellen von  $X$ , dann ist auch  $X^n \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$  ein CW-Teilraum von  $X$ , siehe Lemma III.8.24(iii) und Lemma III.8.2(i).

III.8.30. LEMMA. *Jede Zelle eines CW-Komplexes ist in einem endlichen CW-Teilraum enthalten.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Dimension der Zelle. Für 0-Zellen ist die Aussage trivial. Induktiv nehmen wir nun an, dass jede  $k$ -Zelle,  $0 \leq k < n$ , in einem endlichen CW-Teilraum enthalten ist. Weiters sei  $e$  eine  $n$ -Zelle. Nach Lemma III.8.2(ii) gilt  $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$ . Auf Grund von Axiom (C) existieren endlich viele Zellen  $e_1, \dots, e_l$  von  $X^{n-1}$ , sodass  $\bar{e} \setminus e \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_l$ . Nach Induktionsvoraussetzung liegt jede der Zellen  $e_i$  in einem endlichen CW-Teilraum. Die Vereinigung dieser CW-Teilräume ist ein endlicher CW-Teilraum  $A$  der  $\bar{e} \setminus e$  enthält, siehe Bemerkung III.8.27. Nach Konstruktion gilt  $\bar{e} \subseteq A \cup e$ , also ist  $A \cup e$  ein endlicher CW-Teilraum der  $e$  enthält, siehe Lemma III.8.24(iii).  $\square$

III.8.31. PROPOSITION. *Eine kompakte Teilmenge eines CW-Komplexes ist stets in einem endlichen CW-Teilraum enthalten.*

BEWEIS. Sei also  $X$  ein CW-Komplex. Wähle einen Punkt in jeder Zelle von  $X$  und bezeichne mit  $P \subseteq X$  die Menge dieser Punkte. Ist  $A \subseteq P$  eine beliebige Teilmenge und  $e$  eine Zelle von  $X$ , dann ist  $A \cap \bar{e}$  endlich, siehe Axiom (C) in Definition III.8.5. Aus der Hausdorffeigenschaft von  $X$  folgt, dass  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist. Nach Axiom (W) in Definition III.8.5 ist daher  $A$  abgeschlossen. Damit ist jede Teilmenge von  $P$  abgeschlossen, also trägt  $P$  die diskrete Topologie. Sei nun  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $K \cap P$  ein diskreter kompakter Raum, also endlich. Es folgt, dass  $K$  nur endlich viele Zellen von  $X$  trifft. Nach Lemma III.8.30 und Bemerkung III.8.27 liegt  $K$  daher in einem endlichen CW-Teilraum.  $\square$

III.8.32. PROPOSITION. *Ein CW-Komplex genau dann kompakt, wenn er endlich ist.*

BEWEIS. Ein endlicher CW-Komplex muss kompakt sein, dies folgt aus Lemma III.8.2(i) und der Tatsache, dass die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen (die Abschlüsse der endlich vielen Zellen) wieder kompakt ist. Die andere Implikation folgt sofort aus Proposition III.8.31.  $\square$

Ein Hausdorffraum wird *lokalkompakt* genannt falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein CW-Komplex heißt *lokal endlich* falls jeder Punkt eine Umgebung besitzt die nur endlich viele Zellen trifft.

III.8.33. PROPOSITION. *Ein CW-Komplex ist genau dann lokalkompakt wenn er lokal endlich ist.*

BEWEIS. Es sei  $X$  ein CW-Komplex. Ist  $X$  lokalkompakt, dann besitzt jeder Punkt eine kompakte Umgebung und diese liegt in einem endlichen Teilkomplex, siehe Proposition III.8.31, also ist  $X$  lokal endlich. Sei nun umgekehrt  $X$  lokal endlich. Dann besitzt jeder Punkt eine Umgebung die nur endlich viele Zellen trifft. Die Vereinigung der Abschlüsse dieser endlich vielen Zellen bildet eine kompakte Umgebung des Punktes, siehe Lemma III.8.2.  $\square$

III.8.34. BEMERKUNG. Es sei  $X$  ein CW-Komplex. Wähle eine charakteristische Abbildung  $D^n \rightarrow X^n$  für jede  $n$ -Zelle von  $X$  und bezeichne ihre disjunkte Vereinigung mit  $\varphi : \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$ . Die Einschränkung von  $\varphi$  liefert eine stetige Abbildung  $\psi : \bigsqcup S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Die Abbildung  $\text{id}_{X^{n-1}} \sqcup \varphi : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$  faktorisiert durch die kanonische Projektion  $p : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \rightarrow X^{n-1} \cup_\psi \bigsqcup D^n$  zu einer bijektiven stetigen Abbildung

$$f := \text{id}_{X^{n-1}} \cup_\psi \varphi : X^{n-1} \cup_\psi \bigsqcup D^n \rightarrow X^n.$$

Da  $X$  Axiom (W) genügt ist  $\text{id}_{X^{n-1}} \sqcup \varphi : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$  eine abgeschlossene Abbildung, dh. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Damit ist auch  $f$  eine abgeschlossene Abbildung, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass das  $n$ -Skelett eines CW-Komplexes aus dem  $(n-1)$ -Skelett durch Ankleben von  $n$ -Zellen entsteht.

III.8.35. BEMERKUNG. Ein CW-Komplex ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sein 1-Skelett wegzusammenhängend ist. Dies folgt sofort aus Bemerkung III.8.34 und Proposition III.8.31.

III.8.36. BEMERKUNG. Eine Teilmenge  $A$  eines CW-Komplexes  $X$  ist genau dann abgeschlossen wenn  $X^n \cap A$  für jedes  $n$  abgeschlossen ist. Äquivalent ist eine Teilmenge  $U$  genau dann offen, wenn  $X^n \cap U$  für jedes  $n$  offen in  $X^n$  ist. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist daher genau dann stetig wenn die Einschränkung  $f|_{X^n} : X^n \rightarrow Y$  für jedes  $n$  stetig ist.

III.8.37. BEMERKUNG. Ist  $Y_{n-1} \subseteq Y_n$  ein Teilraum,  $n \in \mathbb{N}$ , dann schreiben wir  $\varinjlim Y_n$  für die Menge  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  versehen mit folgender Topologie: eine Teilmenge  $U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  ist genau dann offen wenn  $U \cap Y_n$  offen in  $Y_n$  ist. Dies ist die größte

Topologie, sodass die kanonischen Inklusionen  $Y_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  alle stetig sind. Eine Abbildung  $f : \varinjlim Y_n \rightarrow Z$  ist genau dann stetig, wenn die Einschränkungen  $f|_{Y_n} : Y_n \rightarrow Z$  alle stetig sind. Für einen CW-Komplex  $X$  gilt daher  $X = \varinjlim X^n$ , siehe Bemerkung III.8.36.

III.8.38. PROPOSITION. *Überlagerungen von CW-Komplexen sind in kanonischer Weise wieder CW-Komplexe.*

BEWEIS. Sei also  $(X, \mathcal{E})$  ein CW-Komplex und  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Zunächst ist mit  $X$  auch  $\tilde{X}$  ein Hausdorffraum, siehe Beispiel II.1.16. Für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}$  ist die Einschränkung  $p|_{p^{-1}(e)} : p^{-1}(e) \rightarrow e$  eine triviale Überlagerung, siehe Korollar II.4.10. Es existiert daher ein diskreter Raum  $\Lambda$  und ein Homöomorphismus  $p^{-1}(e) \cong e \times \Lambda$ . Jede Wegzusammenhangskomponente von  $p^{-1}(e)$  ist also eine Zelle der gleichen Dimension wie  $e$ . Durchläuft  $e$  die Zellen in  $\mathcal{E}$  so bilden diese Wegzusammenhangskomponenten eine Zellenzerlegung  $\tilde{\mathcal{E}}$  von  $\tilde{X}$ . Ist  $\tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}}$  eine  $n$ -Zelle von  $\tilde{X}$ , dann ist  $e := p(\tilde{e}) \in \mathcal{E}$  eine  $n$ -Zelle von  $X$  und  $p|_{\tilde{e}} : \tilde{e} \rightarrow e$  ist ein Homöomorphismus. Weiters gilt offensichtlich  $p^{-1}(X^n) = \tilde{X}^n$  sowie  $p(\tilde{X}^n) = X^n$ . Ist  $\varphi : D^n \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für  $e$  dann lässt sich diese zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{\varphi} : D^n \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\varphi}(B^n) \cap \tilde{e} \neq \emptyset$  liften, dh.  $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ , siehe Satz II.4.5. Beachte, dass  $(p|_{\tilde{e}})^{-1} \circ \varphi|_{B^n}$  ein Lift von  $\varphi|_{B^n}$  ist und daher  $(p|_{\tilde{e}})^{-1} \circ \varphi|_{B^n} = \tilde{\varphi}|_{B^n}$  gilt, siehe Proposition II.3.1. Daher ist  $\tilde{\varphi}|_{B^n} : B^n \rightarrow \tilde{e}$  ein Homöomorphismus. Da auch  $\tilde{\varphi}(S^{n-1}) \subseteq p^{-1}(\varphi(S^{n-1})) \subseteq p^{-1}(X^{n-1}) = \tilde{X}^{n-1}$  sehen wir, dass  $\tilde{\varphi}$  eine charakteristische Abbildung der Zelle  $\tilde{e}$  ist. Also besitzt jede Zelle in  $\tilde{\mathcal{E}}$  eine charakteristische Abbildung. Nach Lemma III.8.2(i) ist  $\tilde{e}$  kompakt ist, woraus wir  $p(\tilde{e}) = \bar{e}$  erhalten, denn es gilt  $e = p(\tilde{e}) \subseteq p(\tilde{e}) \subseteq \bar{e}$  und  $p(\tilde{e})$  ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst kompakt und daher abgeschlossen. Da  $(X, \mathcal{E})$  Axiom C genügt, trifft  $p(\tilde{e}) = \bar{e}$  nur endlich viele Zellen von  $X$ . Ist  $e' \in \mathcal{E}$  eine Zelle von  $X$  dann folgt aus  $p^{-1}(e') \cong e' \times \Lambda$  und der Kompaktheit von  $\tilde{e}$ , dass  $\tilde{e}$  nur endlich viele der Zusammenhangskomponenten von  $p^{-1}(e')$  treffen kann. Es trifft daher  $\tilde{e}$  nur endlich viele Zellen in  $\tilde{\mathcal{E}}$ , also erfüllt auch  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$  das Axiom C. Schließlich erfüllt  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$  auch Axiom (W), denn  $X$  genügt dem Axiom (W) und  $p$  ist ein lokaler Homöomorphismus.  $\square$

III.8.39. PROPOSITION. *Jeder CW-Komplex ist lokal kontrahierbar.*

BEWEIS. Siehe etwa [4, Proposition A.4], [14, Satz 4.3.3] oder [10, Satz auf Seite 185].  $\square$

III.8.40. BEMERKUNG. Ein CW-Komplex ist genau dann zusammenhängend ist wenn er wegzusammenhängend ist. Dies folgt aus Proposition III.8.39.

III.8.41. BEMERKUNG. Nach Proposition III.8.39 ist jeder CW-Komplex lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Die gesamte Überlagerungstheorie aus Kapitel II lässt sich daher auf CW-Komplexe anwenden. Insbesondere besitzt jeder zusammenhängende CW-Komplex eine universelle Überlagerung, siehe Satz II.6.9.

III.8.42. PROPOSITION. *CW-Komplexe sind normal.*<sup>36</sup>

BEWEIS. Siehe [4, Proposition A.3].  $\square$

III.8.43. PROPOSITION. *Ist  $(X, A)$  ein CW-Paar, dann ist auch  $X/A$  in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

BEWEIS. Es bezeichne  $(X, \mathcal{E})$  die CW-Zerlegung von  $X$ ,  $p : X \rightarrow X/A$  die kanonische Projektion und  $* := p(A)$  den ausgezeichneten Punkt in  $X/A$ . Aus Proposition III.8.42 folgt sofort, dass  $X/A$  ein Hausdorffraum ist. Die Bilder unter der Abbildung  $p$  der Zellen in  $X \setminus A$  zusammen mit der 0-Zelle  $*$  liefern eine Zellenzerlegung  $\mathcal{E}'$  von  $X/A$ . Dies sind tatsächlich Zellen, denn  $p|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow (X/A) \setminus \{*\}$  ist ein Homöomorphismus. Durch Komposition charakteristischer Abbildungen der Zellen in  $X \setminus A$  mit  $p$  erhalten wir charakteristische Abbildungen für die Zellen von  $X/A$ . Offensichtlich genügt die Zellenzerlegung  $\mathcal{E}'$  Axiom (C). Nun zu Axiom (W). Es sei  $B \subseteq X/A$ , sodass  $B \cap \bar{e}'$  abgeschlossen ist, für alle  $e' \in \mathcal{E}'$ . Nach Konstruktion der Zellen von  $X/A$  ist auch dann  $B \cap \overline{p(e)}$  abgeschlossen, für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}$ . Aus der Stetigkeit von  $p$  folgt daher, dass  $p^{-1}(B \cap \overline{p(e)})$  abgeschlossen ist,  $e \in \mathcal{E}$ . Aus der Stetigkeit von  $p$  erhalten wir auch  $p(\bar{e}) \subseteq \overline{p(e)}$ , also  $\bar{e} \subseteq p^{-1}(\overline{p(e)})$ . Somit ist  $p^{-1}(B) \cap \bar{e} = p^{-1}(B) \cap p^{-1}(\overline{p(e)}) \cap \bar{e} = p^{-1}(B \cap \overline{p(e)}) \cap \bar{e}$  abgeschlossen, für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}$ . Da  $(X, \mathcal{E})$  Axiom (W) genügt, folgt dass  $p^{-1}(B)$  abgeschlossen ist. Daher ist  $B$  bezüglich der Quotiententopologie auf  $X/A$  abgeschlossen, womit auch Axiom (W) für  $(X/A, \mathcal{E}')$  verifiziert ist.  $\square$

III.8.44. BEISPIEL. Es sei  $X$  ein CW-Komplex mit  $n$ -Zellen  $e_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Dann ist  $X^n/X^{n-1}$  homöomorph zur Einpunktvereinigung von  $n$ -Sphären, genauer,  $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^n, *)$ . Nach Proposition III.8.43 ist  $X^n/X^{n-1}$  nämlich ein CW-Komplex mit einer einzigen 0-Zelle und einer  $n$ -Zelle für jede  $n$ -Zelle von  $X$ . Nach Bemerkung III.8.34 entsteht  $X^n/X^{n-1}$  aus einem einpunktigen Raum durch Ankleben von  $n$ -Zellen.

III.8.45. BEISPIEL. Es seien  $(X_\lambda, x_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , CW-Komplexe mit ausgezeichneten 0-Zellen  $x_\lambda \in X_\lambda$ . Dann ist auch  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, x_\lambda)$  ein CW-Komplex. Dies folgt aus Proposition III.8.43, denn der fragliche Raum entsteht aus dem CW-Komplex  $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  durch Kollabieren des Teilraums  $A = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ , genauer  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, x_\lambda) \cong (\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)/A$ .

III.8.46. DEFINITION (Zelluläre Abbildungen). Eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen  $f : X \rightarrow Y$  wird *zellulär* genannt falls  $f(X^n) \subseteq Y^n$  gilt, für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ .

III.8.47. PROPOSITION. *Es sei  $(X, A)$  ein CW-Paar und  $f : A \rightarrow Y$  eine zelluläre Abbildung. Dann ist auch  $Y \cup_f X$  in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

<sup>36</sup>Ein Hausdorffraum wird *normal* genannt, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen durch Umgebungen getrennt werden können. Sind  $A$  und  $B$  disjunkte abgeschlossene Teilmengen, dann existieren offene Teilmengen  $U$  und  $V$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

BEWEIS. Aus Proposition III.8.42 folgt sofort, dass  $Y \cup_f X$  ein Hausdorffraum ist. Die Zellen von  $Y$  zusammen mit den Zellen in  $X \setminus A$  bilden eine Zellenzerlegung von  $Y \cup_f X$ . Durch Zusammensetzen mit der kanonischen Projektion  $p : Y \sqcup X \rightarrow Y \cup_f X$  erhalten wir charakteristische Abbildungen für die Zellen von  $Y \cup_f X$  aus charakteristischen Abbildungen der Zellen in  $Y$  und  $X \setminus A$ . Es ist nun nicht schwer die Axiome (C) und (W) für diese Zellenzerlegung von  $Y \cup_f X$  zu verifizieren.  $\square$

Ist  $X$  ein Hausdorffraum so bezeichnen wir mit  $X_c$  die Menge  $X$  versehen mit der Topologie in der eine Teilmenge  $A \subseteq X$  abgeschlossen ist, falls der Durchschnitt  $A \cap K$  mit jeder kompakten Teilmenge  $K$  von  $X$  abgeschlossen ist. Eine Teilmenge  $U$  ist genau dann offen wenn  $U \cap K$  offen in  $K$  ist, für jede kompakte Teilmenge  $K$  von  $X$ . Dies ist die feinste Topologie sodass die Inklusionen kompakter Teilmengen von  $X$  stetig sind. Sie wird als die von den *kompakten Teilmengen* erzeugte Topologie bezeichnet. Gilt  $X = X_c$  so heißt der Raum  $X$  *kompakt erzeugt*.

III.8.48. BEISPIEL. Jeder lokalkompakte Hausdorffraum kompakt erzeugt. Jeder CW-Komplex ist kompakt erzeugt, siehe Bemerkung III.8.10.

Die Topologie auf  $X_c$  ist feiner als die Topologie auf  $X$ , dh. die identische Abbildung  $X_c \rightarrow X$  ist stetig. Beachte auch, dass  $X$  und  $X_c$  die selben kompakten Mengen haben, dh. die identische Abbildung  $X_c \rightarrow X$  ist proper. Die von  $X$  bzw.  $X_c$  auf einer kompakten Teilmenge induzierten Topologien stimmen überein. Beachte, dass die Topologie auf  $(X \times Y)_c$  i.A. feiner als die Topologie auf  $X_c \times Y_c$  ist. Es gilt jedoch:

III.8.49. LEMMA. *Es seien  $X$  und  $Y$  Hausdorffräume,  $X = X_c$  und  $Y$  lokalkompakt. Dann gilt  $(X \times Y)_c = X \times Y$ .*

III.8.50. PROPOSITION. *Sind  $X$  und  $Y$  zwei CW-Komplexe, dann ist  $(X \times Y)_c$  in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

BEWEIS. Es bezeichnen  $(X, \mathcal{E})$  und  $(Y, \mathcal{F})$  die CW-Zerlegungen von  $X$  und  $Y$ . Da  $B^n \times B^m \cong B^{n+m}$  bildet  $\mathcal{G} := \{e \times f \mid e \in \mathcal{E}, f \in \mathcal{F}\}$  eine Zellenzerlegung von  $X \times Y$ . Für das  $k$ -Skelett gilt  $(X \times Y)^k = \bigcup_{n+m=k} X^n \times Y^m$ . Sind  $\varphi : D^n \rightarrow X$  und  $\psi : D^m \rightarrow Y$  charakteristische Abbildungen der Zellen  $e \in \mathcal{E}$  und  $f \in \mathcal{F}$ , dann ist  $\varphi \times \psi : D^n \times D^m \rightarrow X \times Y$  eine charakteristische Abbildung der Zelle  $e \times f \in \mathcal{G}$ , denn  $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$ . Wegen der Kompaktheit von  $\overline{e \times f} = \overline{e} \times \overline{f}$  ist  $e \times f$  auch eine Zelle in  $(X \times Y)_c$  mit charakteristischer Abbildung  $\varphi \times \psi : D^n \times D^m \rightarrow (X \times Y)_c$ . Offensichtlich genügt  $\mathcal{G}$  dem Axiom (C). Nun zu Axiom (W). Sei also  $A \subseteq (X \times Y)_c$ , sodass  $A \cap (\overline{e} \times \overline{f})$  abgeschlossen ist, für alle  $e \in \mathcal{E}$  und  $f \in \mathcal{F}$ . Weiters sei  $K \subseteq X \times Y$  kompakt. Es ist die Abgeschlossenheit von  $A \cap K$  zu zeigen. Es genügt zu zeigen, dass  $A \cap (K_1 \times K_2)$  abgeschlossen ist,  $K_1 := p_X(K)$  und  $p_Y(K)$ , denn  $K$  ist abgeschlossen in  $K_1 \times K_2$ . Nach Proposition III.8.31 existieren endlich viele Zellen  $e_i \in \mathcal{E}$  und  $f_j \in \mathcal{F}$  mit  $K_1 \subseteq \overline{e}_1 \cup \dots \cup \overline{e}_n$  und

$K_2 \subseteq \bar{f}_1 \cup \dots \cup \bar{f}_m$ . Es folgt  $A \cap (K_1 \times K_2) = \bigcup_{i,j} A \cap (\bar{e}_i \times \bar{f}_j)$  und dies ist als endlich Vereinigung abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen.  $\square$

III.8.51. BEMERKUNG. Sind  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe und  $X$  lokal endlich, dann ist  $X \times Y = (X \times Y)_c$  ein CW-Komplex. Dies folgt aus Proposition III.8.50, Lemma III.8.49, Beispiel III.8.48 und Proposition III.8.33.

III.8.52. BEMERKUNG. Sind  $X$  und  $Y$  zwei CW-Komplexe mit abzählbar vielen Zellen, dann ist  $X \times Y = (X \times Y)_c$  ein CW-Komplex, siehe [4, Theorem A.6].

III.8.53. BEISPIEL. Es sei  $X$  ein CW-Komplex mit Zellenzerlegung  $\mathcal{E}$ . Nach Bemerkung III.8.51 ist  $X \times I$  ein CW-Komplex. Verwenden wir die Zellenzerlegung  $I = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$  so erhalten wir die folgende CW-Zerlegung von  $X \times I$ :

$$\{e \times \{0\} \mid e \in \mathcal{E}\} \cup \{e \times \{1\} \mid e \in \mathcal{E}\} \cup \{e \times (0, 1) \mid e \in \mathcal{E}\}$$

Eine  $n$ -Zelle von  $X$  liefert daher zwei  $n$ -Zellen,  $e \times \{0\}$  und  $e \times \{1\}$ , und eine  $(n+1)$ -Zelle,  $e \times (0, 1)$ , in  $X \times I$ . Insbesondere ist eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  in einen beliebigen topologischen Raum  $Y$  genau dann stetig, wenn die Einschränkung  $H|_{X^n \times I} : X^n \times I \rightarrow Y$  für jedes  $n$  stetig ist, vgl. Bemerkung III.8.36.

III.8.54. PROPOSITION. *Jedes CW-Paar hat die Homotopieerweiterungseigenschaft.*

BEWEIS. Sei also  $(X, A)$  ein CW-Paar,  $h : X \rightarrow Y$  und  $H : A \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = h|_A$ . Es ist  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  mit  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$  und  $\tilde{H}_0 = h$  zu konstruieren. Wir werden unten stetige Abbildungen  $\tilde{H}^n : (X^n \cup A) \times I \rightarrow Y$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$\tilde{H}^n|_{(X^{n-1} \cup A) \times I} = \tilde{H}^{n-1} \quad (\text{III.22})$$

$$\tilde{H}^0|_{A \times I} = H \quad (\text{III.23})$$

$$\tilde{H}_0^n = h|_{X^n \cup A} \quad (\text{III.24})$$

Ist dies gelungen so definieren wir  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  durch  $\tilde{H}|_{X^n \times I} := \tilde{H}^n|_{X^n \times I}$ . Auf Grund von (III.22) ist  $\tilde{H}$  wohldefiniert und stetig, siehe Beispiel III.8.53. Aus (III.23) erhalten wir sofort  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$  und aus (III.24) auch  $\tilde{H}_0 = h$ .

Wir werden die Abbildungen  $\tilde{H}^n$  induktiv konstruieren. Für  $n = 0$  ist dies trivial, etwa können wir  $\tilde{H}^0(a, t) := H(a, t)$  für  $(a, t) \in A \times I$  und  $\tilde{H}^0(x, t) := h(x)$  für  $(x, t) \in (X^0 \setminus A) \times I$  setzen. Induktiv nehmen wir nun an, dass Abbildungen  $\tilde{H}^{n-1} : (X^{n-1} \cup A) \times I \rightarrow Y$  mit den gewünschten Eigenschaften schon konstruiert sein. Bezeichne mit  $f : ((X^n \cup A) \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A) \times I) \rightarrow Y$  die durch  $f|_{(X^n \cup A) \times \{0\}} := h|_{(X^n \cup A)}$  und  $f|_{(X^{n-1} \cup A) \times I} := \tilde{H}^{n-1}$  definierte Abbildung. Beachte, dass  $f$  wohldefiniert und stetig ist, denn  $\tilde{H}^{n-1}$  erfüllt (III.24). Es genügt nun zu zeigen, dass  $((X^n \cup A) \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A) \times I)$  ein Retrakt von  $(X^n \cup A) \times I$  ist,



denn ist  $r$  eine entsprechende Retraktion, dann hat  $\tilde{H}^n := f \circ r$  alle gewünschten Eigenschaften.

Um eine Retraktion  $r : (X^n \cup A) \times I \rightarrow ((X^n \cup A) \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A) \times I)$  zu konstruieren wähle eine charakteristische Abbildung für jede  $n$ -Zelle in  $X \setminus A$  und bezeichne ihre disjunkte Vereinigung mit  $\varphi : \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$ . Durch Einschränken der Abbildung  $\varphi \times \text{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \rightarrow X^n \times I$  erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup ((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)) \rightarrow (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da  $X \times I$  ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung  $\text{id}_{(X^{n-1} \cup A) \times I} \cup_\psi (\varphi \times \text{id}_I)$  einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong ((X^{n-1} \cup A) \times I) \cup_\psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Wähle wir nun eine Retraktion  $\rho : \bigsqcup D^n \times I \rightarrow \bigsqcup ((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I))$  und setze  $r := \text{id}_{(X^{n-1} \cup A) \times I} \cup_\psi (\psi \circ \rho)$ , so ist dies die gesuchte Retraktion.  $\square$

Ein einfach zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex wird *Baum* genannt.

III.8.55. LEMMA. *Bäume sind kontrahierbar.*

BEWEIS. Sei also  $X$  ein einfach zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex und  $x_0$  eine 0-Zelle. Es ist eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = \text{id}_X$  und  $H_1 = c_{x_0}$  zu konstruieren. Wir werden die in Beispiel III.8.53 besprochene CW-Zerlegung von  $X \times I$  verwenden. Da  $X$  wegzusammenhängend ist finden wir zu jeder 0-Zelle  $e$  von  $X$  einen stetigen Weg  $\sigma_e : I \rightarrow X$  von  $\sigma_e(0) = e$  nach  $\sigma_e(1) = x_0$ . Wir definieren die gesuchte Abbildung  $H$  zunächst auf dem 1-Skelett  $(X \times I)^1 = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (X^0 \times I)$  von  $X \times I$  durch  $H^1 : (X \times I)^1 \rightarrow X$ ,  $H^1(x, 0) := x$ ,  $H^1(x, 1) := x_0$  und  $H^1(e, t) := \sigma_e(t)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in I$  und  $e \in X^0$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $H^1$  zu einer stetigen Abbildung  $X \times I \rightarrow X$  ausgedehnt werden kann. Wähle zu jeder 1-Zelle von  $X$  eine charakteristische Abbildung und bezeichne ihre disjunkte Vereinigung mit  $\varphi : \bigsqcup D^1 \rightarrow X$ . Durch Einschränken der Abbildung  $\varphi \times \text{id}_I : D^1 \times I \rightarrow X \times I$  erhalten wir eine Abbildung  $\psi : \bigsqcup \partial(D^1 \times I) \rightarrow (X \times I)^1$ . Da  $X \times I$  ein CW-Komplex ist, siehe Beispiel III.8.53, liefert die Abbildung  $\text{id}_{(X \times I)^1} \cup_\psi (\varphi \times \text{id}_I)$  einen Homöomorphismus

$$X \times I \cong (X \times I)^1 \cup_\psi \bigsqcup D^1 \times I.$$

Da  $X$  einfach zusammenhängend ist, lässt sich  $H^1 \circ \psi : \bigsqcup \partial(D^1 \times I) \rightarrow X$  zu einer stetigen Abbildung  $G : \bigsqcup D^1 \times I \rightarrow X$  fortsetzen, siehe Korollar I.8.29. Es ist nun  $H := H^1 \cup_\psi G$  die gesuchte Homotopie.  $\square$

III.8.56. BEMERKUNG. Ist  $X$  ein endlicher Baum mit  $k_0$  0-Zellen und  $k_1$  1-Zellen, dann gilt  $k_1 = k_0 - 1$ . Dies lässt sich durch Induktion nach der Zahl der 1-Zellen beweisen. Für  $k_1 = 0$  ist dies offensichtlich, denn ein zusammenhängender CW-Komplex der nur aus 0-Zellen besteht muss einpunktig sein, dh.  $k_0 = 1$ . Für

den Induktionsschritt wählen wir eine 1-Zelle  $e$  in  $X$  und eine charakteristische Abbildung  $\varphi : D^1 \rightarrow X$  für  $e$ . Aus dem einfachen Zusammenhang von  $X$  folgt  $\varphi(-1) \neq \varphi(1)$ . Der Teilkomplex  $A := \bar{e}$  von  $X$  besitzt daher genau zwei 0-Zellen und eine 1-Zelle. Weiters liefert  $\varphi$  einen Homöomorphismus  $D^1 \cong A$ , dh.  $A$  ist kontrahierbar. Der CW-Komplex  $X/A$ , siehe Proposition III.8.43, hat daher  $k_0 - 1$  viele 0-Zellen und  $k_1 - 1$  viele 1-Zellen. Nach Proposition III.7.10 ist die Projektion  $X \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz, also  $X/A$  wieder ein Baum, siehe auch Proposition III.8.54. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun  $(k_1 - 1) = (k_0 - 1) - 1$ , also  $k_1 = k_0 - 1$ .

Unter einem Baum in einem CW-Komplex  $X$  verstehen wir einen CW-Teilraum von  $X$  der ein Baum ist. Ein Baum in  $X$  wird *aufspannender Baum* genannt, falls er alle 0-Zellen von  $X$  enthält.

III.8.57. LEMMA. *Jeder zusammenhängende CW-Komplex besitzt einen aufspannenden Baum.*

BEWEIS. Es sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Die Menge aller Bäume in  $X$  ist eine teilweise geordnete Menge, wobei  $B \leq B'$  falls  $B \subseteq B'$ . Ist  $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ , eine linear geordnete<sup>37</sup> Menge von Bäumen in  $X$ , dann ist auch  $B := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  ein Baum in  $X$ . Um dies einzusehen bemerken wir zunächst, dass  $B$  wieder ein CW-Teilraum ist, siehe Bemerkung III.8.27. Nun zum einfachen Zusammenhang von  $B$ . Ist  $\sigma$  eine Schleife in  $B$ , dann trifft diese nur endlich viele Zellen von  $B$ , siehe Proposition III.8.31. Es existieren daher endlich viele  $\lambda_i$ , sodass  $\sigma$  in  $B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_n}$  enthalten ist. Da  $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  linear geordnet ist, existiert  $i_0$  mit  $B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_n} \subseteq B_{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0 := \lambda_{i_0}$ . Also liegt die Schleife  $\sigma$  zur Gänze in  $B_{\lambda_0}$ . Nach Voraussetzung ist  $B_{\lambda_0}$  einfach zusammenhängend, also lässt sich  $\sigma$  in  $B_{\lambda_0}$  kontrahieren. Also ist jede Schleife in  $B$  kontrahierbar und  $B$  daher einfach zusammenhängend. Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass jede linear geordnete Teilmenge von Bäumen in  $X$  eine obere Schranke besitzt. Aus dem Lemma von Zorn, siehe etwa [6, Anhang], folgt daher die Existenz eines maximalen Baums  $B$  in  $X$ , dh. ist  $B'$  ein weiterer Baum in  $X$  und  $B \subseteq B'$  dann gilt schon  $B = B'$ . Wir werden nun zeigen, dass ein maximaler Baum alle 0-Zellen von  $X$  enthalten muss. Indirekt angenommen es existiert eine 0-Zelle  $x_0$  von  $X$  und  $x_0 \notin B$ . Mit  $X$  ist auch das 1-Skelett  $X^1$  wegzusammenhängend, siehe Bemerkung III.8.35. Es existiert daher ein Weg  $\sigma : I \rightarrow X^1$  von  $\sigma(0) \in B$  nach  $\sigma(1) = x_0$ . Es sei  $t_0 := \max\{t \in I : \sigma(t) \in B\}$  und  $t_1 := \min\{t \in [t_0, 1] : \sigma(t) \in X^0\}$ . Es existiert dann eine 1-Zelle  $e$  von  $X$ , sodass die Einschränkung  $\sigma|_{[t_0, t_1]} : [t_0, t_1] \rightarrow \bar{e}$  ein Homöomorphismus ist. Der eine Randpunkt  $\sigma(t_0)$  liegt in  $B \cap X^0$  und für den andere gilt  $\sigma(t_1) \in X^0 \setminus B$ . Es ist daher  $B \cup \bar{e}$  ein Baum der echt grösser als  $B$  ist, was der Maximalität von  $B$  widerspricht. Wir schließen, dass  $B$  tatsächlich alle 0-Zellen von  $X$  enthält.  $\square$

<sup>37</sup>dh. für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  gilt entweder  $B_{\lambda_1} \leq B_{\lambda_2}$  oder  $B_{\lambda_2} \leq B_{\lambda_1}$ .

III.8.58. PROPOSITION. *Jeder zusammenhängende CW-Komplex ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle.*

BEWEIS. Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Nach Lemma III.8.57 existiert ein aufspannender Baum  $B$  in  $X$ . Nach Proposition III.8.43 ist  $X/B$  ein CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle. Nach Lemma III.8.55 ist  $B$  kontrahierbar. Da  $(X, B)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt, siehe Proposition III.8.54, folgt nun aus Proposition III.7.10, dass die Projektion  $X \rightarrow X/B$  eine Homotopieäquivalenz ist.  $\square$

III.8.59. LEMMA. *Es gilt  $\pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)) \cong *_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$ , wobei  $\Lambda$  eine beliebige Indexmenge bezeichnet.*

BEWEIS. Die Inklusionen der Komponenten  $(S^1, *) \rightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)$  induzieren Homomorphismen  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, *) \rightarrow \pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *))$ . Aus der universellen Eigenschaft des freien Produkts von Gruppen erhalten wir daher einen Homomorphismus  $*_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *))$ . Für endliche Indexmengen  $\Lambda$  ist dies ein Isomorphismus, siehe Beispiel I.9.7. Wir zeigen nun, dass dies für beliebige Indexmengen richtig bleibt. Die Surjektivität folgt aus Surjektivität für endliche Indexmengen und der Tatsache, dass eine Schleife in  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)$  schon in einem endlichen Teil  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda'} (S^1, *) \subseteq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)$  liegen muss,  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  eine endliche Teilmenge, siehe Proposition III.8.31. Die Injektivität folgt aus der Injektivität für endliche Indexmengen, Lemma I.9.1(ii) und der Tatsache, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus  $\pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda'} (S^1, *)) \rightarrow \pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *))$  injektiv ist. Letzteres folgt aus der Existenz einer Retraktion  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *) \rightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda'} (S^1, *)$ .  $\square$

III.8.60. PROPOSITION. *Die Fundamentlagruppe eines zusammenhängenden 1-dimensionalen CW-Komplexes ist eine freie Gruppe.*

BEWEIS. Sei also  $X$  ein zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex. Nach Proposition III.8.58 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $X$  nur eine 0-Zelle besitzt. Es folgt  $X = X^1 = X^1/X^0 \cong \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)$ , siehe Beispiel III.8.44. Die Aussage der Proposition folgt nun aus Lemma III.8.59.  $\square$

III.8.61. BEMERKUNG. Ist  $X$  ein endlicher zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex mit  $k_0$  0-Zellen und  $k_1$  1-Zellen, dann ist  $\pi_1(X)$  frei vom Rang  $k_1 - k_0 + 1$ . Um dies einzusehen betrachten wir nochmals den Beweis von Proposition III.8.60. Wähle einen aufspannenden Baum  $B$  in  $X$ , siehe Proposition III.8.57. Da  $B$  alle 0-Zellen von  $X$  enthält, besteht  $B$  aus  $k_0$  0-Zellen und  $k_0 - 1$  vielen 1-Zellen, siehe Bemerkung III.8.56. Der zu  $X$  homotopieäquivalente CW-Komplex  $X/B$ , siehe Beweis von Proposition III.8.58, ist daher zu der Einpunktvereinigung von  $k_1 - k_0 + 1$  Kreisen homöomorph,  $X \simeq X/B \cong \bigvee_{i=1}^{k_1 - k_0 + 1} (S^1, *)$ . Aus Lemma III.8.59 folgt nun, dass  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/B)$  frei vom Rang  $k_1 - k_0 + 1$  ist.

III.8.62. SATZ. *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

BEWEIS. Sei also  $G \cong *_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$  eine freie Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Betrachte den 1-dimensionalen zusammenhängenden CW-Komplex  $X := \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (S^1, *)$ . Ist  $x_0 \in X$  ein Basispunkt, dann gilt  $\pi_1(X, x_0) \cong G$ , siehe Lemma III.8.59. Es sei  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine zusammenhängende punktierte Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe  $H$ , siehe Korollar II.6.11 und Bemerkung III.8.41. Es gilt daher  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong H$ , siehe Proposition II.3.11(i). Nach Proposition III.8.38 ist auch  $\tilde{X}$  ein 1-dimensionaler CW-Komplex, seine Fundamentalgruppe nach Proposition III.8.60 daher frei. Somit ist auch  $H$  eine freie Gruppe.  $\square$

III.8.63. BEMERKUNG. Ist  $G$  eine freie Gruppe mit endlichem Rang  $n$ , dh.  $G \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ , und ist  $H \subseteq G$  eine Untergruppe mit endlichem Index  $k$ , dh.  $\sharp(G/H) = k$ , dann ist  $H$  eine freie Gruppe vom Rang  $k(n-1) + 1$ . Der Rang der Untergruppe  $H$  ist daher i.A. grösser als der Rang von  $G$ . Wir betrachten dazu nochmals den Beweis von Satz III.8.62. In dieser Situation besitzt  $X$  genau eine 0-Zelle und  $n$  1-Zellen. Weiters ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine  $k$ -blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.3.11(v). Es hat  $\tilde{X}$  daher genau  $k$  0-Zellen und  $kn$  1-Zellen. Nach Bemerkung III.8.61 muss  $H \cong \pi_1(\tilde{X})$  daher den Rang  $kn - k + 1$  haben.

### III.9. Die Sätze von Whitehead und Freudenthal.

III.9.1. SATZ (Zelluläre Approximation). *Jede stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen und  $A \subseteq X$  ein CW-Teilraum, sodass  $f|_A : A \rightarrow Y$  zellulär ist, dann existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1 : X \rightarrow Y$  zellulär und  $H_t|_A = f$  für alle  $t \in I$ .*

III.9.2. LEMMA. *Es sei  $\psi : S^n \rightarrow A$  stetig und  $X := A \cup_\psi D^{n+1}$ . Dann ist das Paar  $(X, A)$   $n$ -zusammenhängend.*

BEWEIS. Sei also  $k \leq n$  und  $f : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$  stetig. Nach Lemma III.5.21 genügt es eine zu  $f$  homotope Abbildung  $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$  zu konstruieren deren Bild zur Gänze in  $A$  liegt. Wir werden unten einen Punkt  $P \in B^{n+1} \subseteq X$  und eine zu  $f$  homotope Abbildung  $g : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$  mit  $g(I^k) \subseteq X \setminus \{P\}$  konstruieren. Ist dies gelungen, dann können wir den Beweis wie folgt zu Ende führen. Da  $S^n$  ein Deformationsretrakt von  $D^{n+1} \setminus \{P\}$  ist und weil  $X \setminus \{P\} = A \cup_\psi (D^{n+1} \setminus P)$ , ist auch  $A$  Deformationsretrakt von  $X \setminus \{P\}$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : X \setminus \{P\} \times I \rightarrow X \setminus \{P\}$  mit  $H_0 = \text{id}_{X \setminus \{P\}}$ ,  $H_1(X \setminus \{P\}) \subseteq A$  und  $H_t|_A = \text{id}_A$ . Es liefert dann  $(I^k \times I, \partial I^k \times I) \rightarrow (X, A)$ ,  $(x, t) \mapsto H(g(x), t)$ , eine Homotopie von  $g$  nach  $H_1 \circ g$  und es gilt  $(H_1 \circ g)(I^k) \subseteq A$ . Also ist  $f \simeq g$  homotop zu einer Abbildung deren Bild zur Gänze in  $A$  liegt. Nun aber zur Konstruktion von  $P$  und  $g$ . Es bezeichne  $U := X \setminus D_{1/2}^{n+1}$  und  $V := B^{n+1} \subseteq X$ , also  $U \cup V = X$ . Wir unterteilen  $I^k$  in endlich viele Würfel  $Q_1, \dots, Q_N$ , sodass für jeden dieser Würfel entweder  $f(Q_i) \subseteq U$  oder  $f(Q_i) \subseteq V$

gilt. Mit Hilfe von Lemma III.5.26 ist es nicht schwer eine zu  $f$  homotope Abbildung  $g : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$  zu konstruieren, sodass  $g$  auf einer Umgebung jedes Würfels  $Q_i$  mit  $f(Q_i) \subseteq V$  glatt ist. Aus Lemma III.5.27 folgt dann, dass  $V \setminus g(I^k)$  nicht leer ist, also einen Punkt  $P$  enthält.  $\square$

III.9.3. PROPOSITION. *Für einen CW-Komplex  $X$  ist das Paar  $(X, X^n)$   $n$ -zusammenhängend.*

BEWEIS. Es sei  $k \leq n$  und  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, X^n)$  stetig. Nach Lemma III.5.21 genügt es eine Homotopie  $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \rightarrow (X, X^n)$  zu konstruieren mit  $H_0 = f$  und  $H_1(D^k) \subseteq A$ . Nach Proposition III.8.31, dürfen wir o.B.d.A.  $X = X^n \cup e_1 \cup \dots \cup e_l$  annehmen, wobei  $e_1, \dots, e_l$  endlich viele Zellen von  $X$  sind, deren Dimension grösser als  $n$  ist. Nach Lemma III.9.2 ist  $f$  homotop zu einer Abbildung  $(D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, X^n)$  deren Bild in  $X \cup e_1 \cup \dots \cup e_{l-1}$  enthalten ist. Sukzessives Anwenden von Lemma III.9.2 liefert schließlich eine zu  $f$  homotope Abbildung  $(D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, X^n)$  deren Bild in  $X^n$  liegt.  $\square$

BEWEIS VON SATZ III.9.1. Wir konstruieren zunächst Abbildungen  $H^n : (X^n \cup A) \times I \rightarrow Y$  mit folgenden Eigenschaften:

$$H^n|_{(X^{n-1} \cup A) \times I} = H^{n-1} \quad (\text{III.25})$$

$$H_0^n = f|_{X^n \cup A} \quad (\text{III.26})$$

$$H_t^0|_A = f|_A \quad (\text{III.27})$$

$$H_1^n(X^n) \subseteq Y^n \quad (\text{III.28})$$

Ist dies gelungen, so definieren wir  $H : X \times I \rightarrow Y$  durch  $H|_{X^n \times I} := H^n|_{X^n \times I}$ . Wegen (III.25) und Beispiel III.8.53 ist dies wohldefiniert und stetig. Aus (III.26) erhalten wir  $H_0 = f$ , aus (III.27)  $H_t|_A = f$ , und aus (III.28) folgt, dass  $H_1$  eine zelluläre Abbildung ist.

Wir konstruieren die Abbildungen  $H^n$  induktiv. Für  $n = 0$  ist dies trivial, zu  $x \in X^0 \setminus A$  wählen wir einen Weg  $\sigma_x : I \rightarrow Y$  von  $\sigma_x(0) = f(x)$  nach  $\sigma_x(1) \in Y^0$ . Setzen wir nun  $H^0(a, t) := f(a)$  und  $H^0(x, t) := \sigma_x(t)$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ ,  $x \in X^0 \setminus A$ , dann hat  $H^0$  alle gewünschten Eigenschaften. Sei nun  $H^{n-1}$  schon konstruiert. Zu jeder  $n$ -Zelle in  $X \setminus A$  wählen wir eine charakteristische Abbildung und bezeichnen ihre diskunkte Vereinigung mit  $\varphi : \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$ . Durch Einschränken der Abbildung  $\varphi \times \text{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \rightarrow X^n \times I$  erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \rightarrow (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da  $X \times I$  ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung  $\text{id}_{(X^n \cup A) \times I} \cup_\psi (\varphi \times \text{id}_I)$  einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong (X^{n-1} \cup A) \times I \cup_\psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Betrachte nun die durch  $g|_{X^n \times \{0\}} = f|_{X^n}$  und  $g|_{X^{n-1} \times I} := H^{n-1}|_{X^{n-1} \times I}$  gegebenen Abbildung  $g : (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I) \rightarrow Y$ . Da  $H^{n-1}$  die Relation (III.26) erfüllt

ist dies wohldefiniert und stetig. Nach Proposition III.9.3 lässt sich die Abbildung, siehe (III.28),

$$g \circ \psi : \bigsqcup((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I), S^{n-1} \times \{1\}) \rightarrow (Y, Y^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^n)$$

zu einer stetigen Abbildung  $G : \bigsqcup(D^n \times I, D^n \times \{1\}) \rightarrow (Y, Y^n)$  ausdehnen, vgl. Lemma III.5.21. Setzen wir nun  $H^n := H^{n-1} \cup_\psi G$  so hat diese Abbildung alle gewünschten Eigenschaften.  $\square$

III.9.4. DEFINITION (Schwache Homotopieäquivalenz). Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  wird *schwache Homotopieäquivalenz* genannt, falls sie für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  und jeden Basispunkt  $x_0 \in X$  einen Isomorphismus  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  induziert.

III.9.5. BEMERKUNG. Nach Proposition III.4.8 ist jede Homotopieäquivalenz auch eine schwache Homotopieäquivalenz. Ein Satz von Whitehead besagt, dass für Abbildungen zwischen CW-Komplexen auch die Umkehrung gilt, vgl. Satz III.9.7 unten. Wir bemerken noch, dass jede zu einer schwachen Homotopieäquivalenz homotope Abbildung selbst eine schwache Homotopieäquivalenz ist und, dass auch die Komposition von schwachen Homotopieäquivalenzen wieder eine schwache Homotopieäquivalenz ist, vgl. Aufgabe 27.

III.9.6. LEMMA. *Es sei  $(X, A)$  ein CW-Paar und  $(Y, B)$  ein Paar von Räumen mit  $B \neq \emptyset$ . Für jedes  $n$  für das es eine  $n$ -Zelle in  $X \setminus A$  gibt und jeden Basispunkt  $y_0 \in B$  sei  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ . Dann ist jede Abbildung  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop rel.  $A$  zu einer Abbildung  $X \rightarrow B$ , dh. es existiert eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit  $H_0 = f$ ,  $H_1(X) \subseteq B$  und  $H(a, t) = f(a)$  für  $a \in A$  und  $t \in I$ .*

BEWEIS. Wir werden unten stetige Abbildungen  $H^n : (X^n \cup A) \times I \rightarrow Y$  mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$H^n|_{(X^{n-1} \cup A) \times I} = H^{n-1} \tag{III.29}$$

$$H_0^n = f|_{X^n \cup A} \tag{III.30}$$

$$H_t^0|_A = f|_A \tag{III.31}$$

$$H_1^n(X^n) \subseteq B \tag{III.32}$$

Ist dies gelungen, dann definieren wir  $H : X \times I \rightarrow Y$  durch  $H|_{X^n \times I} = H^n|_{X^n \times I}$ . Nach (III.29) und Beispiel III.8.53 ist  $H$  wohldefiniert und stetig. Aus (III.30) erhalten wir  $H_0 = f$ , aus (III.31) folgt  $H_t|_A = f$  und aus (III.32) schließlich  $H_1(X) \subseteq B$ .

Wir konstruieren  $H^n$  induktiv. Für  $n = 0$  ist dies trivial. Zu  $x \in X^0 \setminus A$  wählen wir einen Weg  $\sigma_x : I \rightarrow Y$  von  $\sigma_x(0) = f(x)$  nach  $\sigma_x(1) \in B$ . Setzen wir  $H^0(a, t) := f(a)$  und  $H^0(x, t) := \sigma_x(t)$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ ,  $x \in X^0 \setminus A$ , so hat  $H^0$  alle gewünschten Eigenschaften. Sei nun  $H^{n-1}$  schon konstruiert. Zu jeder  $n$ -Zelle in  $X \setminus A$  wählen wir ein charakteristische Abbildung und bezeichnen ihre

diskunkte Vereinigung mit  $\varphi : \bigsqcup D^n \rightarrow X^n$ . Durch Einschränken der Abbildung  $\varphi \times \text{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \rightarrow X^n \times I$  erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \rightarrow (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da  $X \times I$  ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung  $\text{id}_{(X^n \cup A) \times I} \cup \psi(\varphi \times \text{id}_I)$  einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong (X^{n-1} \cup A) \times I \cup \psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Betrachte nun die durch  $g|_{X^n \times \{0\}} = f|_{X^n}$  und  $g|_{X^{n-1} \times I} := H^{n-1}|_{X^{n-1} \times I}$  gegebenen Abbildung  $g : (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I) \rightarrow Y$ . Da  $H^{n-1}$  die Relation (III.30) erfüllt ist dies wohldefiniert und stetig. Weiters gilt  $g(X^{n-1} \times \{1\}) \subseteq B$ , siehe (III.32). Da  $\pi_n(Y, B) = 0$  lässt sich

$$g \circ \psi : \bigsqcup ((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I), S^{n-1} \times \{1\}) \rightarrow (Y, B)$$

zu einer stetigen Abbildung  $G : \bigsqcup (D^n \times I, D^n \times \{1\}) \rightarrow (Y, B)$  ausdehnen, vgl. Lemma III.5.21. Setzen wir nun  $H^n := H^{n-1} \cup \psi G$  so diese Abbildung alle gewünschten Eigenschaften.  $\square$

III.9.7. SATZ (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz zwischen CW Komplexen ist eine Homotopieäquivalenz. Ist  $(X, A)$  ein CW-Paar und die Inklusion  $A \rightarrow X$  eine schwache Homotopieäquivalenz, dann ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$ .*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Aussage über die Inklusion von CW-Teilräumen. Da die Inklusion  $A \rightarrow X$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist, erhalten wir aus der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, A)$ , siehe Satz III.5.15, sofort  $\pi_n(X, A, x_0) = 0$ , für jeden Basispunkt  $x_0 \in A$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenden wir nun Lemma III.9.6 auf die identische Abbildung  $\text{id}_X : (X, A) \rightarrow (X, A)$  an, so erhalten wir eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = \text{id}_X$ ,  $H_1(X) \subseteq A$  und  $H_t|_A = \text{id}_A$ . Also ist  $H_1 : X \rightarrow A$  eine Deformationsretraktion von  $X$  auf  $A$ .

Nun zur ersten Aussage. Sei also  $f : X \rightarrow Y$  eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen CW-Komplexen. O.B.d.A. dürfen wir  $f$  als zellulär annehmen, siehe Satz III.9.1. Nach Proposition III.8.47 ist der Abbildungszylinder  $Z_f = Y \cup_f (X \times I)$  ein CW-Komplex, siehe auch Beispiel III.8.53. Es bezeichnen  $\iota_X : X \rightarrow Z_f$  und  $\iota_Y : Y \rightarrow Z_f$  die kanonischen Einbettungen. Wir erinnern uns, dass  $\iota_Y$  eine Homotopieäquivalenz ist und  $\iota_X \simeq \iota_Y \circ f$  gilt. Mit  $f$  ist daher auch  $\iota_X$  eine schwache Homotopieäquivalenz. Nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes ist  $X$  also ein Deformationsretrakt von  $Z_f$ . Insbesondere ist  $\iota_X$  eine Homotopieäquivalenz. Aus  $\iota_X \simeq \iota_Y \circ f$  folgt nun, dass auch  $f$  eine Homotopieäquivalenz ist.  $\square$

III.9.8. BEMERKUNG. Whiteheads Satz besagt nicht, dass zwei CW-Komplexe mit isomorphen Homotopiegruppen schon homotopieäquivalent sein müssen. Etwa haben  $X := \mathbb{R}P^2$  und  $Y := S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$  isomorphe Homotopiegruppen, sind aber nicht homotopieäquivalent.

III.9.9. SATZ (Exzision). *Es sei  $X$  ein CW-Komplex,  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  zwei CW-Teilräume, sodass  $X = A \cup B$  und  $C := A \cap B \neq \emptyset$ . Weiters sei  $(A, C)$   $n$ -zusammenhängend und  $(B, C)$   $m$ -zusammenhängend,  $n, m \geq 0$ . Dann ist der von der Inklusion induzierte Homomorphismus  $\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$  ein Isomorphismus für  $k < m + n$  und eine Surjektion für  $k = n + m$ .*

BEWEIS. Siehe etwa [4, Theorem 4.23] oder [9, Chapter 11.1]. □

Wir erinnern uns an die Suspension, siehe Beispiel III.1.18. Ist  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum so erhalten wir auf Grund von  $\Sigma S^k \cong S^{k+1}$  Homomorphismen

$$\Sigma : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X, x_0). \tag{III.33}$$

Repräsentiert  $f : (S^k, *) \rightarrow (X, x_0)$  ein Element in  $\pi_k(X, x_0)$  so wird  $\Sigma([f])$  durch die Abbildung  $\Sigma f : (S^{k+1}, *) \rightarrow (\Sigma X, x_0)$  repräsentiert. An dieser Stelle sei auch nochmals auf die Einbettung  $X \rightarrow \Sigma X, x \mapsto [(x, 0)]$ , hingewiesen, sie erlaubt es den Basispunkt  $x_0 \in X$  auch als Basispunkt  $x_0 \in \Sigma X$  aufzufassen.

III.9.10. SATZ (Freudenthal). *Es sei  $X$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender CW-Komplex,  $n \geq 1$ , und  $x_0 \in X$ . Dann ist (III.33) ein Isomorphismus für  $k < 2n - 1$  und eine Surjektion für  $k = 2n - 1$ .*

BEWEIS. Betrachte die Teilmengen  $C_+ := X \times [0, 1]/(X \times \{1\})$  und  $C_- := X \times [-1, 0]/(X \times \{-1\})$  von  $\Sigma X$ . Offensichtlich gilt  $\Sigma X = C_+ \cup C_-$  und  $C_+ \cap C_- = X \subseteq \Sigma X$ . Versehen wir das Intervall mit der CW-Zerlegung  $[-1, 1] = \{-1\} \cup (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$  erhalten wir eine CW-Zerlegung von  $X \times [-1, 1]$ , siehe Beispiel III.8.53, und damit eine CW-Zerlegung von  $\Sigma X$ , siehe Proposition III.8.43. Es sind dann  $C_-$  und  $C_+$  CW-Teilräume von  $\Sigma X$ . Aus der Kontrahierbarkeit der Kegeln  $C_\pm$  und der langen exakten Sequenz der Paare  $(C_\pm, X)$  erhalten wir Isomorphismen  $\partial : \pi_k(C_\pm, X) \cong \pi_{k-1}(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(C_+, X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(\Sigma X, C_-) \\ \cong \Big\| \partial & & \cong \Big\| \\ \pi_{k-1}(X) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_k(\Sigma X) \end{array}$$

Insbesondere ist  $(C_\pm, X)$   $n$ -zusammenhängend. Nach Satz III.9.9 ist die obere horizontale Abbildung im Diagramm ein Isomorphismus für  $k < 2n$  und surjektiv falls  $k = 2n$ . Aus der Kontrahierbarkeit von  $C_-$  und der langen exakten Sequenz des Paares  $(\Sigma X, C_-)$  folgt, dass auch die rechte vertikale Abbildung im Diagramm ein Isomorphismus ist. Es bleibt daher zu zeigen, dass dieses Diagramm kommutiert. Sei dazu  $f : S^{k-1} \rightarrow X$  eine Abbildung die ein Element in  $\pi_{k-1}(X)$  darstellt. Schränken wir ihre Suspension  $\Sigma f : S^k \rightarrow \Sigma X$  auf die obere Hemisphäre von  $S^k$  und identifizieren diese mit  $D^k$  so erhalten wir eine Abbildung  $g : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (C_+, X)$  und damit eine Element  $[g] \in \pi_k(C_+, X)$  für das offensichtlich  $\partial([g]) = [f]$  gilt. Betrachten wir nun  $[g] \in \pi_k(\Sigma X, C_-)$ , dann stimmt dies



mit dem Bild von  $[\Sigma f] \in \pi_k(\Sigma X)$  unter der Abbildung  $\pi_k(\Sigma X) \rightarrow \pi_k(\Sigma X, C_-)$  überein.  $\square$

III.9.11. SATZ. *Es gilt  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .*

BEWEIS. Aus Satz III.9.10 und  $\Sigma S^k \cong S^{k+1}$  erhalten wir Isomorphismen

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \pi_4(S^4) \cong \dots$$

Nach Beispiel III.6.12 gilt  $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

III.9.12. SATZ. *Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph.*

BEWEIS. Sei also  $n < m$ . Indirekt angenommen es existiert ein Homöomorphismus  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wähle  $P \in \mathbb{R}^n$  und setze  $Q := \varphi(P)$ . Dann liefert die Einschränkung von  $\varphi$  einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{Q\}$ . Daher sind  $S^{n-1}$  und  $S^{m-1}$  homotopieäquivalent, denn  $\mathbb{R}^k \setminus \{*\} \simeq S^{k-1}$ . Zusammen mit Satz III.9.11 und Satz III.5.25 erhalten wir den Widerspruch  $\mathbb{Z} \cong \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \pi_{n-1}(S^{m-1}) = 0$ .  $\square$

III.9.13. BEMERKUNG. Auf Grund von Satz III.9.12 ist die Dimension einer topologischer Mannigfaltigkeit ein wohldefinierter Begriff.

III.9.14. SATZ.  *$S^n$  ist nicht Retrakt von  $D^{n+1}$ .*

BEWEIS. Es bezeichne  $\iota : S^n \rightarrow D^{n+1}$  die kanonische Inklusion. Indirekt angenommen es gäbe eine Retraktion  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ ,  $r \circ \iota = \text{id}_{S^n}$ . Dann gilt  $\text{id}_{\pi_n(S^n)} = (r \circ \iota)_* = r_* \circ \iota_* = 0 : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_n(D^{n+1}) \rightarrow \pi_n(S^n)$ , denn  $\pi_n(D^{n+1}) = 0$ . Es folgt  $\pi_n(S^n) = 0$  und dies widerspricht Satz III.9.11.  $\square$

III.9.15. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $D^n \rightarrow D^n$  besitzt einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Indirekt angenommen  $f : D^n \rightarrow D^n$  hätte keinen Fixpunkt. Wie im Beweis von Satz I.5.3 lässt sich mittels  $f$  eine Retraktion von  $D^n$  auf  $S^{n-1}$  konstruieren, was Satz III.9.14 widerspricht.  $\square$

Ist  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum und  $[f] \in \pi_k(X, x_0)$  wobei  $f : (S^k, *) \rightarrow (X, x_0)$ , so können wir auch die freie Homotopieklasse  $[f] \in [S^k, X]$  betrachten. Dies liefert eine Abbildung

$$\Phi : \pi_k(X, x_0) \rightarrow [S^k, X], \quad [f] \mapsto [f]. \quad (\text{III.34})$$

III.9.16. LEMMA. *Für einfach zusammenhängende Räume ist (III.34) bijektiv.*

BEWEIS. Sei also  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender punktierter Raum und  $* \in S^k$  ein Basispunkt. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von  $\Phi$ . Sei also  $f : S^k \rightarrow X$ . Da  $X$  wegzusammenhängend ist, finden wir einen Weg  $\sigma : I \rightarrow X$  von  $\sigma(0) = f(*)$  nach  $\sigma(1) = x_0$ . Da das Paar  $(S^k, \{*\})$  die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt, siehe Proposition III.8.54, existiert eine Homotopie  $H : S^k \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = f$  und  $H_t(*) = \sigma(t)$ ,  $t \in I$ . Die Abbildung

$g := H_1 : S^k \rightarrow X$  ist daher homotop zu  $g$ , dh.  $[f] = [g] \in [S^k, X]$ , erfüllt aber auch  $g(*) = H_1(*) = \sigma(1) = x_0$ . Also definiert  $g$  ein Element  $[g] \in \pi_k(X, x_0)$  für das offensichtlich  $\Phi([g]) = [f]$  gilt. Nun zur Injektivität von  $\Phi$ . Seien also  $f, g : (S^k, *) \rightarrow (X, x_0)$  mit  $\Phi([f]) = \Phi([g])$ , dh.  $[f] = [g] \in [S^k, X]$ . Es existiert daher eine Homotopie  $H : S^k \times I \rightarrow X$  mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$ . Betrachte die Schleife  $\sigma : I \rightarrow X$ ,  $\sigma(t) := H_t(*)$ . Da  $X$  einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie relativ Endpunkten  $G : I \times I \rightarrow X$ ,  $G(t, 0) = \sigma(t)$ ,  $G(t, 1) = G(0, s) = G(1, s) = x_0$ ,  $s, t \in I$ . Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft des Paares  $(S^k \times I, (S^k \times \{0\}) \cup (\{*\} \times I) \cup (S^k \times \{1\}))$ , siehe Proposition III.8.54, existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : S^k \times I \times I \rightarrow X$  mit  $\tilde{H}(x, t, 0) = H(x, t)$ ,  $\tilde{H}(x, 0, s) = f(x)$ ,  $\tilde{H}(x, 1, s) = g(x)$  und  $\tilde{H}(*, t, s) = G(t, s)$ ,  $x \in S^k$ ,  $s, t \in I$ . Betrachten wir nun  $F : S^k \times I \rightarrow X$ ,  $F(x, t) := \tilde{H}(x, t, 1)$ , dann gilt  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  und  $F_t(*) = x_0$ , dh.  $[f] = [g] \in \pi_k(X, x_0)$ .  $\square$

Nach Lemma III.9.16 ist  $\Phi : \pi_n(S^n, *) \rightarrow [S^n, S^n]$  eine Bijektion, siehe (III.34). Dies bleibt auch für  $n = 1$  richtig, siehe Abschnitt I.8. Ist nun  $f : S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung so induziert diese eine Abbildung  $f_* : [S^n, S^n] \rightarrow [S^n, S^n]$ ,  $f_*([g]) := [f \circ g]$ , und wir erhalten eine Abbildung  $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi : \pi_n(S^n, *) \rightarrow \pi_n(S^n, *)$ . Für Basispunkt erhaltende Abbildungen stimmt dies mit dem induzierten Homomorphismus  $f_* : \pi_n(S^n, *) \rightarrow \pi_n(S^n, *)$  überein. Nach Lemma III.9.16 ist jede stetige Abbildung  $S^n \rightarrow S^n$  homotop zu einer Basispunkt erhaltenden, folglich ist  $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi$  ein Homomorphismus, für alle stetigen  $f$ , denn  $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi$  hängt offensichtlich nur von der Homotopieklasse von  $f$  ab. Nach Satz III.9.11 muss dieser Homomorphismus durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben sein, dh. es existiert genau eine Zahl  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ , sodass  $(\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi)(\sigma) = \deg(f) \cdot \sigma$ , für alle  $\sigma \in \pi_n(S^n, *)$ . Diese Zahl  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$  wird der *Abbildungsgrad* der Abbildung  $f : S^n \rightarrow S^n$  genannt.

III.9.17. SATZ (Abbildungsgrad). *Für den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen  $S^n \rightarrow S^n$  gilt:*

- (i)  $\deg(f) = \deg(g)$  genau dann wenn  $f \simeq g$ .
- (ii)  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ .
- (iii)  $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$ .
- (iv) Ist  $\deg(f) \neq 0$  so muss  $f$  surjektiv sein.
- (v)  $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$ .

BEWEIS. Ad (i): Sind  $f$  und  $g$  homotop so induzieren sie dieselbe Abbildung  $f_* = g_* : [S^n, S^n] \rightarrow [S^n, S^n]$ , es folgt daher  $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi$  und damit  $\deg(f) = \deg(g)$ . Gilt umgekehrt  $\deg(f) = \deg(g)$ , dann auch  $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi$  und daher  $f_* = g_* : [S^n, S^n] \rightarrow [S^n, S^n]$ . Wenden wir  $f_*$  und  $g_*$  auf das Element  $[\text{id}_{S^n}] \in [S^n, S^n]$  an, so erhalten wir  $[f] = [g]$ . Also sind  $f$  und  $g$  homotop. Behauptung (ii) folgt sofort aus der trivialen Tatsache  $\Phi^{-1} \circ (f \circ g)_* \circ \Phi = (\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi)$ . Behauptung (iii) folgt aus den offensichtlichen Relationen  $\Sigma \circ \Phi = \Phi \circ \Sigma$  und  $(\Sigma f)_* \circ \Sigma = \Sigma \circ f_*$  sowie der Tatsache,

dass  $\Sigma : \pi_n(S^n, *) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1}, *)$  ein Isomorphismus ist, siehe Satz III.9.10. Um (iv) einzusehen, nehmen wir an  $f : S^n \rightarrow S^n$  ist nicht surjektiv. Dann existiert ein Punkt  $P \in S^n$  und  $f : S^n \rightarrow S^n \setminus \{P\}$ . Wegen der Kontrahierbarkeit von  $S^n \setminus \{P\}$  ist  $f$  daher homotop zu einer konstanten Abbildung und damit  $\deg(f) = 0$ . Schließlich ist die Behauptung (v) trivial.  $\square$

III.9.18. BEMERKUNG. Eine orthogonale Abbildung  $\varphi \in O_{n+1}$  definiert eine stetige Abbildung  $\varphi : S^n \rightarrow S^n$  und für diese gilt  $\deg(\varphi) = \det(\varphi)$ . Da  $O_{n+1}$  nur zwei Zusammenhangskomponenten hat genügt es wegen Satz III.9.17(i) den Fall der Spiegelung  $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$  zu betrachten. Wegen Satz III.9.17(iii) genügt es dies für die Spiegelung  $\varphi(x_0, x_1) = (-x_0, x_1)$  zu zeigen, siehe Satz I.8.31(iii). Für die sogenannte *Antipodalabbildung*  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $A(x) := -x$ , folgt  $\deg(A) = (-1)^{n+1}$ . Insbesondere, siehe Satz III.9.17(i), ist bei geradem  $n$  die Antipodalabbildung  $A : S^n \rightarrow S^n$  nicht zur identischen Abbildung  $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$  homotop.

III.9.19. SATZ (Satz vom Igel). *Ist  $n$  gerade, dann besitzt jedes stetige Vektorfeld auf  $S^n$  eine Nullstelle.*<sup>38</sup>

BEWEIS. Wir nehmen indirekt an es existiert eine stetige Abbildung  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle f(x), x \rangle = 0$  und  $f(x) \neq 0$ , für alle  $x \in S^n$ . Dann definiert

$$H : S^n \times I \rightarrow S^n, \quad H(x, t) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t) \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

eine Homotopie von  $H_0 = \text{id}_{S^n}$  nach  $H_1 = A$ , wobei  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $A(x) := -x$ , die Antipodalabbildung bezeichnet. Für gerades  $n$  ist die Antipodalabbildung aber nicht zur identischen Abbildung homotop, siehe Bemerkung III.9.18, und wir erhalten einen Widerspruch.  $\square$

III.9.20. BEMERKUNG. Ist  $X$  ein CW-Komplex, dann ist  $\Sigma X$  zusammenhängend. Aus Satz III.9.10 folgt, dass die zweifache Suspension  $\Sigma^2 X := \Sigma \Sigma X$  1-zusammenhängend ist. Induktiv erhalten wir aus Satz III.9.10, dass die  $n$ -fache Suspension  $\Sigma^n X := \Sigma \Sigma^{n-1} X$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Weiters folgt aus Satz III.9.10, dass der Homomorphismus  $\Sigma : \pi_k(\Sigma^n X) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma^{n+1} X)$  ein Isomorphismus ist,  $k < 2n + 1$ . Wir erhalten eine Folge von Homomorphismen

$$\pi_k(X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+2}(\Sigma^2 X) \cdots \pi_{k+n}(\Sigma^n X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+n+1}(\Sigma^{n+1} X) \rightarrow \cdots$$

die ab  $n = k + 2$  alle Isomorphismen sind. Unter der  $k$ -ten stabilen Homotopiegruppe von  $X$  verstehen wir die Gruppe

$$\pi_k^s(X) := \pi_{2k+2}(\Sigma^{k+2} X) \cong \pi_{k+n}(\Sigma^n X), \quad n \geq k + 2.$$

Vor allem die stabilen Homotopiegruppen der Sphären

$$\pi_k^s := \pi_k^s(S^0) = \pi_{2k+2}(S^{k+2}) \cong \pi_{k+n}(S^n), \quad n \geq k + 2,$$

<sup>38</sup>Unter einem stetigen Vektorfeld auf  $S^n$  verstehen wir eine stetige Abbildung  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , sodass  $\langle f(x), x \rangle = 0$ , für alle  $x \in S^n$ .

spielen eine wichtige Rolle. Aus Satz III.9.10 erhalten wir etwa  $\pi_0^s \cong \mathbb{Z}$ . Einige Resultate sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

| $k$       | 0            | 1              | 2              | 3                 | 4 | 5 | 6              | 7                  | 8                                  | 9  | 10             |
|-----------|--------------|----------------|----------------|-------------------|---|---|----------------|--------------------|------------------------------------|--|----------------|
| $\pi_k^s$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_{24}$ | 0 | 0 | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_{240}$ | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_6$ |

III.9.21. BEMERKUNG. In Beispiel III.6.12 haben wir gesehen, dass die Hopffaserung  $S^3 \rightarrow S^2$  Isomorphismen  $\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2)$  induziert,  $k \geq 3$ , siehe (III.14). Aus Satz III.9.11 folgt daher  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , die Hopffaserung  $S^3 \rightarrow S^2$  repräsentiert einen Erzeuger dieser Gruppe. In Aufgabe 30 haben wir aus der Hopffaserung  $S^7 \rightarrow S^4$  Isomorphismen  $\pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^7)$ ,  $k \geq 1$ , konstruiert. Es folgt, dass  $\pi_7(S^4)$  ein Element unendlicher Ordnung enthält, insbesondere ist  $\pi_7(S^4) \neq 0$ . In Aufgabe 31 haben wir die Hopffaserung  $S^{15} \rightarrow S^8$  verwendet um Isomorphismen  $\pi_k(S^{15}) \times \pi_{k-1}(S^7) \cong \pi_k(S^8)$ ,  $k \geq 1$ , zu konstruieren. Es folgt, dass  $\pi_{15}(S^8)$  ein Element unendlicher Ordnung besitzt, insbesondere ist  $\pi_{15}(S^8) \neq 0$ .