IV.11. Der Hurewicz Homomorphismus. Wir identifizieren $\Delta^1 \cong I$, wobei $(t_0, t_1) \in \Delta^1$ dem Element $t_1 \in I$ zugeordnet wird, dh. die Ecken $e_0, e_1 \in \Delta^1$ entsprechen $e_0 \leftrightarrow 0$ und $e_1 \leftrightarrow 1$. Mit Hilfe dieser Identifizierung können wir Wege $\sigma : I \to X$ mit 1-Simplizes $\tilde{\sigma} : \Delta^1 \to X$ identifizieren, $\tilde{\sigma}(t_0, t_1) = \sigma(t_1)$.

IV.11.1. Lemma. *Es gilt:*

(i) *Ist $x \in X$, dann existiert $\tau \in C_2(X)$ mit $\tilde{c}_x = \partial\tau$.*[35]
(ii) *Ist $\sigma : I \to X$ eine Schleife, dann gilt $\partial\tilde{\sigma} = 0$.*
(iii) *Sind $\sigma_0 \simeq \sigma_1 : I \to X$ homotop relativ Endpunkten, dann existiert $\tau \in C_2(X)$ mit $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_0 + \partial\tau$.*
(iv) *Sind $\sigma_0, \sigma_1 : I \to X$ mit $\sigma_0(1) = \sigma_1(0)$, dann existiert $\tau \in C_2(X)$ mit $(\sigma_0\sigma_1)^\sim = \tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 + \partial\tau$.*
(v) *Ist $\sigma : I \to X$, dann existiert $\tau \in C_2(X)$ mit $\bar{\sigma}^\sim = -\tilde{\sigma} + \partial\tau$.*[36]
(vi) *Ist $f : X \to Y$ stetig und $\sigma : I \to X$, dann gilt $f \circ \tilde{\sigma} = (f \circ \sigma)^\sim$.*

Beweis. Ad (i): Für den konstanten 2-Simplex $\tau : \Delta^2 \to X$, $\tau(t_0, t_1, t_2) := x$, erhalten wir $\partial\tau = \tilde{c}_x - \tilde{c}_x + \tilde{c}_x = \tilde{c}_x$. Ad (ii): Für eine Schleife $\sigma : I \to X$ gilt $\partial\tilde{\sigma} = \sigma(1) - \sigma(0) = 0 \in C_0(X)$. Ad (iii): Sei also $H : I \times I \to X$ eine Homotopie relativ Endpunkten von σ_0 nach σ_1. Definiere $x_0 := \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$, $x_1 := \sigma_0(1) = \sigma_1(1)$, $\rho : I \to X$, $\rho(t) := H_t(t)$, sowie $\tau_0, \tau_1 : \Delta^2 \to X$, $\tau_0(t_0, t_1, t_2) := H_{t_2}(t_1 + t_2)$, $\tau_1(t_0, t_1, t_2) := H_{t_1+t_2}(t_2)$. Dann gilt $\partial\tau_0 = \tilde{c}_{x_1} - \tilde{\rho} + \tilde{\sigma}_0$ und $\partial\tau_1 = \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\rho} + \tilde{c}_{x_0}$. Nach (i) existieren $\tau_2, \tau_3 \in C_2(X)$ mit $\partial\tau_2 = \tilde{c}_{x_0}$ und $\partial\tau_3 = \tilde{c}_{x_1}$. Wir erhalten daher

$$\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_0 = \partial(\tau_1 - \tau_0 - \tau_2 + \tau_3),$$

die Behauptung folgt daher mit $\tau := \tau_1 - \tau_0 - \tau_2 + \tau_3$. Ad (iv): Definieren wir $\tau : \Delta^2 \to X$, $\tau(t_0, t_1, t_2) := (\sigma_0\sigma_1)(t_1/2 + t_2)$, dann folgt $\partial\tau = \tilde{\sigma}_1 - (\sigma_0\sigma_1)^\sim + \tilde{\sigma}_0$. Ad (v): Setze $x_0 := \sigma(0)$. Nach (iv) existiert $\tau_1 \in C_2(X)$ mit $(\sigma\bar{\sigma})^\sim = \tilde{\sigma} + \bar{\sigma}^\sim - \partial\tau$. Da $\sigma\bar{\sigma} \simeq c_{x_0}$ erhalten wir aus (iii) ein $\tau_2 \in C_2(X)$ mit $(\sigma\bar{\sigma})^\sim = \tilde{c}_{x_0} + \partial\tau_2$. Nach (i) existiert $\tau_3 \in C_2(X)$ mit $\partial\tau_3 = \tilde{c}_{x_0}$. Zusammen erhalten wir

$$\tilde{\sigma} + \bar{\sigma}^\sim = \partial(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3).$$

Behauptung (vi) ist trivial, $(f \circ \tilde{\sigma})(t_0, t_1) = f(\tilde{\sigma}(t_0, t_1)) = f(\sigma(t_1)) = (f \circ \sigma)(t_1) = (f \circ \sigma)^\sim(t_0, t_1)$, für $(t_0, t_1) \in \Delta^1$. □

Nach Lemma IV.11.1(ii) und (iii) ist

$$h_1 = h_1^{(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X), \qquad h_1([\sigma]) := [\tilde{\sigma}]. \tag{IV.43}$$

eine wohldefinierte Abbildung, sie wird der (erste) *Hurewicz-Homomorphismus* genannt. Dabei bezeichnet $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ die Homotopieklasse der Schleife $\sigma : I \to X$ bei x_0, und $[\tilde{\sigma}] \in H_1(X)$ die von dem ensprechenden 1-Simplex $\tilde{\sigma} : \Delta^1 \to X$ repräsenterte Homologieklasse. In Proposition IV.11.2 unten werden wir zeigen, dass dies tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

[35] Dabei bezeichnet $c_x : I \to X$ den konstanten Weg, $c_x(t) := x$.

[36] Dabei bezeichnet $\bar{\sigma} : I \to X$ den inversen Weg, $\bar{\sigma}(t) := \sigma(1 - t)$.

IV.11.2. Proposition (Hurewicz-Homomorphismus). *Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definiert* (IV.43) *einen Gruppenhomomorphismus. Dieser Homomorphismus ist natürlich, dh. das linke Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "h_1^{(X,x_0)}"] \arrow[d, "f_*"] & H_1(X) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "h_1^{(Y,y_0)}"] & H_1(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& H_1(X) & \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, bend left, "h_1^{(X,x_0)}"] & & \pi_1(X,x_1) \arrow[ul, bend right, "h_1^{(X,x_1)}"'] \arrow[ll, "\beta_h", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert für jede Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Für jeden Weg $h : I \to X$ von $h(0) = x_0$ nach $h(1) = x_1$ ist darüber hinaus das rechte Diagramm oben kommutative, siehe Proposition I.1.18.

Beweis. Sind $\sigma_1, \sigma_2 : I \to X$ zwei Schleifen bei x_0, dann folgt aus Lemma IV.11.1(iv)

$$h_1([\sigma_1][\sigma_2]) = h_1([\sigma_1\sigma_2] = [(\sigma_1\sigma_2)^\sim] = [\tilde\sigma_1] + [\tilde\sigma_2] = h_1([\sigma_1]) + h_1([\sigma_2]),$$

also ist (IV.43) ein Gruppenhomomorphismus. Ist $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildung punktierter Räume und $\sigma : I \to X$ eine Schleife bei x_0, dann folgt aus Lemma IV.11.1(vi)

$$\begin{aligned}
h_1^{(Y,y_0)}(f_*([\sigma])) = h_1^{(Y,y_0)}([f \circ \sigma]) &= [(f \circ \sigma)^\sim] \\
&= [f \circ \tilde\sigma] = f_*([\tilde\sigma]) = f_*(h_1^{(X,x_0)}([\sigma])).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Natürlichkeit von h_1. Ist nun $\sigma : I \to X$ eine Schleife bei x_1, dann folgt

$$\begin{aligned}
h_1^{(X,x_0)}(\beta_h([\sigma])) = h_1^{(X,x_0)}([h\sigma\bar h]) &= [(h\sigma\bar h)^\sim] \\
&= [\tilde h + \tilde\sigma + \bar h^\sim] = [\tilde h + \tilde\sigma - \tilde h] = [\tilde\sigma] = h_1^{(X,x_0)}([\sigma]).
\end{aligned}$$

wobei wir Lemma IV.11.1(iv) und (v) verwendet haben. □

IV.11.3. Satz (Hurewicz-Isomorphismus). *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender punktierter Raum. Dann ist der Hurewicz-Homomorphismus* (IV.43) *surjektiv und sein Kern stimmt mit der Kommutatoruntergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ überein. Er induziert daher einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \cong H_1(X)$.*

Beweis. Da $H_1(X)$ abelsch ist, induziert (IV.43) einen Homomorphismus

$$h_1 : \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X). \tag{IV.44}$$

es genügt zu zeigen, dass (IV.44) ein Isomorphismus ist. Da X wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem Punkt $x \in X$ einen Weg $\rho_x : I \to X$ von $\rho_x(0) = x_0$ nach $\rho_x(1) = x$ wählen. Ist nun $\tilde\sigma : \Delta^1 \to X$ ein 1-Simplex und $\sigma : I \to X$ der entsprechende Weg, dann ist $(\rho_{\sigma(0)}\sigma)\bar\rho_{\sigma(1)}$ eine Schleife bei x_0 und definiert daher ein Element in $[\rho_{\sigma(0)}\sigma\bar{\rho}_{\sigma(1)}] \in \pi_1(X, x_0)$. Da $\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$ abelsch ist können wir einen Homomorphismus auf Erzeugern $\tilde{\sigma} : \Delta^1 \to X$ wie folgt definieren:

$$\phi : C_1(X) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}, \qquad \phi(\tilde{\sigma}) := [\rho_{\sigma(0)}\sigma\bar{\rho}_{\sigma(1)}].$$

Wir zeigen zunächst

$$\phi \circ \partial = 1 : C_2(X) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}, \tag{IV.45}$$

dh. ϕ definiert einen Homomorphismus

$$\phi : H_1(X) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}, \qquad \phi([c]) := \phi(c). \tag{IV.46}$$

Für $\tau : \Delta^2 \to X$ ist also $\phi(\partial\tau) = 1$ zu zeigen.[37] Setzen wir $\tilde{\sigma}_i := \tau \circ \delta_2^i : \Delta^1 \to X$, $i = 0, 1, 2$, dann gilt offensichtlich $\partial\tau = \tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$. Da ϕ ein Homomorphismus ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\phi(\partial\tau) &= \phi(\tilde{\sigma}_0)\phi(\tilde{\sigma}_1)^{-1}\phi(\tilde{\sigma}_2) \\
&= [\rho_{\sigma_0(0)}\sigma_0\bar{\rho}_{\sigma_0(1)}][\rho_{\sigma_1(0)}\sigma_1\bar{\rho}_{\sigma_1(1)}]^{-1}[\rho_{\sigma_2(0)}\sigma_2\bar{\rho}_{\sigma_2(1)}] \\
&= [\rho_{\sigma_0(0)}\sigma_0\bar{\rho}_{\sigma_0(1)}\rho_{\sigma_1(1)}\bar{\sigma}_1\bar{\rho}_{\sigma_1(0)}\rho_{\sigma_2(0)}\sigma_2\bar{\rho}_{\sigma_2(1)}] \\
&= [\rho_{\sigma_0(0)}\sigma_0\bar{\sigma}_1\sigma_2\bar{\rho}_{\sigma_2(1)}] \\
&= [\rho_{\sigma_0(0)}\bar{\rho}_{\sigma_2(1)}] = [c_{x_0}] = 1
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\sigma_0\bar{\sigma}_1\sigma_2$, $\bar{\rho}_{\sigma_0(1)}\rho_{\sigma_1(1)}$, $\bar{\rho}_{\sigma_1(0)}\rho_{\sigma_2(0)}$ und $\rho_{\sigma_0(0)}\bar{\rho}_{\sigma_2(1)}$ nullhomotope Schleifen sind. Damit ist (IV.45) gezeigt. Es genügt nun zu zeigen, dass (IV.46) invers zu (IV.44) ist. Zunächst gilt

$$\phi \circ h_1 = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}},$$

denn für jede Schleife $\sigma : I \to X$ bei x_0 gilt

$$\phi(h_1([\sigma])) = \phi([\tilde{\sigma}]) = \phi(\tilde{\sigma}) = [\rho_{x_0}\sigma\bar{\rho}_{x_0}] = [\rho_{x_0}][\tilde{\sigma}][\rho_{x_0}]^{-1} = [\sigma].$$

Es bleibt daher nur noch

$$h_1 \circ \phi = \mathrm{id}_{H_1(X)} \tag{IV.47}$$

zu zeigen. Um dies einzusehen definieren wir einen Homomorphismus auf Erzeugern $x \in X$ durch

$$g : C_0(X) \to C_1(X), \qquad g(x) := \tilde{\rho}_x.$$

Für jeden 1-Simplex $\tilde{\sigma} : \Delta^1 \to X$ gilt dann

$$\begin{aligned}
h_1(\phi(\tilde{\sigma})) = h_1([\rho_{\sigma(0)}\sigma\bar{\rho}_{\sigma(1)}]) &= [(\rho_{\sigma(0)}\sigma\bar{\rho}_{\sigma(1)})^{\sim}] \\
&= [\tilde{\rho}_{\sigma(0)} + \tilde{\sigma} - \tilde{\rho}_{\sigma(1)}] = [\tilde{\sigma} - g(\partial\tilde{\sigma})].
\end{aligned}$$

Dabei haben wir Lemma IV.11.1(iv) und (v) verwendet. Es folgt sofort $h_1(\phi(c)) = [c - g(\partial c)]$ für alle $c \in C_1(X)$, also $h_1(\phi(c)) = [c]$, für alle Zyklen $c \in Z_1(X)$. Damit ist (IV.47) gezeigt und der Beweis vollständig. $\square$

[37] Wir schreiben die abelsche Gruppe $\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$ multiplikativ.

IV.11.4. Beispiel. Aus Satz IV.11.3 erhalten wir, unabhängig von den Berechnungen in Kapitel IV:

$$
\begin{aligned}
H_1(S^1) &\cong \mathbb{Z} && \text{(I.2.1)}\\
H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) &\cong \mathbb{Z}_2, n \geq 2 && \text{(I.5.18)}\\
H_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) &= 0 && \text{(I.5.16)}\\
H_1(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) &= 0 && \text{(I.5.17)}\\
H_1(K) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 && \text{(I.7.3)}\\
H_1(F_g) &\cong \mathbb{Z}^{2g} && \text{(I.7.4)}\\
H_1(N_g) &\cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2 && \text{(I.7.4)}\\
H_1(\mathrm{SU}_n) &= H_1(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) = 0 && \text{(I.6.4)}\\
H_1(\mathrm{U}_n) &= H_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} && \text{(I.6.6)}\\
H_1(\mathrm{SO}_n) &= H_1(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = H_1(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2, n \geq 3 && \text{(I.6.10)}\\
H_1(\mathrm{O}_n) &= H_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, n \geq 3 && \text{(I.6.12)}\\
H_1(L(p; q_1, \dots, q_n)) &\cong \mathbb{Z}_p, n \geq 2 && \text{(II.5.7)}
\end{aligned}
$$

IV.11.5. Beispiel. Wir erinnern uns an Poincarés Homologie Sphäre $M = S^3/\tilde{G}$ aus Beispiel II.5.11. Dies ist eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichttrivialer Fundamentalgruppe, deren Abelisierung verschwindet. Aus Satz IV.11.3 folgt daher $H_1(M) = 0 = H_1(S^3)$. Jedoch ist M nicht homotopieäquivalent zu S^3, denn $\pi_1(M) \neq 0 = \pi_1(S^3)$. Die Mannigfaltigkeit M wird als *Homologiesphäre* bezeichnet, denn es gilt sogar $H_*(M) = H_*(S^3)$, wir werden dies später mit Hilfe der Poincaré Dualität beweisen. Henri Poincaré hatte 1900 behauptet, dass jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit deren Homologiegruppen mit denen der Sphäre S^3 übereinstimmen, schon zu S^3 homöomorph sein muss. Die Mannigfaltigkeit M von oben zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Dieses Beispiel wurde von Poincaré 1904 publiziert. In der gleichen Arbeit stellte er die Frage ob jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit homöomorph zu S^3 ist. Diese sogenannte *Poincaré Vermutung* galt lange Zeit als zentrale Frage der Topologie, und konnte erst Anfang dieses Jahrhunderts von Grigori Perelman positiv beantwortet werden.

IV.11.6. Bemerkung. Es sei $X = U \cup V$ wobei U und V zwei offene Teilmengen bezeichnen, sodass U, V und $U \cap V$ alle nicht-leer und wegzusammenhängend sind. Wir fixieren einen Basispunkt in $U \cap V$ werden den in der Notation unten aber unterdrücken. Aus der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U\cap V)_{\mathrm{ab}} \arrow[r, "{(j^U_*,-j^V_*)}"] \arrow[d, "\cong"', "h_1^{U\cap V}"] & \pi_1(U)_{\mathrm{ab}}\oplus\pi_1(V)_{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\iota^U_*+\iota^V_*"] \arrow[d, "\cong"', "h_1^U\oplus h_1^V"] & \pi_1(X)_{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "h_1^X"] & 0 \\
H_1(U\cap V) \arrow[r, "{(j^U_*,-j^V_*)}"] & H_1(U)\oplus H_1(V) \arrow[r, "\iota^U_*+\iota^V_*"] & H_1(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aus dem Satz von Seifert–van Kampen, siehe Satz I.5.5, folgt, dass die erste Zeile exakt ist. Die untere Zeile ist ein Stück der Mayer–Vietors Sequenz, da $\tilde{H}_0(U\cap V)=0$ ist sie auch bei $H_1(X)$ exakt. Nach Satz IV.11.3 sind alle vertikalen Pfeile Isomorphismen. Wir können die Exaktheit dieses Stücks der Mayer–Vietoris Sequenz daher als Abelisierte Version des van Kampen Satzes verstehen.