I. De Rham Kohomologie

Wir werden in diesem Kapitel einige grundlegende Resultate zur de Rham Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten behandeln: Homotopieinvarianz, Mayer–Vietoris Sequenz, Künneth Theorem und Poincaré Dualität. Wir beschränken uns dabei auf randlose Mannigfaltigkeiten, alles lässt sich jedoch leicht auf den berandenten Fall verallgemeinern. Der Aufbau dieses Kapitels folgt in groben Zügen der Darstellung in [**1**, Chapter I], siehe aber etwa auch [**6**] oder [**10**].

I.1. Definition und elementare Eigenschaften. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Wir erinnern uns, siehe [**3**, Abschnitt 4.4], dass das *de Rham Differential,* auch *äußere Ableitung*,

$$d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M),$$

folgende Eigenchaften besitzt:

(a) d ist linear.
(b) $d^2 = 0$, dh. $dd\alpha = 0$ für jedes $\alpha \in \Omega^q(M)$.
(c) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$.
(d) $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$, für jede glatte Abbildung $f : M \to N$ und alle $\alpha \in \Omega^q(N)$.

Die Relation $d^2 = 0$ besagt gerade

$$\operatorname{img}\big(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\big) \subseteq \ker\big(\Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\big),$$

dh. jede *exakte* Differentialform, $\alpha = d\beta$, ist auch *geschlossen,* $d\alpha = 0$. I.A. müssen geschlossene Formen aber nicht unbedingt exakt sein.

I.1.1. Definition. Unter der q-ten *de Rham Kohomologie* einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir den reellen Vektorraum

$$H^q(M) := \frac{\ker\big(\Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M)\big)}{\operatorname{img}\big(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M)\big)}.$$

Ist $\alpha \in \Omega^q(M)$ geschlossen, dann bezeichnen wir mit $[\alpha] \in H^q(M)$ die von α repräsentierte *Kohomologieklasse.* Ist $H^q(M)$ endlich dimensional, dann wird $b^q(M) := \dim H^q(M)$ die *q-te Betti Zahl* von M genannt. Wir sagen M hat *endlich dimensionale Kohomologie* wenn $H^*(M) := \bigoplus_q H^q(M)$ endlich dimensional ist. In diesem Fall wird

$$\chi(M) := \textstyle\sum_q (-1)^q b^q(M)$$

als *Euler Charakteristik* von M bezeichnet.

Wegen der Leibniz-Regel $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ erhalten wir wohldefinierte bilineare Abbildungen

$$H^p(M) \times H^q(M) \xrightarrow{\wedge} H^{p+q}(M), \qquad [\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]. \tag{I.1}$$

Sind nämlich α und β geschlossen, so folgt $d(\alpha \wedge \beta) = 0$, also definiert $\alpha \wedge \beta$ tatsächlich eine Kohomologieklasse $[\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}(M)$. Für $\gamma \in \Omega^{q-1}(M)$ folgt weiters $(\alpha + d\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta)$, und daher $[(\alpha + d\gamma) \wedge \beta] = [\alpha \wedge \beta]$, dh. die Klasse $[\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}(M)$ hängt nicht vom Repräsentanten der Klasse $[\alpha]$ ab. Analog lässt sich zeigen, dass die Kohomologieklasse $[\alpha \wedge \beta]$ auch unabhängig vom Repräsentanten der Klasse $[\beta]$ ist.

Aus den entsprechenden Eigenschaften des Hackproduktes, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ und $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$, $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$, $\gamma \in \Omega^r(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 4.3], folgt sofort, dass (I.1) *assotiativ* und *graduiert kommutativ* ist. Genauer, für $a \in H^p(M)$, $b \in H^q(M)$ und $c \in H^r(M)$ gilt

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad \text{sowie} \quad a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a. \tag{I.2}$$

Daher ist $H^*(M) = \bigoplus_q H^q(M)$ eine *assotiative und graduiert kommutative* $\mathbb{R}$-*Algebra.* Ist $M \neq \emptyset$, dann besitzt diese Algebra ein (eindeutiges) *Einselement,* nämlich die von der konstanten Funktion $1 \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ repräsentierte Kohomologieklasse $[1] \in H^0(M)$.

Sei nun $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Wegen der Natürlichkeit des de Rham Differentials, $d \circ f^* = f^* \circ d$, induziert f lineare Abbildungen

$$f^* : H^q(N) \to H^q(M), \qquad f^*([\alpha]) := [f^*\alpha].$$

Für geschlossenes $\alpha \in \Omega^q(N)$ folgt nämlich $df^*\alpha = f^*d\alpha = 0$, also repräsentiert $f^*\alpha$ tatsächlich eine Kohomologieklasse $[f^*\alpha] \in H^q(M)$. Weiters erhalten wir für jedes $\gamma \in \Omega^{q-1}(N)$ sofort $f^*(\alpha + d\gamma) = f^*\alpha + df^*\gamma$, folglich ist die Kohomologieklasse $[f^*\alpha] \in H^q(M)$ unabhängig vom Repräsentanten der Klasse $[\alpha]$. Da $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ ist $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ ein Algebrahomomorphismus,

$$f^*(a \wedge b) = f^*a \wedge f^*b \tag{I.3}$$

für $a \in H^p(N)$ und $b \in H^q(N)$. Weiters gilt offensichtlich

$$\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^q(M)} : H^q(M) \to H^q(M) \tag{I.4}$$

sowie

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^q(P) \to H^q(M) \tag{I.5}$$

für je zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$.

Wir fassen diese Beobachtungen in folgendem Resultat zusammen.

I.1.2. Proposition. *Die de Rham Kohomologie ordnet jeder glatten Mannigfaltigkeit M eine assotiative graduiert kommutative $\mathbb{R}$-Algebra $H^*(M)$, und jeder glatten Abbildung $f : M \to N$ einen Algebrahomomorphismus $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ zu. Diese Zuordnung ist* funktoriell, *dh.* $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^*(M)}$ *und* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ *für je zwei glatte Abbildungen* $f : M \to N$ *und* $g : N \to P$.

I.1.3. Bemerkung. Da $\Omega^q(M)$ nur für $0 \leq q \leq \dim(M)$ nicht-trivial ist, gilt offenbar $H^q(M) = 0$ falls $q < 0$ oder $q > \dim(M)$.

I.1.4. Bemerkung. Für die 0-te Kohomologie erhalten wir

$$H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) \mid f \text{ ist lokal konstant}\},$$

sie kann daher als ein Maß für die Anzahl der Zuammenhangskomponenten von M verstanden werden. Ist $M \neq \emptyset$ zusammenhängend, dann folgt $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, denn im zusammenhängenden Fall sind lokal konstante Funktionen schon konstant.

I.1.5. Beispiel. Aus obigen Bemerkungen erhalten wir für die einpunktige Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^0$ sofort $H^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R}$ und $H^q(\mathbb{R}^0) = 0$ falls $q \neq 0$. Für die zweipunktige Mannigfaltigkeit $S^0 = \{-1, 1\}$ folgt $H^0(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^q(S^0) = 0$ falls $q \neq 0$.

I.1.6. Bemerkung. Ist M eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension n, dann faktorisiert das Integral $\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ zu einer linearen Abbildung

$$\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\alpha] \mapsto \int_M \alpha, \tag{I.6}$$

denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt $\int_M d\beta = 0$ für jedes $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$. Ist $M \neq \emptyset$ dann lässt sich leicht ein $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\int_M \alpha \neq 0$ konstruieren. Aus Dimensionsgründen ist jedes solche α automatisch geschlossen und repräsentiert daher eine Kohomologieklasse in $[\alpha] \in H^n(M)$. Nach Konstruktion ist $\int_M [\alpha] \neq 0$, und (I.6) daher surjektiv. Für orientierbare geschlossene n-Mannigfaltigkeiten erhalten wir somit $H^n(M) \neq 0$.

I.1.7. Bemerkung. Ist $M = M_1 \sqcup M_2$ die disjunkte Vereinigung zweier glatter Mannigfaltigkeiten, dann induzieren die kanonischen Inklusionen $\iota_1 : M_1 \to M$ und $\iota_2 : M_2 \to M$ für jedes q einen Isomorphismus

$$(\iota_1^*, \iota_2^*) : H^q(M) \xrightarrow{\cong} H^q(M_1) \times H^q(M_2),$$

denn $(\iota_1^*, \iota_2^*) : \Omega^q(M) \to \Omega^q(M_1) \times \Omega^q(M_2)$ sind Isomorphismen die mit den de Rham Differentialen verträglich sind. Diese Bemerkung bleibt offenbar für beliebig viele Summanden richtig, dh. die Inklusionen induzieren natürliche Isomorphismen $H^q(\bigsqcup_i M_i) \cong \prod_i H^q(M_i)$ für i aus einer beliebigen Indexmenge.

I.2. Homotopieinvarianz.

I.2.1. Definition. Zwei glatte Abbildungen $f, g : M \to N$ werden (glatt) *homotop* genannt, falls eine glatte Abbildung $h : M \times I \to N$ existiert, sodass $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$, für alle $x \in M$. In diesem Fall schreiben wir $f \simeq g$. Jedes solche h wird eine glatte *Homotopie* von f nach g genannt.

I.2.2. Bemerkung. Glatt homotop zu sein definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Abbildungen $M \to N$, vgl. Aufgabe 3.

I.2.3. Bemerkung. Sind $f_0 \simeq f_1 : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen und $g_0 \simeq g_1 : N \to P$ zwei weitere glatt homotope Abbildungen, dann ist auch $g_0 \circ f_0$ glatt homotop zu $g_1 \circ f_1$, vgl. Aufgabe 4.

I.2.4. Bemerkung. Sind $f, g : M \to N$ zwei glatte Abbildungen und existiert eine *stetige* Abbildung $h : M \times I \to N$ mit $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$, dann existiert auch eine glatte Homotopie von f nach g, siehe etwa [**4**] oder [**2**, Satz 14.8].

I.2.5. Satz (Homotopieinvarianz). *Sind $f \simeq g : M \to N$ zwei homotope glatte Abbildungen, dann gilt $f^* = g^* : H^q(N) \to H^q(M)$, für alle q.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $h : M \times I \to N$ mit $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = g(x)$, $x \in M$. Betrachte nun die linearen Abbildungen, vgl. Aufgabe 5,

$$k : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M), \qquad k(\alpha) := \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt$$

wobei $\partial_t \in \mathfrak{X}(M \times I)$, $\partial_t(x,t) := \frac{d}{ds}|_{s=t}(x,s)$, und $\iota_t : M \to M \times I$, $\iota_t(x) := (x,t)$. Dann gilt

$$d \circ k + k \circ d = g^* - f^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(M), \tag{I.7}$$

denn für jede Differentialform $\alpha \in \Omega^q(N)$ folgt, vgl. [**3**, Abschnitt 4.9],

$$\begin{aligned} d(k(\alpha)) + k(d\alpha) &= d \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt + \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* d\alpha \, dt \\ &= \int_0^1 \iota_t^* (d i_{\partial t} + i_{\partial_t} d) h^* \alpha \, dt = \int_0^1 \iota_t^* L_{\partial t} h^* \alpha \, dt = \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t} \iota_t^* h^* \alpha \, dt \\ &= \iota_1^* h^* \alpha - \iota_0^* h^* \alpha = (h \circ \iota_1)^* \alpha - (h \circ \iota_0)^* \alpha = g^* \alpha - f^* \alpha. \end{aligned}$$

Für jede geschlossene Differentialform $\alpha \in \Omega^q(N)$ erhalten wir aus (I.7) nun $g^*\alpha = f^*\alpha + d(k(\alpha))$, also $g^*([\alpha]) = f^*([\alpha]) \in H^q(M)$. □

I.2.6. Definition. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird (glatte) *Homotopieäquivalenz* genannt, falls eine glatte Abbildung $g : N \to M$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$. In diesem Fall heißen M und N (glatt) *homotopieäquivalent* und wir schreiben $M \simeq N$. Eine Mannigfaltigkeit wird (glatt) *kontrahierbar* genannt wenn sie homotopieäquivalent zur einpunktigen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^0$ ist.

I.2.7. Bemerkung. Jeder Diffeomorphismus ist offenbar eine glatte Homotopieäquivalenz, diffeomorphe Mannigfaltigkeiten sind daher auch homotopieäquivalent.

I.2.8. Bemerkung. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei glatte Homotopieäquivalenzen, dann ist auch $g \circ f : M \to P$ eine glatte Homotopieäquivalenz. Dies folgt aus Bemerkung I.2.3. Mit $M \simeq N$ und $N \simeq P$ gilt daher auch $M \simeq P$.

I.2.9. Beispiel. Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist die kanonische Projektion $p : M \times \mathbb{R}^k \to M$ eine Homotopieäquivalenz. Betrachte dazu die glatte

Abbildung $\sigma : M \to M \times \mathbb{R}^k$, $\sigma(x) := (x, 0)$. Offensichtlich ist $p \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, es gilt aber auch $\sigma \circ p \simeq \mathrm{id}_{M \times \mathbb{R}^k}$, denn

$$h : (M \times \mathbb{R}^k) \times I \to M \times \mathbb{R}^k, \qquad h(x, v, t) := (x, tv),$$

definiert eine glatte Homotopie von $\sigma \circ p$ zur identischen Abbildung $\mathrm{id}_{M \times \mathbb{R}^k}$.

I.2.10. Korollar. *Jede glatte Homotopieäquivalenz $f : M \to N$ induziert Isomorphismen $f^* : H^q(N) \xrightarrow{\cong} H^q(M)$, für alle q.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$. Aus Satz I.2.5, (I.4) und (I.5) folgt daher $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^*(M)}$ sowie $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{id}_N^* = \mathrm{id}_{H^*(N)}$. Folglich sind $f^* : H^q(N) \to H^q(M)$ und $g^* : H^q(M) \to H^q(N)$ zueinander inverse Isomorphismen. □

I.2.11. Bemerkung. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, und sind die graduierten Algebren $H^*(M)$ und $H^*(N)$ nicht isomorph, dann können M und N nicht homotopieäquivalent (und daher auch nicht diffeomorph) sein. Dies folgt sofort aus Korollar I.2.10.

I.2.12. Korollar. *Für jede kontrahierbare Mannigfaltigkeit M, gilt $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ und $H^q(M) = 0$ falls $q \neq 0$. Insbesondere daher $\chi(M) = 1$. Auf einer kontrahierbaren Mannigfaltigkeit ist also jede geschlossene q-Form, $q \geq 1$, auch exakt.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar I.2.10 und Beispiel I.1.5. □

I.2.13. Beispiel. Jede nicht-leere *konvexe Teilmannigfaltigkeit* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar. Seien dazu $P \in M$, $\iota : \mathbb{R}^0 \to M$, $\iota(0) := P$, und $r : M \to \mathbb{R}^0$, $r(x) := 0$, die konstante Abbildung. Offensichtlich gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^0}$. Wegen der Konvexität von M ist

$$h : M \times I \to M, \qquad h(x, t) := tx + (1 - t)P,$$

eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_M, also $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_M$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und auch die offenen Bälle $B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ kontrahierbar. Auf diesen Mannigfaltigkeiten ist daher jede geschlossene q-Form, $q \geq 1$, auch exakt.

I.2.14. Korollar (Poincaré Lemma). *Für die Kohomologie des Euklidischen Raums gilt*

$$H^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{anderfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar I.2.12, denn $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar. □

I.2.15. Beispiel. Die kanonische Inklusion $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine Homotopieäquivalenz, $n \geq 1$. Bezeichnet nämlich $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ die (glatte) radiale Retraktion, $r(x) := x/|x|$, dann gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, denn

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad h(x, t) := tx + (1 - t)x/|x|,$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Nach Korollar I.2.10 induziert die Inklusion daher Isomorphismen $H^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^q(S^{n-1})$, für jedes q.

I.2.16. Beispiel. Ist $N \in S^n$ dann liefert die stereographische Projektion einen Diffeomorphismus

$$N^\perp \cong S^n \setminus \{N\}, \qquad x \mapsto N + \frac{2}{|x-N|^2}(x-N),$$

wobei $N^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp N\} \cong \mathbb{R}^n$. Mit $\mathbb{R}^n$ ist daher auch $S^n \setminus \{N\}$ kontrahierbar. Sei nun $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ und $n \geq 1$. Dann ist die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to S^n \setminus \{N, -N\}$, $x \mapsto (x, 0)$, eine Homotopieäquivalenz. Dies folgt aus Beispiel I.2.15, denn die stereographische Projektion schränkt sich zu einem Diffeomorphismus $S^n \setminus \{N, -N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein, und dieser führt die Inklusion $S^{n-1} \to S^n \setminus \{N, -N\}$ in die Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ über.

I.2.17. Beispiel. Wir erinnern uns an den reellen projektiven Raum, siehe [**3**, Abschnitt 2.5],

$$\mathbb{RP}^n = \big\{\text{1-dimensionale lineare Teilräume in } \mathbb{R}^{n+1}\big\},$$

eine zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension n. Die offenen Teilmengen $U_i := \{[x^1 : \cdots : x^{n+1}] \mid x^i \neq 0\}$, $1 \leq i \leq n+1$, überdecken $\mathbb{RP}^n$, und

$$u_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad u_i([x^1 : \cdots : x^{n+1}]) := \big(\tfrac{x^1}{x^i}, \dots, \tfrac{x^{i-1}}{x^i}, \tfrac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \tfrac{x^{n+1}}{x^i}\big)$$

bildet einen glatten Atlas von $\mathbb{RP}^n$. Beachte auch, dass die kanonische Abbildung $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, vgl. Aufgabe 7. Offensichtlich besteht $\mathbb{RP}^0$ nur aus einem Punkt, und wir haben einen Diffeomorphismus $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, siehe Aufgabe 8.

Sei nun $n \geq 1$. Die Inklusion $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ erlaubt es $\mathbb{RP}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{RP}^n$ aufzufassen, $[x^1 : \cdots : x^n] \mapsto [x^1 : \cdots : x^n : 0]$. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1} = U_{n+1}$ sowie $V := \mathbb{RP}^n \setminus \{N\}$, wobei $N := [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{RP}^n$. Da $N \notin \mathbb{RP}^{n-1}$, haben wir

$$\mathbb{RP}^n = U \cup V.$$

Die Karte u_{n+1} liefert einen Diffeomorphismus $U \cong \mathbb{R}^n$, also ist U kontrahierbar. Die Einschränkung dieser Karte liefert einen Diffeomorphismus $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es gilt daher $U \cap V \simeq S^{n-1}$ nach Beispiel I.2.15. Schließlich ist die kanonische (glatte) Inklusion $\iota : \mathbb{RP}^{n-1} \to V$ eine Homotopieäquivalenz, denn für die glatte Abbildung

$$r : V \to \mathbb{RP}^{n-1}, \qquad r([x^1 : \cdots : x^{n+1}]) := [x^1 : \cdots : x^n]$$

gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{RP}^{n-1}}$ aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_V$, denn

$$h : V \times I \to V, \qquad h\big([x^1 : \cdots : x^{n+1}], t\big) := [x^1 : \cdots : x^n : tx^{n+1}],$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_V.

I.2.18. Beispiel. Unter dem *komplexen projektiven Raum* verstehen wir

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \big\{\text{1-dimensionale komplexe Teilräume von } \mathbb{C}^{n+1}\big\}.$$

Ist $(z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, dann bezeichnen wir mit $[z^1 : \cdots : z^{n+1}] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ den von $(z^1, \dots, z^{n+1})$ aufgespannten 1-dimensionalen komplexen Teilraum. Dies liefert eine surjektive Abbildung

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \qquad \pi(z^1, \dots, z^{n+1}) := [z^1 : \cdots : z^{n+1}].$$

Wir versehen $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie, dh. mit der feinsten Topologie für die π noch stetig ist. Einschränken von π auf

$$S^{2n+1} = \big\{(z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z^1|^2 + \cdots + |z^{n+1}|^2 = 1\big\}$$

liefert eine stetige surjektive Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die als *Hopf Abbildung* bezeichnet wird. Unter Verwendung der radialen Retraktion $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^{2n+1}$, vgl. Beispiel I.2.15, lässt sich leicht zeigen, dass die Topologie auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich p übereinstimmt. Daraus folgt nun leicht, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ein zusammenhängender kompakter Hausdorffraum ist. Die Teilmengen $U_i := \big\{[z^1 : \cdots : z^{n+1}] : z^i \neq 0\big\}$, $1 \leq i \leq n+1$, sind offen in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, und wir haben Homöomorphismen

$$u_i : U_i \to \mathbb{C}^n, \qquad u_i([z^1 : \cdots : z^{n+1}]) := \big(\tfrac{z^1}{z^i}, \dots, \tfrac{z^{i-1}}{z^i}, \tfrac{z^{i+1}}{z^i}, \dots, \tfrac{z^{n+1}}{z^i}\big),$$

mit Umkehrabbildungen

$$u_i^{-1} : \mathbb{C}^n \to U_i, \qquad u_i^{-1}(w^1, \dots, w^n) := [w^1 : \cdots : w^{i-1} : 1 : w^i : \cdots : w^n].$$

Die Kartenwechselabbildungen,

$$(u_j \circ u_i^{-1})(w^1, \dots, w^n) = \begin{cases} \big(\tfrac{w^1}{w^{j-1}}, \dots, \tfrac{w^{i-1}}{w^{j-1}}, \tfrac{1}{w^{j-1}}, \tfrac{w^i}{w^{j-1}}, \dots, \tfrac{w^{j-2}}{w^{j-1}}, \tfrac{w^j}{w^{j-1}}, \dots, \tfrac{w^n}{w^{j-1}}\big) & \text{falls } i < j \\ (w^1, \dots, w^n) & \text{falls } i = j \\ \big(\tfrac{w^1}{w^j}, \dots, \tfrac{w^{j-1}}{w^j}, \tfrac{w^{j+1}}{w^j}, \dots, \tfrac{w^{i-1}}{w^j}, \tfrac{1}{w^j}, \tfrac{w^i}{w^j}, \dots, \tfrac{w^n}{w^j}\big) & \text{falls } i > j \end{cases}$$

sind offensichtlich glatt (sogar holomorph) und orientierungsbewahrend. Also bilden die Karten (U_i, u_i), $1 \leq i \leq n+1$, einen orientierten glatten Atlas von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dadurch wird $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zu einer orientierten zusammenhängenden geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Beachte auch, dass die Hopf Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ glatt ist, vgl. Aufgabe 10. Offensichtlich ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ einpunktig. Weiters existiert ein Diffeomorphismus $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$, vgl. Aufgabe 11.

Sei nun $n \geq 1$. Die Inklusion $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ erlaubt es $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ aufzufassen, $[z^1 : \cdots : z^n] \mapsto [z^1 : \cdots : z^n : 0]$. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} = U_{n+1}$ sowie $V := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{N\}$, wobei $N := [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Da $N \notin \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ haben wir

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V.$$

Die Karte u_{n+1} liefert einen Diffeomorphismus $U \cong \mathbb{C}^n$, also ist U kontrahierbar. Die Einschränkung dieser Karte liefert einen Diffeomorphismus $U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, es gilt daher $U \cap V \cong S^{2n-1}$ nach Beispiel I.2.15. Schließlich ist die kanonische (glatte) Inklusion $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to V$ eine Homotopieäquivalenz, denn für die glatte Abbildung

$$r : V \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}, \qquad r([z^1 : \cdots : z^{n+1}]) := [z^1 : \cdots : z^n]$$

gilt offenbar $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}}$ aber auch $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_V$, denn

$$h : V \times I \to V, \qquad h\big([z^1 : \cdots : z^{n+1}], t\big) := [z^1 : \cdots : z^n : tz^{n+1}],$$

ist eine glatte Homotopie von $\iota \circ r$ nach id_V.

I.2.19. Beispiel. Die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine glatte Homotopieäquivalenz, vgl. Aufgabe 12. Auch die Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist eine glatte Homotopieäquivalenz, vgl. Aufgabe 13.

I.3. Mayer–Vietoris Sequenz. Ist $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen, dann liefert die Mayer–Vietoris Sequenz einen Zusammenhang zwischen der de Rham Kohomologie von U, V, $U \cap V$ und M, siehe Satz I.3.12 unten. Zusammen mit der Homotopieinvarianz ermöglicht dies die Berechnung der de Rham Kohomologie vieler Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen mit einigen algebraischen Vorbereitungen.

Eine Sequenz linearer Abbildungen $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ heißt *exakt bei* V_2, falls $\mathrm{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. Eine Sequenz linearer Abbildungen

$$\cdots \to V_{q-1} \xrightarrow{\varphi_{q-1}} V_q \xrightarrow{\varphi_q} V_{q+1} \xrightarrow{\varphi_{q+1}} V_{q+2} \to \cdots$$

wird *exakt* genannt wenn sie bei jedem V_q exakt ist, dh. wenn $\mathrm{img}(\varphi_{q-1}) = \ker(\varphi_q)$ für jedes q gilt. Unter einer *kurzen exakten Sequenz* linearer Abbildungen verstehen wir eine exakte Sequenz der Form $0 \to V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3 \to 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn ι injektiv ist, π surjektiv ist, und $\mathrm{img}(\iota) = \ker(\pi)$ gilt. In diesem Fall können wir V_1 via ι als Teilraum von V_2 auffassen, und π induziert einen Isomorphismus $\pi : V_2/\iota(V_1) \cong V_3$.

I.3.1. Beispiel. Es sei V ein Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Bezeichnen $\iota : W \to V$ die kanonische Inklusion und $\pi : V \to V/W$ die kanonische Projektion auf den Quotientenraum, dann ist $0 \to W \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} V/W \to 0$ eine kurze exakte Sequenz.

I.3.2. Bemerkung. Eine Sequenz linearer Abbildungen $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \to 0$ ist genau dann exakt, wenn φ ein Isomorphismus ist, denn Exaktheit bei V besagt, dass φ injektiv ist, und Exaktheit bei W bedeutet, dass φ surjektiv ist.

I.3.3. Bemerkung. Ist $\cdots \to V_q \xrightarrow{\varphi_q} V_{q+1} \xrightarrow{\varphi_{q+1}} V_{q+2} \to \cdots$ eine exakte Sequenz endlich dimensionaler Vektorräume, und $V_q = 0$ für fast alle q, dann gilt

$$\textstyle\sum_q (-1)^q \dim V_q = 0.$$

Wegen der Exaktheit haben wir nämlich Isomorphismen $V_q/\ker\varphi_q \cong \operatorname{img}\varphi_q = \ker\varphi_{q+1}$, also $\dim V_q = \dim\ker\varphi_q + \dim\ker\varphi_{q+1}$. Aufaddieren dieser Gleichungen liefert nun

$$\sum_q(-1)^q \dim V_q = \sum_q(-1)^q \dim\ker\varphi_q + \sum_q(-1)^q \dim\ker\varphi_{q+1} = 0,$$

denn die Dimensionen der Kerne kürzen sich teleskopartig.

I.3.4. Bemerkung. Sind $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ und $W_1 \xrightarrow{\psi_1} W_2 \xrightarrow{\psi_2} W_3$ exakte Sequenzen linearer Abbildugen, dann ist offensichtlich auch

$$V_1 \oplus W_1 \xrightarrow{\varphi_1\oplus\psi_1} V_2 \oplus W_2 \xrightarrow{\varphi_2\oplus\psi_2} V_3 \oplus W_3$$

exakt, denn $\operatorname{img}(\varphi_1\oplus\psi_1) = \operatorname{img}(\varphi_1)\oplus\operatorname{img}(\psi_1) = \ker(\varphi_2)\oplus\ker(\psi_2) = \ker(\varphi_2\oplus\psi_2)$.

I.3.5. Bemerkung. Es sei $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine Sequenz linearer Abbildungen und $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, dh. $\operatorname{img}(\varphi_1) \subseteq \ker(\varphi_2)$. In dieser Situation sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Die Sequenz ist exakt, dh. $\operatorname{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$.
(b) Es existieren lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$, sodass $\mathrm{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$.

Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial, für $v_2 \in \ker(\varphi_2)$ folgt $v_2 = \varphi_1 h_1 v_2 + h_2\varphi_2 v_2 = \varphi_1 h_1 v_2$, dh. $v_2 \in \operatorname{img}(\varphi_1)$. Nun zur umgekehrten Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Da $\varphi_1 : V_1 \to \operatorname{img}(\varphi_1)$ surjektiv ist, existiert eine lineare Abbildung $\bar h_1 : \operatorname{img}(\varphi_1) \to V_1$ mit $\varphi_1 \circ \bar h_1 = \mathrm{id}_{\operatorname{img}(\varphi_1)}$. Wir dehnen $\bar h_1$ zu einer linearen Abbildung $h_1 : V_2 \to V_1$ aus, nach Konstruktion verschwindet daher $\mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1 : V_2 \to V_2$ auf dem Teilraum $\operatorname{img}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2) \subseteq V_2$. Diese Differenz faktorisiert daher zu einer linearen Abbildung $\bar h_2 : \operatorname{img}(\varphi_2) = V_2/\ker(\varphi_2) \to V_2$, dh. $\bar h_2 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1$. Setzen wir nun $\bar h_2$ zu einer linearen Abbildung $h_2 : V_3 \to V_2$ fort, dann gilt die gewünschte Relation $h_2 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{V_2} - \varphi_1 \circ h_1$.

I.3.6. Bemerkung. Ist $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen und W ein weiterer Vektorraum, dann ist auch die Sequenz

$$V_1 \otimes W \xrightarrow{\varphi_1\otimes\mathrm{id}_W} V_2 \otimes W \xrightarrow{\varphi_2\otimes\mathrm{id}_W} V_3 \otimes W \tag{I.8}$$

exakt. Es gilt nämlich $(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) = (\varphi_2 \circ \varphi_1) \otimes \mathrm{id}_W = 0 \otimes \mathrm{id}_W = 0$, also $\operatorname{img}(\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) \subseteq \ker(\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W)$. Für die umgekehrte Inklusion wählen wir lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$ mit $\mathrm{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$, siehe Bemerkung I.3.5. Tensorieren mit W liefert lineare Abbildungen $h_1 \otimes \mathrm{id}_W : V_2 \otimes W \to V_1 \otimes W$ und $h_2 \otimes \mathrm{id}_W : V_3 \otimes W \to V_2 \otimes W$ und diese erfüllen

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{V_2\otimes W} = \mathrm{id}_{V_2} \otimes \mathrm{id}_W &= (\varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2) \otimes \mathrm{id}_W \\ &= (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (h_1 \otimes \mathrm{id}_W) + (h_2 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_W).\end{aligned}$$

Aus Bemerkung I.3.5 folgt daher, dass (I.8) exakt ist.

I.3.7. Bemerkung. Ist $V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen, dann ist auch die duale Seqeunz

$$V_1' \xleftarrow{\varphi_1'} V_2' \xleftarrow{\varphi_2'} V_3' \tag{I.9}$$

exakt. Dabei bezeichnen $V_q' = L(V_q, \mathbb{R})$ die Dualräume und φ_q' die dualen Abbildungen. Zunächst gilt nämlich $\varphi_1' \circ \varphi_2' = (\varphi_2 \circ \varphi_1)' = 0$, also $\operatorname{img}(\varphi_2') \subseteq \ker(\varphi_1')$. Um auch die umgekehrte Inklusion $\operatorname{img}(\varphi_2') \supseteq \ker(\varphi_1')$ einzusehen, wählen wir lineare Abbildungen $h_1 : V_2 \to V_1$ und $h_2 : V_3 \to V_2$ mit $\operatorname{id}_{V_2} = \varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2$, siehe Bemerkung I.3.5. Dualisieren liefert lineare Abbildungen $h_1' : V_1' \to V_2'$ und $h_2' : V_2' \to V_3'$ mit $\operatorname{id}_{V_2'} = \operatorname{id}_{V_2}' = (\varphi_1 \circ h_1 + h_2 \circ \varphi_2)' = h_1' \circ \varphi_1' + \varphi_2' \circ h_2'$, aus Bemerkung I.3.5 folgt daher, dass (I.9) exakt ist.

I.3.8. Lemma (Fünferlemma). *Es sei*

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "\psi_1"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_5 \\
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[u, "\lambda_1"', "\cong"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, "\lambda_2"', "\cong"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[u, "\lambda_3"'] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[u, "\lambda_4"', "\cong"] & V_5 \arrow[u, "\lambda_5"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm[1] *linearer Abbildungen mit exakten Zeilen. Sind in dieser Situation λ_1, λ_2, λ_4 und λ_5 Isomorphismen, dann ist auch λ_3 ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass λ_3 injektiv ist. Sei dazu $v_3 \in V_3$ mit $\lambda_3 v_3 = 0$. Es folg $\lambda_4\varphi_3 v_3 = \psi_3\lambda_3 v_3 = 0$, also $\varphi_3 v_3 = 0$ aufgrund der Injektivität von λ_4. Wegen der Exaktheit bei V_3 existiert also $v_2 \in V_2$ mit $\varphi_2 v_2 = v_3$. Es folgt $\psi_2\lambda_2 v_2 = \lambda_3\varphi_2 v_2 = \lambda_3 v_3 = 0$, wegen der Exaktheit bei W_2 finden wir daher $w_1 \in W_1$ mit $\psi_1 w_1 = \lambda_2 v_2$. Da λ_1 surjektiv ist existiert $v_1 \in V_1$ mit $\lambda_1 v_1 = w_1$. Wir erhalten $\lambda_2\varphi_1 v_1 = \psi_1\lambda_1 v_1 = \psi_1 w_1 = \lambda_2 v_2$, also $\varphi_1 v_1 = v_2$ aufgrund der Injektivität von λ_2. Dies impliziert nun $v_3 = \varphi_2 v_2 = \varphi_2\varphi_1 v_1 = 0$, denn $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ wegen der Exaktheit bei V_2. Also ist λ_3 injektiv.

Es bleibt noch die Surjektivität von λ_3 zu zeigen. Sei dazu $w_3 \in W_3$. Da λ_4 surjektiv ist, existiert $v_4 \in V_4$ mit $\psi_3 w_3 = \lambda_4 v_4$. Es folgt $\lambda_5\varphi_4 v_4 = \psi_4\lambda_4 v_4 = \psi_4\psi_3 w_3 = 0$, denn $\psi_4 \circ \psi_3 = 0$ wegen der Exaktheit bei W_4. Da λ_5 injektiv ist, schließen wir $\varphi_4 v_4 = 0$. Aufgrund der Exaktheit bei V_4 existiert daher $v_3 \in V_3$ mit $\varphi_3 v_3 = v_4$. Wir erhalten nun $\psi_3(w_3 - \lambda_3 v_3) = \psi_3 w_3 - \lambda_4\varphi_3 v_3 = \lambda_4 v_4 - \lambda_4 v_4 = 0$. Wegen der Exaktheit bei W_3 existiert daher $w_2 \in W_2$ mit $\psi_2 w_2 = w_3 - \lambda_3 v_3$. Da λ_2 surjektiv ist, finden wir $v_2 \in V_2$ mit $\lambda_2 v_2 = w_2$. Es folgt nun $\lambda_3(v_3 + \varphi_2 v_2) = \lambda_3 v_3 + \psi_2\lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \psi_2 w_2 = w_3$. Daher ist λ_3 auch surjektiv, und der Beweis vollständig. □

I.3.9. Bemerkung. Ist $0 \to V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz linearer Abbildungen, dann gilt $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$ und daher insbesondere $\dim V_2 =$

[1] Dh. $\psi_i \circ \lambda_i = \lambda_{i+1} \circ \varphi_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

$\dim V_1 + \dim V_3$. Wegen der Surjektivität von π existiert nämlich eine lineare Abbildung $\sigma : V_3 \to V_2$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{V_3}$, und wir erhalten eine lineare Abbildung $\iota + \sigma : V_1 \oplus V_3 \to V_2$, $(v_1, v_3) \mapsto \iota v_1 + \sigma v_3$. Offenbar kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "\iota"] & V_2 \arrow[r, "\pi"] & V_3 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "i"] \arrow[u, equal] & V_1 \oplus V_3 \arrow[r, "p"] \arrow[u, "\iota+\sigma"'] & V_3 \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei $i : V_1 \to V_1 \oplus V_3$, $i(v_1) := (v_1, 0)$ und $p : V_1 \oplus V_3 \to V_3$, $p(v_1, v_3) := v_3$. Beachte, dass in diesem Diagramm auch die zweite Zeile exakt ist, nach Lemma I.3.8 ist also $\iota + \sigma$ der gesuchte Isomorphismus.

I.3.10. Bemerkung. Es sei $V_1 \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} V_3$ eine exakte Sequenz linearer Abbildungen. Sind in dieser Situation V_1 und V_3 endlich dimensional, dann ist auch V_2 endlich dimensional. Dies folgt aus Bemerkung I.3.9, denn $0 \to V_1/\ker(\iota) \xrightarrow{\iota} V_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{img}(\pi) \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz.

Unter einem *Kokettenkomplex* Ω^* verstehen wir eine Familie von Vektorräumen Ω^q, $q \in \mathbb{Z}$, zusammen mit linearen Abbildungen $d^q : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$ sodass $d^{q+1} \circ d^q = 0$, für alle q. Das an dieser Stelle wichtigeste Beispiel ist der de Rham Komplex einer glatten Mannigfaltigkeit M, dh. $\Omega^*(M)$ mit der äußeren Ableitung, wir werden später aber auch einige Variationen davon betrachten. Jedem Kokettenkomplex können wir seine Kohomologie $H^q(\Omega) = \ker(d^q)/\mathrm{img}(d^{q-1})$ zuordnen. Für den de Rham Komplex $\Omega^*(M)$ erhalten wir natürlich die de Rham Kohomologie $H^*(M)$.

Unter einer Komplexabbildung $\varphi : \Omega^* \to \tilde{\Omega}^*$ zwischen Kokettenkompelxen Ω^* und $\tilde{\Omega}^*$ verstehen wir eine Familie linearer Abbildungen $\varphi^q : \Omega^q \to \tilde{\Omega}^q$, $q \in \mathbb{Z}$, sodass $\varphi^{q+1} \circ d^q = \tilde{d}^q \circ \varphi^q$, für alle q. Jede solche Komplexabbildung induziert lineare Abbildungen in der Kohomologie, $\varphi : H^q(\Omega) \to H^q(\tilde{\Omega})$. Ist $f : M \to N$ glatt, dann liefert der Pullback von Differentialformen eine Komplexabbildung $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$, die induzierten Abbildungen in der Kohomologie sind genau die in Abschnitt I.1 behandelten.

Unter einer *kurzen exakten Sequenz von Kokettenkomplexen* verstehen wir eine Sequenz von Komplexabbildungen $0 \to \Omega_1^* \xrightarrow{\iota} \Omega_2^* \xrightarrow{\pi} \Omega_3^* \to 0$, sodass $0 \to \Omega_1^q \xrightarrow{\iota} \Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q \to 0$ für jedes q exakt ist.

I.3.11. Satz. *Ist* $0 \to \Omega_1^* \xrightarrow{\iota} \Omega_2^* \xrightarrow{\pi} \Omega_3^* \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen, dann existiert eine natürliche* lange exakte Sequenz *der Form*

$$\cdots \xrightarrow{\pi} H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} \cdots$$

Die lineare Abbildung ∂ wird dabei als Einhängungshomomorphismus *bezeichnet.*

Beweis. Wir beginnen mit der Exaktheit bei $H^q(\Omega_2)$. Nach Voraussetzung ist $\pi \circ \iota = 0 : \Omega_1^q \to \Omega_3^q$, für die induzierten Abbildungen in der Kohomologie gilt daher ebenfalls $\pi \circ \iota = 0 : H^q(\Omega_1) \to H^q(\Omega_3)$, dh.

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr). \tag{I.10}$$

Um auch die umgekehrte Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \tag{I.11}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_2)$, $\alpha \in \Omega_2^q$, $d\alpha = 0$, sodass $\pi([\alpha]) = 0$. Es existiert daher $\beta \in \Omega_3^{q-1}$ mit $\pi\alpha = d\beta$. Da $\pi : \Omega_2^{q-1} \to \Omega_3^{q-1}$ surjektiv ist, existiert $\gamma \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\pi\gamma = \beta$. Es folgt nun $\pi(\alpha - d\gamma) = \pi\alpha - d\pi\gamma = \pi\alpha - d\beta = 0$, dh. $\alpha - d\gamma \in \ker(\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q)$. Nach Voraussetzung existiert daher $\delta \in \Omega_1^q$ mit $\iota\delta = \alpha - d\gamma$. Es folgt $\iota d\delta = d\iota\delta = d(\alpha - d\gamma) = 0$, und wegen der Injektivität von $\Omega_1^{q+1} \xrightarrow{\iota} \Omega_2^{q+1}$ also $d\delta = 0$, dh. δ repräsentiert eine Kohomologieklasse $[\delta] \in H^q(\Omega_1)$. Nach Konstruktion gilt $\iota([\delta]) = [\iota\delta] = [\alpha - d\gamma] = [\alpha]$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)$, womit (I.11) gezeigt wäre. Zusammen besagen (I.10) und (I.11), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_2)$ exakt ist.

Widmen wir uns nun der Konstruktion des Einhängungshomomorphismus $\partial : H^q(\Omega_3) \to H^{q+1}(\Omega_1)$. Sei also $a = [\alpha] \in H^q(\Omega_3)$, $\alpha \in \Omega_3^q$, $d\alpha = 0$. Da $\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q$ surjektiv ist, finden wir $\beta \in \Omega_2^q$ mit $\pi\beta = \alpha$. Es folgt $\pi d\beta = d\pi\beta = d\alpha = 0$, also $d\beta \in \ker(\Omega_2^{q+1} \xrightarrow{\pi} \Omega_3^{q+1})$. Nach Voraussetzung existiert daher $\gamma \in \Omega_1^{q+1}$ mit $\iota\gamma = d\beta$. Es folgt $\iota d\gamma = d\iota\gamma = dd\beta = 0$ und wegen der Injektivität von $\Omega_1^{q+2} \xrightarrow{\iota} \Omega_2^{q+2}$ also $d\gamma = 0$. Wir zeigen nun, dass die von γ repräsentierte Kohomologieklasse $[\gamma] \in H^{q+1}(\Omega_1)$ unabhängig von der Wahl von α, β und γ ist, und wir daher den Einhängungshomomorphismus durch $\partial a := [\gamma]$ definieren können. Seien dazu $a = [\tilde\alpha]$, $\tilde\alpha \in \Omega_3^q$, $d\tilde\alpha = 0$, $\tilde\beta \in \Omega_2^q$, $\pi\tilde\beta = \tilde\alpha$ und $\tilde\gamma \in \Omega_1^{q+1}$, $\iota\tilde\gamma = d\tilde\beta$ andere solche Wahlen. Da $[\tilde\alpha] = a = [\alpha]$, existiert $\delta \in \Omega_3^{q-1}$ mit $\tilde\alpha = \alpha + d\delta$. Aufgrund der Surjektivität von $\Omega_2^{q-1} \xrightarrow{\pi} \Omega_3^{q-1}$ finden wir $\varepsilon \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\pi\varepsilon = \delta$. Es folgt $\pi d\varepsilon = d\pi\varepsilon = d\delta = \tilde\alpha - \alpha = \pi\tilde\beta - \pi\beta$, also liegt $\tilde\beta - \beta - d\varepsilon$ im Kern von $\Omega_2^q \xrightarrow{\pi} \Omega_3^q$. Es existiert daher $\eta \in \Omega_1^q$ mit $\iota\eta = \tilde\beta - \beta - d\varepsilon$. Es folgt $\iota d\eta = d\iota\eta = d\tilde\beta - d\beta = \iota\tilde\gamma - \iota\gamma$, und wegen der Injektivität von $\Omega_1^q \xrightarrow{\iota} \Omega_3^q$ erhalten wir daraus $d\eta = \tilde\gamma - \gamma$. Daher gilt $[\tilde\gamma] = [\gamma] \in H^{q+1}(\Omega_1)$, der Einhängungshomomorphismus ∂ ist also durch $\partial a := [\gamma]$ wohldefiniert. Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass ∂ linear ist, siehe Aufgabe 14.

Kommen wir nun zur Exaktheit bei $H^q(\Omega_3)$. Die Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1)\bigr) \tag{I.12}$$

folgt sofort aus der Definition von ∂. Um auch die umgekehrte Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^q(\Omega_2) \xrightarrow{\pi} H^q(\Omega_3)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\Omega_1)\bigr) \tag{I.13}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_3)$, $\alpha \in \Omega_q^3$, $d\alpha = 0$, sodass $\partial([\alpha]) = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus ∂ existieren daher $\beta \in \Omega_2^q$, $\gamma \in \Omega_1^{q+1}$ und $\delta \in \Omega_1^q$, sodass $\pi\beta = \alpha$, $\iota\gamma = d\beta$ und $\gamma = d\delta$. Es folgt $d(\beta - \iota\delta) = d\beta - \iota d\delta = d\beta - \iota\gamma = 0$, also repräsentiert $\beta - \iota\delta$ eine Kohomologieklasse $[\beta - \iota\delta] \in H^q(\Omega_2)$.

Nach Konstruktion gilt $\pi(\beta - \iota\delta) = \pi\beta - \pi\iota\delta = \alpha$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $\iota : H^q(\Omega_2) \to H^q(\Omega_3)$. Dies zeigt (I.13). Zusammen besagen (I.12) und (I.13), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_3)$ exakt ist.

Es bleibt noch die Exaktheit bei $H^q(\Omega_1)$ zu zeigen. Die Inklusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1)\bigr) \subseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \tag{I.14}$$

folgt sofort aus der Definition des Einhängungshomomorphismus ∂. Um die umgekehrte Inkusion

$$\operatorname{img}\bigl(H^{q-1}(\Omega_3) \xrightarrow{\partial} H^q(\Omega_1)\bigr) \supseteq \ker\bigl(H^q(\Omega_1) \xrightarrow{\iota} H^q(\Omega_2)\bigr) \tag{I.15}$$

einzusehen, sei nun $[\alpha] \in H^q(\Omega_1)$, $\alpha \in \Omega_1^q$, $d\alpha = 0$, sodass $\iota([\alpha]) = 0 \in H^q(\Omega_2)$. Es existiert daher $\beta \in \Omega_2^{q-1}$ mit $\iota\alpha = d\beta$. Es folgt $d\pi\beta = \pi d\beta = \pi\iota\alpha = 0$, also repräsentiert $\pi\beta$ eine Kohomologieklasse $[\pi\beta] \in H^{q-1}(\Omega_3)$. Nach Konstruktion gilt $\partial([\pi\beta]) = [\alpha]$, also liegt $[\alpha]$ im Bild von $\partial : H^{q-1}(\Omega_3) \to H^q(\Omega_1)$. Dies zeigt die Inklusion (I.15). Zusammen besagen (I.14) und (I.15), dass die lange Sequenz bei $H^q(\Omega_1)$ exakt ist. Damit ist der Beweis vollständig. □

I.3.12. Satz (Mayer–Vietoris Sequenz). *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\cdots \to H^q(M) \xrightarrow{(\iota_U^*, \iota_V^*)} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^q(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(M) \to \cdots$$

wobei $\iota_U : U \to M$, $\iota_V : V \to M$, $j_U : U \cap V \to U$ und $j_V : U \cap V \to V$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen. Die lineare Abbildung ∂ wird Einhängungshomomorphismus *genannt. Ist $\lambda \in C^\infty(M)$ mit* $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1 - \lambda) \subseteq V$ *und $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ geschlossen, dann lässt sich $d\lambda \wedge \alpha$ durch Null zu einer geschlossene $(q+1)$-Form auf M fortsetzen, und es gilt $\partial[\alpha] = -[d\lambda \wedge \alpha]$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Sequenz

$$0 \to \Omega^q(M) \xrightarrow{(\iota_U^*, \iota_V^*)} \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^q(U \cap V) \to 0 \tag{I.16}$$

exakt ist, für jedes q. Die Exaktheit bei $\Omega^q(M)$ ist offensichtlich, ist nämlich $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\iota_U^*\alpha = 0 = \iota_V^*\alpha$, dann verschwindet α auf den offenen Teilmengen U und V, und da $M = U \cup V$, folgt $\alpha = 0$. Dies zeigt, dass die Abbldung (ι_U^*, ι_V^*) injektiv, die Sequenz (I.16) daher bei $\Omega^q(M)$ exakt ist. Für $\alpha \in \Omega^q(M)$ gilt weiters

$$\begin{aligned}(j_U^* - j_V^*)\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)(\alpha)\bigr) &= (j_U^* - j_V^*)\bigl((\iota_U^*\alpha, \iota_V^*\alpha)\bigr)\\ &= j_U^*\iota_U^*\alpha - j_V^*\iota_V^*\alpha = (\iota_U \circ j_U)^*\alpha - (\iota_V \circ j_V)^*\alpha = 0,\end{aligned}$$

denn $\iota_U \circ j_U = \iota_V \circ j_V$. Dies zeigt $\operatorname{img}\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)\bigr) \subseteq \ker(j_U^* - j_V^*)$. Für die Exaktheit bei $\Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ bleibt daher noch $\ker(j_U^* - j_V^*) \subseteq \operatorname{img}\bigl((\iota_U^*, \iota_V^*)\bigr)$ zu zeigen. Seien dazu $\alpha_U \in \Omega^q(U)$ und $\alpha_V \in \Omega^q(V)$ mit $j_U^*\alpha = j_V^*\alpha$. Diese Gleichung besagt genau, dass die beiden Formen α_U und α_V auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsgebiete $U \cap V$ übereinstimmen. Zusammen definieren sie daher eine glatte Form $\alpha \in \Omega^q(M)$ für die offensichtlich $(\iota_U^*, \iota_V^*)(\alpha) = (\iota_U^*\alpha, \iota_V^*\alpha) = (\alpha_U, \alpha_V)$ gilt. Folglich ist sie Sequenz (I.16) auch bei $\Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ exakt.

Der interssante Punkt ist nun die Exaktheit bei $\Omega^q(U \cap V)$, dh. die Surjektivität der Abbildung $j_U^* - j_V^*$. Um diese einzusehen, wählen wir eine der Überdeckung $M = U \cup V$ untergeordnete Partition der Eins $\lambda_U + \lambda_V = 1$, $\lambda_U, \lambda_V \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_U) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\lambda_V) \subseteq V$, siehe [**3**, Abschnitt 2.6]. Sei nun $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$. Dann ist $\lambda_V\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ und $\operatorname{supp}(\lambda_V\alpha) \subseteq V$. Die Form $\lambda_V\alpha$ läßt sich daher (durch Null) zu einer q-Form auf U ausdehnen, wir bezeichnen diese Ausdehnung mit $\tilde\alpha_U \in \Omega^q(U)$, nach Konstruktion gilt daher $j_U^*\tilde\alpha_U = \lambda_V\alpha$. Analog lässt sich $\lambda_U\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$ zu einer Form $\tilde\alpha_V \in \Omega^q(V)$ ausdehnen, für die daher $j_V^*\tilde\alpha_V = \lambda_U\alpha$ gilt. Setzen wir $\beta := (\tilde\alpha_U, -\tilde\alpha_V) \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$, so gilt $(j_U^* - j_V^*)\beta = j_U^*\tilde\alpha_U - j_V^*(-\tilde\alpha_U) = \lambda_V\alpha + \lambda_U\alpha = \alpha$, folglich ist $j_U^* - j_V^*$ surjektiv, die Sequenz (I.16) daher exakt. Aus Satz I.3.11 erhalten wir nun die Existenz der langen exakten Sequenz. Für geschlossenes α gilt weiters $d\beta = (d\tilde\alpha_U, -d\tilde\alpha_V) = (d\lambda_V \wedge \alpha, -d\lambda_U \wedge \alpha) = (\iota_U^*, \iota_V^*)(-d\lambda_U \wedge \alpha)$, denn $d\lambda_U + d\lambda_V = d1 = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus, siehe Beweis von Satz I.3.11, gilt daher $\partial[\alpha] = -[d\lambda_U \wedge \alpha]$. □

I.3.13. Korollar. *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Haben U, V und $U \cap V$ endlich dimensionale de Rham Kohomologie, dann hat auch M endlich dimensionale de Rham Kohomologie und es gilt die Relation*

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Beweis. Betrachten wir folgendes Stück der exakten Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12, $H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^q(M) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$, so sehen wir, dass $H^q(M)$ endlich dimensional ist, siehe Bemerkung I.3.10, denn nach Voraussetzung sind $H^{q-1}(U \cap V)$, $H^q(U)$ und $H^q(V)$ endlich dimensional. Aus Bemerkung I.3.3 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M) - \sum_q (-1)^q \dim(H^q(U) \oplus H^q(V)) \\
&\quad + \sum_q (-1)^q \dim H^q(U \cap V) \\
&= \sum_q (-1)^q b^q(M) - \sum_q (-1)^q b^q(U) - \sum_q (-1)^q b^q(V) + \sum_q (-1)^q b^q(U \cap V) \\
&= \chi(M) - \chi(U) - \chi(V) + \chi(U \cap V),
\end{aligned}$$

was zur gewünschten Gleichung äquivalent ist. □

I.3.14. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der Sphären gilt

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n. \tag{I.17}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, vgl. Beispiel I.1.5. Sei nun $n \geq 1$. Betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{-N\}$, wobei $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$.

Offensichtlich gilt $S^n = U \cup V$. Nach Beispiel I.2.16 sind U und V kontrahierbar, und die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to U \cap V$ ist eine Homotopieäquivalenz. Es gilt daher $\chi(U) = 1 = \chi(V)$ und $\chi(U \cap V) = \chi(S^{n-1})$. Aus Korollar I.3.13 folgt somit $\chi(S^n) = 2 - \chi(S^{n-1})$ und mittels Induktion dann (I.17).

I.3.15. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der reellen projektiven Räume gilt

$$\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \tfrac{1}{2}\big(1 + (-1)^n\big) = \tfrac{1}{2}\,\chi(S^n). \tag{I.18}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{R}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig, also $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^0) = 1$. Sei nun $n \geq 1$. Nach Beispiel I.2.17 existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U kontrahierbar, $V \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ und $U \cap V \simeq S^{n-1}$. Es gilt somit $\chi(U) = 1$ und $\chi(V) = \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$ und $\chi(U\cap V) = 1+(-1)^{n-1}$, siehe Beispiel I.3.14. Aus Korollar I.3.13 erhalten wir nun $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) + (-1)^n$ und mittels Induktion dann (I.18). Insbesondere sind $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ und S^{2n} nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht diffeomorph.

I.3.16. Beispiel. Für die Euler Charakteristik der komplexen projektiven Räume gilt

$$\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = n + 1. \tag{I.19}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig, also $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^0) = 1$. Sei nun $n \geq 1$. Nach Beispiel I.2.18 existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U kontrahierbar, $V \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ und $U \cap V \simeq S^{2n-1}$. Es gilt somit $\chi(U) = 1$ und $\chi(V) = \chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ und $\chi(U\cap V) = 0$, siehe Beispiel I.3.14. Aus Korollar I.3.13 erhalten wir nun $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = \chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) + 1$, und induktiv dann (I.19). Insbesondere sind also $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und S^{2n} nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht diffeomorph, $n \geq 2$.

I.3.17. Beispiel. Für die Euler Charakteristik des Torus gilt $\chi(T^2) = 0$. Sei dazu $N \in S^1$ und betrachte $U := S^1 \times (S^1 \setminus \{N\})$ sowie $V := S^1 \times (S^1 \setminus \{-N\})$. Dann gilt $T^2 \cong S^1 \times S^1 = U \cup V$, $U \simeq S^1 \simeq V$, $U \cap V \simeq S^1 \sqcup S^1$, also $\chi(U) = 0 = \chi(V)$ und $\chi(U \cap V) = 0$ nach Beispiel I.3.14. Mittels Korollar I.3.13 erhalten wir $\chi(T^2) = 0$. Insbesondere sind S^2 und T^2 nicht homotopieäquivalent und daher nicht diffeomorph.

I.3.18. Satz. *Für die de Rham Kohomologie der Sphäre S^n, $n \geq 1$, gilt*

$$H^q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{falls } q = 0 \textit{ oder } q = n, \textit{ und} \\ 0 & \textit{andernfalls.} \end{cases}$$

Für die 0-dimensionale Sphäre $S^0 = \{-1, 1\}$ ist $H^0(S^0) \cong \mathbb{R}^2$ und $H^q(S^0) = 0$ falls $q \neq 0$. Insbesondere erhalten wir (erneut) $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, $n \geq 0$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, vgl. Bemerkung I.1.5. Sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Setze $N := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$, $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{-N\}$. Dann gilt offensichtlich $S^n = U \cup V$. Nach Beispiel I.2.16 sind U und V kontrahierbar, und die Inklusion $S^{n-1} \to U \cap V$ ist eine Homotopieäquivalez. Wir betrachten nun folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12:

$$H^{q-1}(U) \oplus H^{q-1}(V) \to \underbrace{H^{q-1}(U \cap V)}_{\cong H^{q-1}(S^{n-1})} \xrightarrow{\partial} H^q(S^n) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$$

Da $H^q(U) = 0 = H^q(V)$ für $q \neq 0$, erhalten wir aus der Exaktheit dieser Sequenz

$$H^q(S^n) \cong H^{q-1}(S^{n-1}), \qquad q \neq 0, 1. \tag{I.20}$$

Aufgrund des Zusammenhangs von S^n, gilt weiters

$$H^0(S^n) \cong \mathbb{R}. \tag{I.21}$$

Um auch die erste Kohomologie zu berechnen betrachten wir den Beginn der Mayer–Vietoris Sequenz:

$$0 \to \underbrace{H^0(S^n)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H^0(U) \oplus H^0(V)}_{\cong \mathbb{R}^2} \to \underbrace{H^0(U \cap V)}_{\cong H^0(S^{n-1})} \xrightarrow{\partial} H^1(S^n) \to \underbrace{H^1(U) \oplus H^1(V)}_{=0}$$

Mittels Bemerkung I.3.3 folgt $b^1(S^n) = b^0(S^{n-1}) - 1$, also

$$H^1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } n = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{I.22}$$

Aus (I.20), (I.21) und (I.22) lässt sich die Kohomologie von S^n nun mittels Induktion nach n bestimmen. $\square$

I.3.19. Bemerkung. Nach Satz I.3.18 ist also jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(S^n)$, $0 < q < n$, auch exakt. Für $n \geq 1$ ist $H^n(S^n)$ eindimensional, also liefert das Integral einen Isomorphismus $\int_M : H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$, siehe auch Bemerkung I.1.6. Eine Form $\alpha \in \Omega^n(S^n)$, $n \geq 1$, ist daher genau dann exakt, wenn $\int_{S^n} \alpha = 0$.

I.3.20. Beispiel. Da die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 1$, eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiel I.2.15, gilt $H^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^q(S^{n-1})$ für alle q. Nach Satz I.3.18 ist daher jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $q \neq 0, n-1$, auch exakt. Eine geschlossene Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $n \geq 2$, ist genau dann exakt, wenn $\int_{S^{n-1}} \alpha = 0$.

I.3.21. Beispiel. Betrachte $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k = (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^k$, $0 \leq k \leq n-2$. Da die Inklusion $S^{n-k-1} \to \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiele I.2.15 und I.2.9, folgt aus Satz I.3.18

$$H^q(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q = n-k-1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Jede geschlossene Form $\alpha \in \Omega^q(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k)$, $q \neq 0, n-k-1$, ist daher exakt. Eine Form $\alpha \in \Omega^{n-k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k)$ ist genau dann exakt, wenn $\int_{S^{n-k-1}} \alpha = 0$.

I.3.22. Satz. *Für die Kohomologie des reellen projektiven Raums gilt, $n \geq 0$,*

$$H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{falls } q = 0, \\ \mathbb{R} & \textit{falls } q = n \textit{ ungerade,} \\ 0 & \textit{andernfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Wir werden unten zeigen, dass die von der kanonischen Projektion $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induzierte Abbildung

$$p^* : H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to H^q(S^n) \tag{I.23}$$

injektiv ist, für jedes q. Zusammen mit Satz I.3.18 folgt $H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ für alle $q \neq 0, n$. Da $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ zusammenhängend ist gilt weiters $H^0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$. Aus diesen Überlegungen erhalten wir auch $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 1 + (-1)^n b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$. Zusammen mit $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$, siehe Beispiel I.3.15, folgt nun $b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ falls n gerade, und $b^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 1$, falls n ungerade ist.

Es bleibt daher die Injektivität von (I.23) zu zeigen. Sei dazu $[\alpha] \in H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ im Kern von p^*. Es existiert daher $\beta \in \Omega^{q-1}(S^n)$ mit $p^*\alpha = d\beta$. Es bezeichne $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, die Antipodalabbildung. Auch die Form $\bar\beta := \frac{1}{2}(\beta + A^*\beta) \in \Omega^{q-1}(S^n)$ erfüllt $d\bar\beta = p^*\alpha$, denn $d\bar\beta = \frac{1}{2}(d\beta + A^*d\beta) = \frac{1}{2}(p^*\alpha + A^*p^*\alpha) = \frac{1}{2}(p^*\alpha + p^*\alpha) = p^*\alpha$, wobei wir $p \circ A = p$ verwendet haben. Für diese Form $\bar\beta$ gilt jedoch weiters $A^*\bar\beta = \bar\beta$, denn mittels $A \circ A = \mathrm{id}_{S^n}$ erhalten wir $A^*\bar\beta = \frac{1}{2}(A^*\beta + (A \circ A)^*\beta) = \frac{1}{2}(A^*\beta + \beta) = \bar\beta$. Da p ein lokaler Diffeomorphismus ist, und weil $A^*\bar\beta = \bar\beta$, existiert $\gamma \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ mit $p^*\gamma = \bar\beta$, also $p^*d\gamma = p^*\alpha$. Es folgt $d\gamma = \alpha$, denn $p^* : \Omega^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \Omega^q(S^n)$ ist injektiv, wieder weil p ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dies zeigt, dass die Abbildung $p^* : H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to H^q(S^n)$ trivialen Kern hat und somit injektiv ist. □

I.3.23. Satz. *Für die de Rham Kohomologie des komplexen projektiven Raums $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 0$, gilt*

$$H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{falls } q = 0, 2, 4, \dots, 2n, \textit{ und} \\ 0 & \textit{andernfalls.} \end{cases}$$

Insbesondere folgt $\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = n + 1$. Zudem induziert die kanonische Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$, Isomorphismen $H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ für alle $q \neq 2n$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, denn $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist einpunktig. Sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Da $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ zusammenhängend ist, induziert die Inklusion offensichtlich einen Isomorphismus $H^0(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^0(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$, vgl. Bemerkung I.1.4. Es sei nun $N := [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $U := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ und $V := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{N\}$. Nach Beispiel I.2.18 gilt $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = U \cup V$, U ist kontrahierbar, $U \cap V \simeq S^{2n-1}$, und die kanonische Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to V$ ist eine Homotopieäquivalenz. Wir betrachten nun folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12, $1 \leq q \neq 2n$:

$$\underbrace{H^{q-1}(U \cap V)}_{\cong H^{q-1}(S^{2n-1})} \xrightarrow{\partial = 0} H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \xrightarrow{\cong} \underbrace{H^q(U)}_{=0} \oplus \underbrace{H^q(V)}_{\cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})} \xrightarrow{0} \underbrace{H^q(U \cap V)}_{\cong H^q(S^{2n-1})}$$

Mittels Satz I.3.18 sehen wir, dass die Abbildung ganz rechts stets verschwindet, denn aus Dimensionsgründen gilt $H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$, vgl. Bemerkung I.1.3. Aber auch der Einhängungshomomorphismus ganz links verschwindet. Für $1 < q$ folgt dies wieder aus Satz I.3.18, und im Fall $q = 1$ aus der Surjektivität von $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ und der Exaktheit der Mayer–Vietoris Sequenz bei $H^0(U \cap V)$. Aus der Exaktheit obiger Sequenz schließen wir daher, dass der mittlere Pfeil ein Isomorphismus ist, $1 \leq q \neq 2n$. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass die Inklusion $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ Isomorphismen

$$H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}), \qquad q \neq 2n, \tag{I.24}$$

induziert. Um auch $H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ zu berechnen, betrachten wir folgendes Stück der Mayer–Vietoris Sequenz:

$$\underbrace{H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V)}_{=0} \to \underbrace{H^{2n-1}(U \cap V)}_{\cong H^{2n-1}(S^{2n-1}) \cong \mathbb{R}} \xrightarrow{\partial} H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to \underbrace{H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V)}_{=0}$$

Dabei ist wieder aus Dimensionsgründen $H^{2n-1}(V) \cong H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$ und $H^{2n}(V) \cong H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) = 0$. Aus der Exaktheit obiger Sequenz erhalten wir somit $H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$. Zusammen mit (I.24) erlaubt dies nun die Kohomologie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mittels Induktion nach n zu bestimmen. $\square$

I.3.24. Definition (Gute Überdeckung). Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ einer glatten Mannigfaltigkeit wird *gut* genannt, falls jeder nicht-leere endliche Durchschnitt $U_1 \cap \cdots \cap U_k$, $U_i \in \mathcal{U}$, diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, vgl. [**1**, Chapter I§5].

Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt gute Überdeckungen, mit Hilfe der Geometrie von Geodäten werden wir später folgendes Resultat zeigen.

I.3.25. Satz (Existenz guter Überdeckungen). *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von M, dann existiert eine gute Verfeinerung $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$, dh. $\mathcal{U}$ ist eine gute Überdeckung von M und zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existiert $V \in \mathcal{V}$ mit $U \subseteq V$.*

I.3.26. Korollar. *Besitzt eine glatte Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung, dann hat sie endlich dimensionale Kohomologie. Insbesondere haben geschlossene Mannigfaltigkeiten stets endlich dimensionale Kohomologie.*

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung einer glatten Mannigfaltigkeit M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Induktionsbeginn $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Nach Korollar I.2.12 hat $V \cong \mathbb{R}^n$ endlich dimensionale Kohomologie. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, hat U nach Induktionsvoraussetzung endlich dimensionale Kohomologie. Schließlich ist $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$ also hat auch $U \cap V$ endlich dimensionale Kohomologie, wieder aufgrund der Induktionsvoraussetzung. Betrachten wir nun die mit $M = U \cup V$ assozierte Mayer–Vietoris

Sequenz $H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^q(M) \to H^q(U) \oplus H^q(V)$, so sehen wir, dass auch M endlich dimensionale Kohomologie hat, vgl. Bemerkung I.3.10. Dies zeigt den ersten Teil des Korollars. Aus Satz I.3.25 folgt sofort, dass jede geschlossene Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung besitzt, der zweite Teil des Korollars ist daher eine Konsequenz des ersten. □

I.4. Künneth Theorem. Wir wollen in diesem Abschnitt die de Rham Kohomologie eines Produktes glatter Mannigfaltigkeiten $H^*(M \times N)$ bestimmen, siehe Satz I.4.1 unten. Wir bezeichnen dazu die beiden kanonischen Projektionen mit $p_1 : M \times N \to M$ und $p_2 : M \times N \to N$. Für jedes p und q erhalten wir eine lineare Abbildung

$$K^{p,q}_{M,N} : H^p(M) \otimes H^q(N) \to H^{p+q}(M \times N), \qquad K^{p,q}_{M,N}(a \otimes b) := p_1^* a \wedge p_2^* b,$$

und dann, für jedes k, eine lineare Abbildung

$$K^k_{M,N} : \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \to H^k(M \times N), \quad K^k_{M,N} := \sum_{p+q=k} K^{p,q}_{M,N}. \tag{I.25}$$

I.4.1. Satz (Künneth Theorem). *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und hat eine von beiden endlich dimensionale Kohomologie, dann ist* (I.25) *ein Isomorphismus, dh. für jedes k gilt*

$$H^k(M \times N) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N).$$

Wir beginnen den Beweis dieses Satzes mit einigen Lemmata.

I.4.2. Lemma (Der Fall $M = \mathbb{R}^n$). *Für jede glatte Mannigfaltigkeit N und jedes k ist $K^k_{\mathbb{R}^n,N}$ ein Isomorphismus, siehe* (I.25).

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist, gilt $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ und $H^q(\mathbb{R}^n) = 0$ für $q \neq 0$, folglich $\bigoplus_{p+q=k} H^p(\mathbb{R}^n) \otimes H^q(N) = H^k(N)$. Unter dieser Identifikation wird die Künneth Abbildung $K^k_{\mathbb{R}^n,N}$ zu $p_2^* : H^k(N) \to H^k(\mathbb{R}^n \times N)$ und ist daher ein Isomorphismus, siehe Beispiel I.2.9. □

I.4.3. Lemma (Natürlichkeit). *Ist $f : W \to M$ glatt und N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit, dann kommutiert folgendes Diagramm für alle p und q:*

$$\begin{tikzcd}
H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[r, "f^* \otimes \mathrm{id}_{H^q(N)}"] \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] & H^p(W) \otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{W,N}"] \\
H^{p+q}(M \times N) \arrow[r, "(f \times \mathrm{id}_N)^*"] & H^{p+q}(W \times N)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Mittels (I.3), (I.4) und (I.5) folgt für $a \in H^p(M)$ und $b \in H^q(N)$,

$$\begin{aligned}(f \times \mathrm{id}_N)^*\big(K^{p,q}_{M,N}(a \otimes b)\big) &= (f \times \mathrm{id}_N)^*(p_1^* a \wedge p_2^* b) \\ &= ((f \times \mathrm{id}_N)^* p_1^* a) \wedge ((f \times \mathrm{id}_N)^* p_2^* b) \\ &= (p_1 \circ (f \times \mathrm{id}_N))^* a \wedge (p_2 \circ (f \times \mathrm{id}_N))^* b \\ &= (f \circ p_1)^* a \wedge p_2^* b \\ &= p_1^* f^* a \wedge p_2^* b = K^{p,q}_{W,N}(f^* a \otimes b),\end{aligned}$$

denn $p_1 \circ (f \times \mathrm{id}_N) = f \circ p_1$ und $p_2 \circ (f \times \mathrm{id}_N) = p_2$. □

I.4.4. Lemma (Kompatibilität mit Einhängungshomomorphismus). *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, $U, V \subseteq M$ offen und $M = U \cup V$, dann kommutiert folgendes Diagramm für alle p und q:*

$$\begin{tikzcd} H^{p-1}(U \cap V) \otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}_{H^q(N)}"] \arrow[d, "K^{p-1,q}_{U \cap V,N}"] & H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] \\ H^{p+q-1}((U \cap V) \times N) \arrow[r, "\partial"] & H^{p+q}(M \times N) \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet ∂ in der oberen Zeile den Einhängungshomomorphismus der mit $M = U \cup V$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz, und ∂ in der unteren Zeile den Einhängungshomomorphismus der mit $M \times N = (U \times N) \cup (V \times N)$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz, siehe Satz I.3.12.

Beweis. Seien $\alpha \in \Omega^{p-1}(U \cap V)$ und $\beta \in \Omega^q(N)$ geschlossen. Wähle $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq U$ und $\mathrm{supp}(1-\lambda) \subseteq V$. Nach Satz I.3.12 gilt daher $\partial[\alpha] = -[d\lambda \wedge \alpha] \in H^q(M)$ und somit

$$\begin{aligned}K^{p,q}_{M,N}\big((\partial \otimes \mathrm{id}_{H^q(N)})([\alpha] \otimes [\beta])\big) &= -K^{p,q}_{M,N}\big([d\lambda \wedge \alpha] \otimes [\beta]\big) \\ &= -[p_1^*(d\lambda \wedge \alpha) \wedge p_2^*\beta] = -[d\tilde\lambda \wedge p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta] \quad \text{(I.26)}\end{aligned}$$

wobei $\tilde\lambda := p_1^*\lambda = \lambda \circ p_1 \in C^\infty(M \times N)$. Da $\mathrm{supp}(\tilde\lambda) \subseteq U \times N$ und $\mathrm{supp}(1-\tilde\lambda) \subseteq V \times N$ gilt weiters

$$\partial\big(K^{p-1,q}_{U \cap V,N}([\alpha] \otimes [\beta])\big) = \partial\big([p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta]\big) = -[d\tilde\lambda \wedge p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta]. \quad \text{(I.27)}$$

Aus (I.26) und (I.27) folgt nun die Aussage des Lemmas. □

I.4.5. Lemma (Mayer–Vietoris Argument). *Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, $U, V \subseteq M$ offen und $M = U \cup V$. Sind in dieser Situation $K^k_{U,N}$, $K^k_{V,N}$ und $K^k_{U \cap V,N}$ Isomorphismen für jedes k, dann ist auch $K^k_{M,N}$ für jedes k ein Isomorphismus, siehe* (I.25).

Beweis. Berachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\substack{H^{p-1}(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ H^{p-1}(V)\otimes H^q(N)} \arrow[r] \arrow[d, "K^{p-1,q}_{U,N}\oplus K^{p-1,q}_{V,N}"] & H^{p-1}(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "K^{p-1.q}_{U\cap V,N}"] & H^p(M)\otimes H^q(N) \arrow[r] \arrow[d, "K^{p,q}_{M,N}"] & \substack{H^p(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ H^p(V)\otimes H^q(N)} \arrow[r] \arrow[d, "K^{p,q}_{U,N}\oplus K^{p,q}_{V,N}"] & H^p(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[d, "K^{p,q}_{U\cap V,N}"] \\
\substack{H^{p+q-1}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{p+q-1}(V\times N)} \arrow[r] & H^{p+q-1}((U\cap V)\times N) \arrow[r, "\partial"] & H^k(M\times N) \arrow[r] & \substack{H^{p+q}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{p+q}(V\times N)} \arrow[r] & H^{p+q}((U\cap V)\times N)
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist ein Stück der mit $M \times N = (U \times N) \cup (V \times N)$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz und daher exakt, siehe Satz I.3.12. Die obere Zeile entsteht aus der mit $M = U \cup V$ assozierten Mayer–Vietoris Sequenz durch Tensorieren mit $H^q(N)$, sie ist daher ebenfalls exakt, siehe Bemerkung I.3.6. Nach Lemma I.4.3 und Lemma I.4.4 kommutiert das Diagramm. Summieren über alle $p + q = k$ liefert daher ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, siehe Bemerkung I.3.4:

$$\begin{tikzcd}
\substack{\bigoplus_{p+q=k-1} H^p(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ \bigoplus_{p+q=k-1} H^p(V)\otimes H^q(N)} \arrow[r] \arrow[d, "K^{k-1}_{U,N}\oplus K^{k-1}_{V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k-1} H^p(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "K^k_{U\cap V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k} H^p(M)\otimes H^q(N) \arrow[r] \arrow[d, "K^k_{M,N}"] & \substack{\bigoplus_{p+q=k} H^p(U)\otimes H^q(N)\\ \oplus \\ \bigoplus_{p+q=k} H^p(V)\otimes H^q(N)} \arrow[r] \arrow[d, "K^k_{U,N}\oplus K^k_{V,N}", "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=k} H^p(U\cap V)\otimes H^q(N) \arrow[d, "K^k_{U\cap V,N}", "\cong"'] \\
\substack{H^{k-1}(U\times N)\\ \oplus \\ H^{k-1}(V\times N)} \arrow[r] & H^{k-1}((U\cap V)\times N) \arrow[r, "\partial"] & H^k(M\times N) \arrow[r] & \substack{H^k(U\times N)\\ \oplus \\ H^k(V\times N)} \arrow[r] & H^k((U\cap V)\times N)
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung sind die vier äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Aus dem Fünferlemma I.3.8 folgt nun, dass auch der mittlere vertikale Pfeil ein Isomorphismus ist. □

I.4.6. Lemma (Der Fall M besitzt endliche gute Überdeckung). *Sind M und N zwei glatte Manigfaltigkeiten und besitzt M eine endliche gute Überdeckung, dann ist $K^k_{M,N}$ für jedes k ein Isomorphismus, siehe* (I.25).

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung von M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Offensichtlich gilt $M = U \cup V$. Nach Lemma I.4.2 ist $K^k_{V,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, ist nach Induktionsvoraussetzung $K^k_{U,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Schließlich ist auch $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$, nach Induktionsvoraussetzung daher $K^k_{U\cap V,N}$ ein Isomorphismus, für jedes k. Aus Lemma I.4.5 folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. □

Damit ist der Beweis von Satz I.4.1 im Fall, dass einer der beiden Faktoren kompakt ist bereits vollständig, denn jede kompakte Mannigfaltigkeit besitzt nach Satz I.3.25 eine endliche gute Überdeckung. Für den allgemeinen Fall sind noch zwei weitere Überlegungen notwendig.

I.4.7. Lemma (Disjunkte Vereinigung). *Es sei* $M = \bigsqcup_i M_i$ *eine disjunkte Vereinigung glatter Mannigfaltigkeiten,* i *aus einer beliebigen Indexmenge. Weiters sei* N *eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie und* $K^k_{M_i,N}$ *sei ein Isomorphismus für jedes* i *und* k*. Dann ist auch* $K^k_{M,N}$ *ein Isomorphismus für jedes* k*, siehe* (I.25).

Beweis. Nach Voraussetzung gilt auch $M \times N = \bigsqcup_i (M_i \times N)$. Betrachte nun das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \arrow[r, "K^k_{M,N}"] \arrow[d, equal] & H^k(M \times N) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{p+q=k} H^p\big(\bigsqcup_i M_i\big) \otimes H^q(N) \arrow[d, "\cong", "\bigoplus_{p+q=k}(\iota_i^*)_i"'] & H^k\big(\bigsqcup_i (M_i \times N)\big) \arrow[d, "((\iota_i \times \mathrm{id}_N)^*)_i", "\cong"'] \\
\bigoplus_{p+q=k} \Big(\prod_i H^p(M_i)\Big) \otimes H^q(N) \arrow[d, "\cong"] & \prod_i H^k(M_i \times N) \\
\bigoplus_{p+q=k} \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[d, equal] & \prod_i \bigoplus_{p+q=k} \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[u, "\prod_i K^k_{M_i,N}", "\cong"'] \arrow[d, equal] \\
\prod_{p+q=k} \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big) \arrow[r, equal] & \prod_i \prod_{p+q=k} \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big)
\end{tikzcd}$$

wobei die beiden vertikalen Isomorphismen in der zweiten Zeile von den kanonischen Inklusionen $\iota_i : M_i \to M$ bzw. $\iota_i \times \mathrm{id}_N : M_i \times N \to M \times N$ induziert werden, vgl. Bemerkung I.1.7. Nach Voraussetzung ist auch der mit $\prod_i K^k_{M_i,N}$ beschriftete Pfeil rechts unten ein Isomorphismus. Auch der linke untere vertikale Pfeil, die direkte Summe der kanonischen Abbildunge $\big(\prod_i H^p(M_i)\big) \otimes H^q(N) \to \prod_i \big(H^p(M_i) \otimes H^q(N)\big)$, ist ein Isomorphismus, da $H^q(N)$ endlich dimensional vorausgesetzt wurde. Der Übergang von direkten Summen zu Produkten im unteren Teil des Diagramms ist zulässig, da es nur endlich viele Paare (p, q) mit $p, q \geq 0$ und $p + q = k$ gibt. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. □

I.4.8. Lemma. *Ist* M *eine glatte Mannigfaltigkeit, dann existieren offene Teilmengen* $U, V \subseteq M$ *mit* $M = U \cup V$*, sodass* U*,* V *und* $U \cap V$ *jeweils disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen sind, die jede eine endliche gute Überdeckung besitzen.*

Beweis. O.B.d.A. sei $M \neq \emptyset$ und zusammenhängend. Mittels Satz I.3.25 lässt sich leicht eine lokal endliche gute Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von M konstruieren, sodass $U_\lambda \neq \emptyset$ und $\bar U_\lambda$ kompakt ist für jedes $\lambda \in \Lambda$. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$. Wir setzen $\Lambda_0 := \{\lambda_0\}$, $V_0 := U_{\lambda_0}$ und definieren induktiv

$$\Lambda_{k+1} := \big\{\lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V_k \neq \emptyset\big\} \quad \text{sowie} \quad V_{k+1} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_{k+1}} U_\lambda.$$

Offensichtlich gilt $\Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+1}$. Weiters ist jedes Λ_k endlich und $\bar V_k$ kompakt. Um dies einzusehen nehmen wir induktiv $\bar V_k$ als kompakt an. Da die Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ lokal endlich ist schneidet $\bar V_k$ nur endlich viele dieser Überdeckungsmengen U_λ, also ist Λ_{k+1} endlich und dann auch $\bar V_{k+1}$ kompakt, da die $\bar U_\lambda$ kompakt sind. Schließlich haben wir $\bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k = \Lambda$. Betrachte dazu $\Lambda' := \bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k$ und $\Lambda'' := \Lambda \setminus \Lambda'$, sowie $V' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$ und $V'' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda''} U_\lambda$. Als Vereinigungen offener Teilmengen sind V' und V'' beide offen in M. Klarerweise gilt $M = V' \cup V''$, beachte aber auch $V' \cap V'' = \emptyset$. Aus dem Zusammenhang von M folgt nun $V'' = \emptyset$, also $\Lambda'' = \emptyset$, und somit $\Lambda = \Lambda' = \bigcup_{k=0}^\infty \Lambda_k$ wie behauptet. Betrachte nun die offenen Teilmengen

$$W_0 := V_0, \qquad W_k := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\lambda, \quad k \geq 1.$$

Nach Konstruktion besitzt also jedes W_k eine endliche gute Überdeckung. Beachte, dass auch $W_k \cap W_l$ eine endliche gute Überdeckung besitzt, denn

$$W_k \cap W_l = \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\lambda\Big) \cap \Big(\bigcup_{\mu\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} U_\mu\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k\setminus\Lambda_{k-1}} \bigcup_{\mu\in\Lambda_l\setminus\Lambda_{l-1}} (U_\lambda \cap U_\mu).$$

Zudem gilt $W_k \cap W_l = \emptyset$, falls $k + 2 \leq l$, also haben wir disjunkte Vereinigungen

$$U := \bigsqcup_{k \text{ gerade}} W_k, \qquad V := \bigsqcup_{k \text{ ungerade}} W_k, \qquad U \cap V = \bigsqcup_{k=0}^\infty W_{k+1} \cap W_k.$$

Weiters ist $M = U \cup V$, also haben U und V die gewünschten Eigenschaften. □

Beweis von Satz I.4.1. Wähle offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ wie in Lemma I.4.8. Nach Lemma I.4.6 und Lemma I.4.7 sind daher $K^k_{U,N}$, $K^k_{V,N}$ und $K^k_{U\cap V,N}$ Isomorphismen für jedes k. Aus Lemma I.4.5 folgt nun, dass auch $K^k_{M,N}$ ein Isomorphismus ist, für jedes k. Damit ist der Beweis von Satz I.4.1 vollständig. □

I.4.9. Korollar. *Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann hat auch $M \times N$ endlich dimensionale Kohomologie und es gilt*

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N). \tag{I.28}$$

Beweis. Nach Satz I.4.1 ist $H^k(M \times N) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N)$, insbesondere hat $M \times N$ endlich dimensionale Kohomologie. Für die Betti Zahlen von $M \times N$ erhalten wir daraus

$$b^k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b^p(M) \cdot b^q(N). \tag{I.29}$$

Für die Euler Charakteristik von $M \times N$ folgt nun

$$\begin{aligned}\chi(M \times N) &= \sum_k (-1)^k b^k(M \times N) = \sum_k (-1)^k \sum_{p+q=k} b^p(M) \cdot b^q(N) \\ &= \sum_k \sum_{p+q=k} (-1)^p b^p(M) \cdot (-1)^q b^q(N) = \sum_{i,j} (-1)^i b^i(M) \cdot (-1)^j b^j(N) \\ &= \Big(\sum_i (-1)^i b^i(M)\Big) \cdot \Big(\sum_j (-1)^j b^j(N)\Big) = \chi(M) \cdot \chi(N),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

I.4.10. Beispiel. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann folgt aus Korollar I.4.9 sofort $\chi(M \times S^1) = 0$, denn $\chi(S^1) = 0$.

I.4.11. Bemerkung. Die Voraussetzung in Satz I.4.1, dass eine der beiden Faktoren endlich dimensionale Kohomologie hat ist tatsächlich notwendig, für die 0-dimensionale Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{Z}$ sind beispielsweise $H^0(M \times M)$ und $H^0(M) \otimes H^0(M)$ nicht isomorph.

Hat M endlich dimensionale Kohomologie, dann wird

$$p_M(t) := \textstyle\sum_q b^q(M) t^q$$

das *Poincaré Polynom* von M genannt. Beachte $p_M(-1) = \chi(M)$, $p_M(0) = b^0(M)$ und $p_M(1) = \dim H^*(M)$. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie, dann folgt aus (I.29) wie im Beweis von Korollar I.4.9

$$p_{M \times N}(t) = p_M(t) \cdot p_N(t), \tag{I.30}$$

vgl. Aufgabe 20. Setzen wir $t = -1$ so erhalten wir (I.28) zurück.

I.4.12. Beispiel. Nach Satz I.3.18 ist das Poincaré Polynom des Kreises $p_{S^1}(t) = 1 + t$. Für den Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ folgt mittels (I.30) nun

$$p_{T^n}(t) = p_{S^1}(t)^n = (1+t)^n = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} t^q,$$

und somit $b^q(T^n) = \binom{n}{q}$.

I.4.13. Beispiel. Nach Satz I.3.18 gilt für das Poincaré Polynom der Sphäre $p_{S^n}(t) = 1 + t^n$. Mit (I.30) erhalten wir

$$p_{S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1 + t^{n_i}).$$

Folglich sind die Mannigfaltigkeiten $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ und $S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_l}$ genau dann homotopieäquivalent (diffeomorph) sind, wenn die Zahlen n_i und m_i bis auf Umnummerierung übereinstimmen.

I.4.14. Beispiel. Nach Satz I.3.23 gilt für das Poincaré Polynom des komplexen projektiven Raums $p_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = (1 - t^{2n+1})/(1 - t)$. Mit (I.30) erhalten wir

$$p_{\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_k}}(t) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1 - t^{2n_i+1}}{1 - t}.$$

Es folgt nun, dass die Mannigfaltigkeiten $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{n_k}$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{m_l}$ genau dann homotopieäquivalent (diffeomorph) sind, wenn die Zahlen n_i und m_i bis auf Umnummerierung übereinstimmen.

In der Situation von Satz I.4.1 gilt also $H^*(M \times N) \cong H^*(M) \otimes H^*(N)$, dh. die graduierte $\mathbb{R}$-Algebra $H^*(M\times N)$ ist in natürlicher Weise zum Tensorprodukt der graduierten $\mathbb{R}$-Algebren $H^*(M)$ und $H^*(N)$ isomorph.

Ein Element aus $a \in H^*(M) = \bigoplus_q H^q(M)$ wird *homogen vom Grad* q genannt wenn es in $H^q(M)$ liegt, wir schreiben in diesem Fall $|a| := q$ für den Grad von a. Ein Element von $H^*(M)$ wird *homogen* genannt, falls es homogen vom Grad q für ein q ist. Unter einer graduierten Basis von $H^*(M)$ verstehen wir eine Basis aus homogenen Elementen. Sind M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $\{a_i\}_{i\in I}$, bzw. $\{b_j\}_{j\in J}$, graduierte Basen von $H^*(M)$ bzw. $H^*(N)$, dann folgt aus Satz I.4.1, dass $\{p_1^*a_i \wedge p_2^*b_j\}_{(i,j)\in I\times J}$, eine graduierte Basis von $H^*(M\times N)$ bildet, $|p_1^*a_i \wedge p_2^*b_j| = |a_i| + |b_j|$, wobei wir wieder voraussetzen, dass einer der beiden Faktoren endlich dimensionale Kohomologie hat.

I.4.15. Beispiel. Betrachte $S^n\times S^m$, $n, m \geq 1$. Nach Satz I.4.1 und Satz I.3.18 existiert eine graduierte Basis $\{1, a, b, a \wedge b\}$ von $H^*(S^n \times S^m)$ und es gelten die Relationen $a \wedge a = 0 = b \wedge b$.

I.4.16. Bemerkung. Ist M eine orientierte glatte m-Mannigfaltigkeit und N eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann liefern die Tangentialabbildungen der kanonischen Projektionen $p_1 : M \times N \to M$ und $p_2 : M \times N \to N$ lineare Isomorphismen $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$. Wir versehen nun $T_{(x,y)}(M \times N)$ mit der Produktorientierung, dh. ist $X_1, \dots, X_m$ eine positiv orientierte Basis von T_xM und $Y_1, \dots, Y_n$ eine positiv orientierte Basis von T_yN, dann ist $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(x,y)}(M \times N)$. Dies definiert eine Orientierung von $M \times N$, die als *Produktorientierung* bezeichnet wird. Beachte, dass es hier auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, denn der Diffeomorphismus $M \times N \cong N \times M$ ist i.A. nicht orientierungsbewahrend. Bezüglich der Produktorientierung auf $M \times N$ gilt nun folgende Version des Satzes von Fubini, vgl. Aufgabe 21,

$$\int_{M\times N} p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta = \int_M \alpha \cdot \int_N \beta, \qquad \alpha \in \Omega_c^m(M),\ \beta \in \Omega_c^n(N).$$

Sind darüber hinaus M und N geschlossen, dann erhalten wir daraus

$$\textstyle\int_{M\times N} p_1^*a \wedge p_2^*b = \int_M a \cdot \int_N b, \qquad a \in H^m(M),\ b \in H^n(N). \tag{I.31}$$

I.5. Poincaré Dualität. Diese Dualität liefert, für geschlossene orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeiten M, einen Zusammenhang zwischen $H^q(M)$ und $H^{n-q}(M)$, siehe Korollar I.5.18, insbesondere folgt $b^q(M) = b^{n-q}(M)$ für jedes q. Wir werden dies als Korollar eines allgemeineren Resultats für nicht notwendigerweise kompakte Mannigfaltigkeiten erhalten, siehe Satz I.5.9 unten, selbst wenn wir nur an geschlossenen Mannigfaltigkeiten interessiert wären, treten beim Beweis den wir unten geben werden unweigerlich nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten auf. Wir werden zunächst die notwendigen Eigenschaften der de Rham Kohomologie mit kompakten Trägern herleiten: Mayer–Vietoris Sequenz mit kompakten Trägern, siehe Satz I.5.6, und die Berechnung von $H_c^q(\mathbb{R}^n)$, siehe Korollar I.5.8.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen die Menge aller glatten q-Formen deren Träger kompakt ist mit $\Omega_c^q(M)$. Beachte, dass das de Rham Differential einer Form mit kompakten Träger wieder kompakten Träger hat, dh. $d : \Omega_c^q(M) \to \Omega_c^{q+1}(M)$. Der reelle Vektorraum

$$H_c^q(M) := \frac{\ker\big(\Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M)\big)}{\operatorname{img}\big(\Omega_c^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^q(M)\big)}$$

wird als q-te *de Rham Kohomologie mit kompakten Trägern* bezeichnet.

I.5.1. Bemerkung. Für kompaktes M haben wir offensichtlich $H_c^q(M) = H^q(M)$, denn $\Omega_c^q(M) = \Omega^q(M)$, für jedes q.

I.5.2. Bemerkung. Offenbar gilt $H_c^q(M) = 0$ falls $q < 0$ oder $q > \dim(M)$, vgl. Bemerkung I.1.3.

I.5.3. Bemerkung. Ist M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann haben wir eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$\textstyle\int_M : H_c^n(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\alpha] \mapsto \int_M \alpha,$$

denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt $\int_M d\beta = 0$, für alle $\beta \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Für $M \neq \emptyset$ ist diese surjektiv und somit $H_c^n(M) \neq 0$.

I.5.4. Bemerkung. Ist M eine zusammenhängende nicht-kompakte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann gilt $H_c^0(M) = 0$, denn in diesem Fall muss jede lokal konstante Funktion mit kompakten Träger auf M schon verschwinden, dh. der Kern von $d : \Omega_c^0(M) \to \Omega_c^1(M)$ ist trivial.

Ist $U \subseteq M$ offen und $\alpha \in \Omega^q_c(U)$, dann können wir α durch Null zu einer glatten q-Form auf M ausdehnen, und diese Ausdehnung hat kompakten Träger in M. Bezeichnet $\iota : U \to M$ die kanonische Inklusion, so schreiben wir $\iota_*\alpha \in \Omega^q_c(M)$ für die oben konstruierte Ausdehnung, dh. $\iota_* : \Omega^q_c(U) \to \Omega^q_c(M)$. Offensichtlich gilt $d \circ \iota_* = \iota_* \circ d$, also induziert ι eine lineare Abbildung $\iota_* : H^q_c(U) \to H^q_c(M)$.

I.5.5. Bemerkung. Ist $M = M_1 \sqcup M_2$ eine disjunkte Vereinigung glatter Mannigfaltigkeiten, dann induzieren die kanonischen Inklusionen $\iota^1 : M_1 \to M$ und $\iota^2 : M_2 \to M$ für jedes q einen Isomorphismus

$$\iota^1_* + \iota^2_* : H^q_c(M_1) \oplus H^q_c(M_2) \xrightarrow{\cong} H^q_c(M),$$

denn $\iota^1_* + \iota^2_* : \Omega^q_c(M_1) \oplus \Omega^q_c(M_2) \xrightarrow{\cong} \Omega^q_c(M)$ sind Isomorphismen die mit den de Rham Differentialen verträglich ist. Diese Bemerkung bleibt offenbar für beliebige disjunkte Vereinigungen richtig, dh. die Inklusionen induzieren für jedes q einen natürliche Isomorphismus $\bigoplus_i H^q_c(M_i) \cong H^q_c(\bigsqcup_i M_i)$, wobei i nun durch eine beliebige Indexmenge läuft. Beachte, dass hier eine direkte Summe auftritt, wohingegen wir in Bemerkung I.1.7 ein Produkt angetroffen haben.

I.5.6. Satz (Mayer–Vietoris Sequenz). *Es sei $M = U \cup V$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $U, V \subseteq M$ offen. Dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\cdots \to H^q_c(U \cap V) \xrightarrow{(j^U_*, -j^V_*)} H^q_c(U) \oplus H^q_c(V) \xrightarrow{\iota^U_* + \iota^V_*} H^q_c(M) \xrightarrow{\partial_c} H^{q+1}_c(U \cap V) \to \cdots$$

wobei $\iota^U : U \to M$, $\iota^V : V \to M$, $j^U : U \cap V \to U$ und $j^V : U \cap V \to V$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen. Die lineare Abbildung ∂_c wird als Einhängungshomomorphismus *bezeichnet. Ist $\lambda \in C^\infty(M)$ mit* $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1-\lambda) \subseteq V$ *und $\alpha \in \Omega^q_c(M)$ geschlossen, dann definiert $d\lambda \wedge \alpha$ eine geschlossene $(q+1)$-Form mit kompakten Träger in $U \cap V$, und es gilt $\partial_c[\alpha] = [d\lambda \wedge \alpha]$.*

Beweis. Es lässt sich leicht einsehen, dass die Sequenz

$$0 \to \Omega^q_c(U \cap V) \xrightarrow{(j^U_*, -j^V_*)} \Omega^q_c(U) \oplus \Omega^q_c(V) \xrightarrow{\iota^U_* + \iota^V_*} \Omega^q_c(M) \to 0 \tag{I.32}$$

bei $\Omega^q_c(U \cap V)$ und $\Omega^q_c(U) \oplus \Omega^q_c(V)$ exakt ist. Wir zeigen nun, dass sie auch bei $\Omega^q_c(M)$ exakt ist. Dazu wählen wir eine der Überdeckung $M = U \cup V$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_U, \lambda_V \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\lambda_U) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\lambda_V) \subseteq V$ und $\lambda_U + \lambda_V = 1$, siehe [**3**, Abschnitt 2.6]. Ist nun $\alpha \in \Omega^q_c(M)$, dann folgt $\lambda_U \alpha|_U \in \Omega^q_c(U)$ sowie $\lambda_V \alpha|_V \in \Omega^q_c(V)$. Nach Konstruktion gilt $(\iota^U_* + \iota^V_*)(\lambda_U\alpha|_U, \lambda_V\alpha|_V) = \lambda_U\alpha + \lambda_V\alpha = \alpha$, also ist $\iota^U_* + \iota^V_*$ surjektiv, die Sequenz (I.32) daher exakt. Die Existenz der langen exakten Sequenz folgt nun aus Satz I.3.11. Ist α geschlossen, dann gilt weiters $d(\lambda_U\alpha|_U, \lambda_V\alpha|_V) = (d\lambda_U \wedge \alpha|_U, d\lambda_V \wedge \alpha|_V) = (d\lambda_U \wedge \alpha|_U, -d\lambda_U \wedge \alpha|_V) = (j^U_*, -j^V_*)(d\lambda_U \wedge \alpha|_{U \cap V})$, denn $d\lambda_U + d\lambda_V = d1 = 0$. Nach Definition des Einhängungshomomorphismus, siehe Beweis von Satz I.3.11, gilt daher $\partial_c[\alpha] = [d\lambda_U \wedge \alpha]$, wobei wir $d\lambda_U \wedge \alpha \in \Omega^{q+1}_c(U \cap V)$ auffassen. □

I.5.7. Satz. *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann induziert*

$$\pi : \Omega^q_c(M\times\mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}_c(M), \qquad \pi(\alpha) := (-1)^{q-1}\int_{-\infty}^{\infty} \iota_t^* i_{\partial t}\alpha\, dt,$$

für jedes q einen Isomorphismus $H^q_c(M\times\mathbb{R}) \cong H^{q-1}_c(M)$. Dabei bezeichnet $\iota_t : M \to M\times I$, $\iota_t(x) := (x,t)$, und $\partial_t \in \mathfrak{X}(M\times\mathbb{R})$, $\partial_t(x,t) := \frac{d}{ds}|_{s=t}(x,s)$.

Beweis. Für jedes $\alpha \in \Omega^q_c(M\times\mathbb{R})$ gilt zunächst, vgl. [**3**, Abschnitt 4.9],

$$\begin{aligned} d(\pi(\alpha)) - \pi(d\alpha) &= (-1)^{q-1} d\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* i_{\partial t}\alpha\, dt - (-1)^q\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* i_{\partial t} d\alpha\, dt \\ &= (-1)^{q-1}\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^*(d i_{\partial t} + i_{\partial_t} d)\alpha\, dt \\ &= (-1)^{q-1}\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* L_{\partial t}\alpha\, dt = (-1)^{q-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\partial}{\partial t}\iota_t^*\alpha\, dt = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt dieser Rechnung haben wir verwendet, dass $\iota_t^*\alpha$ für hinreichend große und hinreichend kleine t verschwindet, denn α hat kompakten Träger. Somit gilt $d\circ\pi = \pi\circ d$, also induziert π eine lineare Abbildung in der Kohomologie,

$$\pi : H^q_c(M\times\mathbb{R}) \to H^{q-1}_c(M), \qquad \pi([\alpha]) := [\pi(\alpha)].$$

Sei nun $\phi_0 \in \Omega^1_c(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}}\phi_0 = 1$, setze $\phi := p_2^*\phi_0 \in \Omega^1(M\times\mathbb{R})$ und betrachte

$$e : \Omega^{q-1}_c(M) \to \Omega^q_c(M\times\mathbb{R}), \qquad e(\beta) := p_1^*\beta\wedge\phi.$$

Da $d\phi = dp_2^*\phi_0 = p_2^* d\phi_0 = 0$ gilt offenbar $d\circ e = e\circ d$, also induziert e eine Abbildung in der Kohomologie,

$$e : H^{q-1}_c(M) \to H^q_c(M\times\mathbb{R}), \qquad e([\beta]) := [e(\beta)] = [p_1^*\beta\wedge\phi].$$

Für $\beta \in \Omega^{q-1}_c(M)$ folgt

$$\begin{aligned} \pi(e(\beta)) = (-1)^{q-1}\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* i_{\partial t}(p_1^*\beta\wedge\phi)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* p_1^*\beta\wedge\iota_t^* i_{\partial t}\phi\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\beta\wedge\iota_t^* i_{\partial t}\phi\, dt = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\iota_t^* i_{\partial t}\phi\, dt = \beta\int_{\mathbb{R}}\phi_0 = \beta, \end{aligned}$$

wobei wir $i_{\partial_t}(p_1^*\beta\wedge\phi) = (-1)^{q-1}p_1^*\beta\wedge i_{\partial_t}\phi$ und $p_1\circ\iota_t = \mathrm{id}_M$ verwendet haben. Insbesondere folgt

$$\pi\circ e = \mathrm{id}_{H^{q-1}_c(M)}.$$

Es bleibt daher noch

$$e\circ\pi = \mathrm{id}_{H^q_c(M\times\mathbb{R})} \tag{I.33}$$

zu zeigen. Betrachte dazu

$$h : \Omega^q_c(M\times\mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}_c(M\times\mathbb{R}), \qquad h(\alpha) :=$$

Wir werden unten die Relation

$$d\circ h - h\circ d = \mathrm{id} - e\circ\pi : \Omega^q_c(M\times\mathbb{R}) \to \Omega^q_c(M\times\mathbb{R}) \tag{I.34}$$

herleiten. Für geschlossene $\alpha \in \Omega^q(M \times \mathbb{R})$ erhalten wir daraus $\alpha - e(\pi(\alpha)) = d(h(\alpha))$, also $[\alpha] = [e(\pi(\alpha))] = e(\pi([\alpha]))$ und somit (I.33). Kommen wir schließlich zu (I.34). ... $\square$

I.5.8. KOROLLAR. *Das Integral liefert einen Isomorphismus* $H^n_c(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \alpha$. *Darüber hinaus gilt* $H^q_c(\mathbb{R}^n) = 0$ *für alle* $q \neq n$.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz I.5.7 mittels Induktion nach n. $\square$

Sei nun M eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir haben eine wohldefinierte bilineare Paarung

$$H^q(M) \times H^{n-q}_c(M) \to \mathbb{R}, \qquad ([\alpha],[\beta])_M := \int_M \alpha \wedge \beta, \tag{I.35}$$

denn nach dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], gilt

$$\int_M d\gamma \wedge \beta = \int_M d(\gamma \wedge \beta) = 0, \qquad \gamma \in \Omega^{q-1}(M),\ \beta \in \Omega^{n-q}_c(M),\ d\beta = 0,$$

sowie

$$\int_M \alpha \wedge d\delta = (-1)^q \int_M d(\alpha \wedge \delta) = 0, \qquad \alpha \in \Omega^q(M),\ d\alpha = 0,\ \delta \in \Omega^{n-q-1}_c(M).$$

Die Paarung (I.35) induziert eine lineare Abbildung

$$D^q_M : H^q(M) \to H^{n-q}_c(M)', \qquad D^q_M(a)(b) := (a,b)_M = \int_M a \wedge b, \tag{I.36}$$

wobei $H^{n-q}_c(M)'$ den Dualraum von $H^{n-q}_c(M)$ bezeichnet.

I.5.9. SATZ (Poincaré Dualität). *Für jede orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit* M *ist* (I.36) *ein Isomorphismus, dh.* $H^q(M) \cong H^{n-q}_c(M)'$ *für alle* q.

Wir beginnen den Beweis dieses Satzes mit einigen Lemmata.

I.5.10. LEMMA (Der Fall $M = \mathbb{R}^n$). $D^q_{\mathbb{R}^n}$ *ist ein Isomorphismus, für jedes* q.

BEWEIS. Dies folgt sofort aus Korollar I.5.8 und Beispiel I.2.13. $\square$

I.5.11. LEMMA (Natürlichkeit). *Bezeichnet* $\iota : U \to M$ *die Inklusion einer offenen Teilmenge in einer orientierten glatten n-Mannigfaltigkeit, dann haben wir* $(\iota^* a, b)_U = (a, \iota_* b)_M$ *für alle* $a \in H^q(M)$ *und* $b \in H^{n-q}_c(U)$. *Für jedes* q *kommutiert daher das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H^q(M) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "D^q_M"] & H^q(U) \arrow[d, "D^q_U"] \\ H^{n-q}_c(M)' \arrow[r, "\iota'_*"] & H^{n-q}_c(U)' \end{tikzcd}$$

wobei ι'_* *die zu* $\iota_* : H^{n-q}_c(U) \to H^{n-q}_c(M)$ *duale Abbildung bezeichnet.*

BEWEIS. Für $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\beta \in \Omega^{n-q}_c(U)$ gilt $(a, \iota_* b)_M = \int_M \alpha \wedge \iota_* \beta = \int_U \iota^* \alpha \wedge \beta = (\iota^* a, b)_U$, denn die Form $\alpha \wedge \iota_* \beta$ hat kompakten Träger in U und stimmt dort mit der Form $\iota^* \alpha \wedge \beta$ überein. $\square$

I.5.12. Lemma (Kompatibilität mit Einhängungshomomorphismen). *Ist $M = U \cup V$ eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen, dann gilt $(\partial a, b)_M = (-1)^{q+1}(a, \partial_c b)_{U\cap V}$, für alle $a \in H^q(U \cap V)$ und $b \in H_c^{n-q-1}(M)$. Für jedes q kommutiert daher das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^q(U\cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle D^q_{U\cap V}} & & \downarrow{\scriptstyle D^{q+1}_M} \\ H_c^{n-q}(U\cap V)' & \xrightarrow{\partial_c'} & H_c^{n-q-1}(M)' \end{array}$$

bis auf ein Vorzeichen. Dabei bezeichnet ∂ in der oberen Zeile den Einhängungshomomorphismus der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12 und ∂_c' in der unteren Zeile die zum Einhängungshomomorphismus $\partial_c : H_c^{n-q-1}(M) \to H_c^{n-q}(U\cap V)$ duale Abbildung, siehe Satz I.5.6.

Beweis. Seien dazu $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(1-\lambda) \subseteq V$, $\alpha \in \Omega^q(U \cap V)$, $d\alpha = 0$, und $\beta \in \Omega_c^{n-q-1}(M)$, $d\beta = 0$. Aus der Beschreibung des Einhängungshomomorphismus in Satz I.3.12 folgt

$$(\partial[\alpha], [\beta])_M = (-[d\lambda \wedge \alpha], [\beta])_M = -\int_M d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta = -\int_{U\cap V} d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta,$$

denn die Form $d\lambda\wedge\alpha$ hat Träger in $U\cap V$. Aus der Beschreibung des Einhängungshomomorphismus in Satz I.5.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}([\alpha], \partial_c[\beta])_{U\cap V} &= ([\alpha], [d\lambda \wedge \beta])_{U\cap V} \\ &= \int_{U\cap V} \alpha \wedge d\lambda \wedge \beta = (-1)^q \int_{U\cap V} d\lambda \wedge \alpha \wedge \beta,\end{aligned}$$

also $([\alpha], \partial_c[\beta])_{U\cap V} = (-1)^{q+1}(\partial[\alpha], [\beta])_M$. □

I.5.13. Lemma (Mayer–Vietoris Argument). *Es sei $M = U \cup V$ eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, $U, V \subseteq M$ offen. Sind D^q_U, D^q_V und $D^q_{U\cap V}$ Isomorphismen für jedes q, dann ist auch D^q_M für jedes q ein Isomorphismus.*

Beweis. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{q-1}(U)\oplus H^{q-1}(V) & \to & H^{q-1}(U\cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^q(M) & \to & H^q(U)\oplus H^q(V) & \to & H^q(U\cap V) \\ \cong\downarrow{\scriptstyle D^{q-1}_U\oplus D^{q-1}_V} & & \cong\downarrow{\scriptstyle D^{q-1}_{U\cap V}} & & \downarrow{\scriptstyle D^q_M} & & \cong\downarrow{\scriptstyle D^q_U\oplus D^q_V} & & \cong\downarrow{\scriptstyle D^q_{U\cap V}} \\ H_c^{n-q+1}(U)'\oplus H_c^{n-q+1}(V)' & \to & H^{n-q+1}(U\cap V)' & \xrightarrow{\partial_c'} & H_c^{n-q}(M)' & \to & H_c^{n-q}(U)'\oplus H_c^{n-q}(V)' & \to & H_c^{n-q}(U\cap V)' \end{array}$$

Die obere Zeile ist ein Stück der Mayer–Vietoris Sequenz aus Satz I.3.12 und daher exakt. Die untere Zeile entsteht aus der Mayer–Vietoris Sequenz in Satz I.5.6 durch Übergang zu den Dualräumen, sie ist daher ebenfalls exakt, vgl. Bemerkung I.3.7. Nach Voraussetzung sind die vier äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Nach Lemma I.5.11 und Lemma I.5.12 kommutiert das Diagramm bis auf Vorzeichen. Aus dem Fünferlemma I.3.8 folgt nun, vgl. Aufgabe 15, dass auch D^q_M ein Isomorphismus ist, für jedes q. □

I.5.14. Lemma (Der Fall mit endlicher guter Überdeckung). *Ist M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit die eine endliche gute Überdeckung besitzt, siehe Definition I.3.24, dann ist D^q_M ein Isomorphismus, für jedes q.*

Beweis. Sei also $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ eine endliche gute Überdeckung von M. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $m \geq 1$, $U := U_1 \cup \cdots \cup U_{m-1}$ und $V := U_m$. Offensichtlich gilt $M = U \cup V$. Nach Lemma I.5.10 ist D^q_V ein Isomorphismus, für jedes q. Da $\{U_1, \dots, U_{m-1}\}$ eine gute Überdeckung von U bildet, ist nach Induktionsvoraussetzung D^q_U ein Isomorphismus, für jedes q. Schließlich ist auch $\{U_1 \cap U_m, \dots, U_{m-1} \cap U_m\}$ eine gute Überdeckung von $U \cap V$, nach Induktionsvoraussetzung daher $D^q_{U\cap V}$ ein Isomorphismus, für jedes q. Aus Lemma I.5.13 folgt nun, dass auch D^q_M ein Isomorphismus ist, für jedes q. $\square$

Damit ist der Beweis von Satz I.5.9 im kompakten Fall bereits vollständig, denn nach Satz I.3.25 besitzt jede geschlossene Mannigfaltigkeit eine endliche gute Überdeckung. Für den allgemeinen Fall benötigen wir noch folgendes

I.5.15. Lemma (Disjunkte Vereinigung). *Ist $M = \bigsqcup_i M_i$ eine disjunkte Vereinigung orientierter glatter n-Mannigfaltigkeiten, i aus einer beliebigen Indexmenge, und ist $D^q_{M_i}$ für jedes i und q ein Isomorphismus, dann ist auch D^q_M für jedes q ein Isomorphismus.*

Beweis. Betrachte das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q(M) \arrow[r, "D^q_M"] \arrow[d, equal] & H^{n-q}_c(M)' \arrow[r, equal] & H^{n-q}_c\big(\bigsqcup_i M_i\big)' \arrow[d, equal] \\
H^q\big(\bigsqcup_i M_i\big) \arrow[d, equal] & & \Big(\bigoplus_i H^{n-q}_c(M_i)\Big)' \arrow[d, equal] \\
\prod_i H^q(M_i) \arrow[rr, "\prod_i D^q_{M_i}", "\cong"'] & & \prod_i\big(H^{n-q}_c(M_i)'\big)
\end{tikzcd}$$

wobei wir die von den kanonischen Inklusionen $\iota_i : M_i \to M$ induzierten Isomorphismen aus Bemerkung I.1.7 und Bemerkung I.5.5 verwenden. Nach Voraussetzung ist der untere horizontale Pfeil ein Isomorphismus. Für die rechte untere vertikale Gleichheit beachte, dass der Dualraum einer direkten Summe $(\bigoplus_i V_i)'$ kanonisch mit dem Produkt der Dualräume $\prod_i V_i'$ identifiziert werden kann. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt nun, dass auch D^q_M ein Isomorphismus ist, für jedes q. $\square$

Beweis von Satz I.5.9. Wir wählen offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ wie in Lemma I.4.8, dh. U, V und $U \cap V$ sind jeweils disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen die jede eine endliche gute Überdeckung besitzen, und es gilt $M =$

$U \cup V$. Nach Lemma I.5.14 und Lemma I.5.15 sind daher D^q_U, D^q_V und $D^q_{U\cap V}$ Isomorphismen, für jedes q. Aus Lemma I.5.13 folgt nun, dass auch D^q_M für jedes q ein Isomorphismus ist. Damit ist der Beweis von Satz I.5.9 vollständig. □

I.5.16. Korollar. *Ist $M \neq \emptyset$ eine zusammenhängende orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit, dann induziert das Integral einen Isomorphismus $H^n_c(M) \cong \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_M \alpha$. Ist darüber hinaus M geschlossen, so erhalten wir einen Isomorphismus $H^n(M) \cong \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_M \alpha$.*

Beweis. Da $M \neq \emptyset$ zusammenhängend ist, repräsentiert $1 \in \Omega^0(M)$ eine Basis von $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, siehe Bemerkung I.1.4. Der erste Teil des Korollars folgt daher aus Satz I.5.9. Im geschlossenen Fall gilt $H^n(M) = H^n_c(M)$, die zweite Aussage ist somit eine Konsequenz der ersten. □

I.5.17. Bemerkung. Für jede zusammenhängende glatte n-Mannigfaltigkeit M gilt, vgl. Korollar I.5.16,

$$H^n_c(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ orientierbar, und} \\ 0 & \text{falls } M \text{ nicht orientierbar ist.} \end{cases}$$

Für die unbewiesene Implikation siehe etwa [**1**, Chapter I§7]. Die Orientierbarkeit von M lässt sich daher durch Berechnung von $H^n_c(M)$ entscheiden. Weiters gilt, vgl. Satz I.5.9 und Bemerkung I.5.4,

$$H^n(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ geschlossen und orientierbar,} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

I.5.18. Korollar. *Für jede geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit M und jedes q ist die Paarung, siehe* (I.35),

$$H^q(M) \times H^{n-q}(M) \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \mapsto (a, b)_M = \int_M a \wedge b,$$

nicht-degeneriert, und daher $b^q(M) = b^{n-q}(M)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz I.5.9, denn im geschlossenen Fall gilt $H^q_c(M) = H^q(M)$, siehe auch Korollar I.3.26. □

I.5.19. Korollar. *Ist M eine geschlossene orientierbare glatte Mannigfaltigkeit ungerader Dimension, dann gilt $\chi(M) = 0$.*

Beweis. Nach Korollar I.5.18 haben wir $b^q(M) = b^{n-q}(M)$, $n = \dim(M)$. Für die Euler-Charakteristik folgt daher

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_q (-1)^q b^q(M) = \sum_q (-1)^q b^{n-q}(M) \\ &= (-1)^n \sum_q (-1)^{n-q} b^{n-q}(M) = (-1)^n \sum_q (-1)^q b^q(M) = (-1)^n \chi(M).\end{aligned}$$

Ist n ungerade, so erhalten wir daraus $\chi(M) = 0$. □

I.5.20. Korollar. *Ist M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit gerader Dimension $n = 2m$, dann gilt $\chi(M) \equiv b^m(M) \mod 2$.*

Beweis. Wir schreiben zunächst

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q b^q(M) + (-1)^m b^m(M) + \sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M).$$

Nach Korollar I.5.18 gilt $b^q(M) = b^{2m-q}(M)$, und daher

$$\sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M) = \sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^{2m-q} b^{2m-q}(M) = \sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q b^q(M).$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\chi(M) = (-1)^m b^m(M) + 2\sum_{q=m+1}^{2m}(-1)^q b^q(M) \equiv b^m(M) \mod 2,$$

wie behauptet. □

I.5.21. Korollar. *Die Euler Charakteristik einer geschlossenen orientierten glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $n \equiv 2 \mod 4$ ist gerade.*

Beweis. Sei also M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$. Nach Voraussetzung ist m daher ungerade. Nach Korollar I.5.20 genügt es zu zeigen, dass $b^m(M)$ gerade ist. Betrachte dazu folgende Bilinearform auf der mittleren Kohomologie, siehe (I.35),

$$\omega : H^m(M) \times H^m(M) \to \mathbb{R}, \qquad \omega(a,b) := (a,b)_M = \int_M a \wedge b.$$

Da m ungerade ist, ist ω schiefsymmetrisch, dh. $\omega(a,b) = -\omega(b,a)$, für alle $a, b \in H^m(M)$, siehe (I.2). Nach Korollar I.5.18 ist ω nicht-degeneriert. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass nicht-degenerierte schiefsymmetrische Bilinearform nur auf Vektorräumen gerader Dimension existieren. Folglich muss $b^m(M) = \dim H^m(M)$ gerade sein. □

I.5.22. Bemerkung (Signatur). Ist M eine geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4k$, dann definiert

$$H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}, \qquad (a,b) \mapsto (a,b)_M = \int_M a \wedge b,$$

eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform, siehe Korollar I.5.18 und (I.2). Unter der *Signatur* von M verstehen wir die Signatur dieser nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform auf $H^{2k}(M)$.[2]

[2] Es sei b eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum V. Dann existiert eine Basis von V bezüglich der b die Matrixdarstellung $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ hat. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester ist die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und die Anzahl der negativen Diagonaleinträge unabhängig von der diagonalisierenden Basis. Ihre Differenz, dh. Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen Einträge, wird die *Signatur der symmetrischen Bilinearform b* genannt. Beachte auch, dass zwei

I.5.23. Korollar. *Für jedes $0 \neq c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ gilt auch $0 \neq c^n \in H^{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, dh. $\{1, c, c^2, \dots, c^n\}$ bildet eine graduierte Basis von $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, vgl. Satz I.3.23. Als graduierte Algebren gilt daher $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}[c]/c^{n+1}$ wobei $|c| = 2$.*

Beweis. O.B.d.A. Sei $n \geq 2$, die anderen Fälle sind trivial. Es bezeichne $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische (glatte) Inklusion. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach n, wir dürfen daher annehmen, dass das Resultat für $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ schon gezeigt ist. Sei nun $0 \neq c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Nach dem letzten Teil von Satz I.3.23 ist auch $0 \neq \iota^* c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun $\iota^*(c^{n-1}) = (\iota^* c)^{n-1} \neq 0$, und somit $0 \neq c^{n-1}$. Nach Korollar I.5.18 existiert $a \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ mit $c^{n-1} \wedge a \neq 0$. Da c eine Basis von $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{R}$ bildet, muss a ein Vielfaches von c sein, es folgt daher $c^n \neq 0$. □

I.5.24. Bemerkung. Es sei $n \geq 1$, $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ glatt und $c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ wie in Korollar I.5.23. Da c eine Basis von $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ bildet, existiert eine eindeutige Zahl λ mit $f^* c = \lambda c$. Da f^* ein Algebrahomomorphismus ist, siehe (I.3), folgt $f^*(c^k) = (f^* c)^k = (\lambda c)^k = \lambda^k c^k \in H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, und daher

$$f^* = \lambda^k : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n), \qquad 0 \leq k \leq n,$$

denn nach Korollar I.5.23 bildet c^k eine Basis von $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Dies liefert starke Einschränkungen an die von einer glatten Abbildung induzierten Homomorphismen $f^* : H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, diese sind durch λ, dh. $f^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, schon völlig bestimmt.

I.5.25. Beispiel. Betrachte die beiden zusammenhängenden geschlossenen orientierbaren 6-Mannigfaltigkeiten $S^2 \times S^4$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$. Nach Satz I.3.23 und Theorem I.4.1 gilt $b^q(S^2 \times S^4) = b^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$ für alle q. Trotzdem können die beiden Mannigfaltigkeiten nicht homotopieäquivalent (und daher auch nicht diffeomorph) sein. Für jedes $a \in H^2(S^2 \times S^4)$ gilt nämlich $a \wedge a = 0$, siehe Beispiel I.4.15, aber es existiert $c \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$ mit $c \wedge c \neq 0$, siehe Korollar I.5.23.

I.6. Abbildungsgrad. Korollar I.5.16 erlaubt es einen Abbildungsgrad für glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu definieren. Seien dazu M und N zwei nicht-leere zusammenhängende geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ glatt. Nach Korollar I.5.16 gibt es genau eine reelle Zahl $\deg(f)$ die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} H^n(N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\int_N"', "\cong"] & H^n(M) \arrow[d, "\cong"', "\int_M"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\deg(f)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Diese Zahl $\deg(f)$ wird der *Abbildungsgrad* von f genannt, sie ist durch

$$\int_M f^*\alpha = \deg(f) \int_N \alpha, \qquad \text{für alle } \alpha \in \Omega^n(N), \tag{I.37}$$

nicht-degenerierte symmetrische Bilinearformen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum genau dann äquivalent sind wenn sie die gleiche Signatur haben.

eindeutig bestimmt.

I.6.1. Satz (Abbildungsgrad). *Der Abbildungsgrad glatter Abbildungen zwischen nicht-leeren zusammenhängenden geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$, $g : N \to P$, hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\deg(\mathrm{id}_M) = 1$.
(b) $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
(c) Sind $f \simeq g : M \to N$ *glatt homotop, dann gilt* $\deg(f) = \deg(g)$.
(d) Ist $\deg(f) \neq 0$, *dann muss* f *surjektiv sein.*
(e) $\deg(A) = (-1)^{n+1}$, *wobei* $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, *die Antipodalabbildung bezeichnet.*

Beweis. Behauptung (a) ist offensichtlich, denn die identische Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ induziert die identische Abbildung $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{H^n(M)} : H^n(M) \to H^n(M)$, siehe (I.4). Auch (b) ist offensichtlich, denn $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^n(P) \to H^n(M)$, siehe (I.5). Aus Satz I.2.5 erhalten wir auch sofort (c). Ist $f : M \to N$ nicht surjektiv, dann existiert, aufgrund der Kompaktheit von M, eine offene Teilmenge $U \subseteq N$ mit $f(M) \cap U = \emptyset$. Wähle $\alpha \in \Omega^n(N)$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_N \alpha \neq 0$. Es folgt $f^*\alpha = 0$, also $\deg(f) \int_N \alpha = \int_M f^*\alpha = 0$, siehe (I.37), und daher $\deg(f) = 0$. Dies zeigt (d). Nun zur letzten Behauptung (e). Es bezeichne $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Inklusion, $\tilde\alpha := x^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$, und $\alpha := \iota^*\tilde\alpha \in \Omega^n(S^n)$. Aus dem Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], erhalten wir zunächst

$$\int_{S^n} \alpha = \int_{S^n} \iota^*\tilde\alpha = \int_{D^{n+1}} d\tilde\alpha = \int_{D^{n+1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} = \mathrm{vol}(D^{n+1}) \neq 0.$$

Bezeichnen wir die offensichtliche Ausdehnung von A mit $\tilde A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde A(x) := -x$, dann gilt $\tilde A \circ \iota = \iota \circ A$ und $\tilde A^*\tilde\alpha = (-1)^{n+1}\tilde\alpha$. Wir erhalten daher $A^*\alpha = A^*\iota^*\tilde\alpha = (\iota \circ A)^*\tilde\alpha = (\tilde A \circ \iota)^*\tilde\alpha = \iota^*\tilde A^*\tilde\alpha = (-1)^{n+1}\iota^*\tilde\alpha = (-1)^{n+1}\alpha$. Zusammen mit (I.37) folgt

$$\deg(A) \int_{S^n} \alpha = \int_{S^n} A^*\alpha = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \alpha,$$

und da $\int_{S^n} \alpha \neq 0$ schließlich $\deg(A) = (-1)^{n+1}$. □

I.6.2. Bemerkung. Für Abbildungen zwischen Sphären gilt sogar die Umkehrung in I.6.1(c), sind $f, g : S^n \to S^n$ glatt und $\deg(f) = \deg(g)$, dann sind f und g glatt homotop.

I.6.3. Satz. *Es sei* $f : M \to N$ *eine glatte Abbildungen zwischen nicht-leeren zusammenhängenden geschlossenen orientierten glatten* n*-Mannigfaltigkeiten. Weiters sei* $y \in N$ *ein regulärer Wert von* f, *dh. für jedes* $x \in f^{-1}(y)$ *sei* $T_x f : T_x M \to T_y M$ *ein linearer Isomorphismus. Dann ist* $f^{-1}(y)$ *endlich, und*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(x),$$

wobei $\varepsilon(x) := 1$ *falls* $T_x f$ *orientierungserhaltend bzw.* $\varepsilon(x) := -1$ *falls* $T_x f$ *orientierungsumkehrend ist. Insbesondere ist der Abbildungsgrad stets ganzzahlig!*

Beweis. Nach dem inversen Funktionensatz ist $A := f^{-1}(y)$ eine diskrete Teilmenge von M, also endlich aufgrund der Kompaktheit von M. Nach dem inversen Funktionensatz existieren eine offene Umgebung U von y und offene Umgebungen U_x von $x \in A$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) $f^{-1}(U) = \bigsqcup_{x\in A} U_x$.
(b) $f|_{U_x} : U_x \to U$ ist ein Diffeomorphismus.
(c) U ist zusammenhängend.
Sei nun $\alpha \in \Omega^n(N)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_N \alpha \neq 0$. Aufgrund von (c) ist der Diffeomorphismus $f|_{U_x} : U_x \to U$ orientierungsbewahrend falls $\varepsilon(x) = 1$, bzw. orientierungsumkehrend falls $\varepsilon(x) = -1$. In jedem Fall folgt

$$\int_{U_x} (f|_{U_x})^*\alpha = \varepsilon(x) \int_U \alpha, \qquad x \in A.$$

Nach (a) und da $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$, gilt $\operatorname{supp}(f^*\alpha) \subseteq f^{-1}(U) = \bigsqcup_{x\in A} U_x$, und daher

$$\int_M f^*\alpha = \int_{f^{-1}(U)} f^*\alpha = \sum_{x\in A} \int_{U_x} (f|_{U_x})^*\alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x) \int_U \alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x) \int_N \alpha.$$

Zusammen mit (I.37) folgt $\deg(f)\int_N \alpha = \int_M f^*\alpha = \sum_{x\in A} \varepsilon(x)\int_N \alpha$ und da $\int_N \alpha \neq 0$ schließlich $\deg(f) = \sum_{x\in A} \varepsilon(x)$. Die letzte Aussage zur Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades folgt nun aus der nicht-trivialen Tatsache, dass jede glatte Abbildung (sehr viele) reguläre Werte besitzt, siehe Bemerkung I.6.4 unten. □

I.6.4. Bemerkung. Jede glatte Abbildung besitzt reguläre Werte. Die Menge der regulären Werte ist sogar sehr groß, nach einem Satz von Sard ist ihr Komplement eine Nullmenge, siehe etwa [**2**, Satz 6.1] oder [**4**].

I.6.5. Satz. *Es sei* $f : S^n \to S^n$ *glatt,* $n \geq 1$*. Dann gilt:*
(a) Ist f *fixpunktfrei, dh.* $f(x) \neq x$ *für alle* $x \in S^n$*, dann ist* f *homotop zur Antipodalabbildung und daher* $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
(b) Ist f *antipodalpunktfrei, dh.* $f(x) \neq -x$ *für alle* $x \in S^n$*, dann ist* f *homotop zur identischen Abbildung und daher* $\deg(f) = 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (b). Ist $f : S^n \to S^n$ antipodalpunktfrei, dh. $f(x) \neq -x$, für alle $X \in S^n$, dann liefert

$$h : S^n \times I \to S^n, \qquad h(x,t) := \frac{tx + (1-t)f(x)}{|tx + (1-t)f(x)|},$$

die gewünschte Homotopie von f zur identischen Abbildung id_{S^n}. Beachte, dass der Nenner in diesem Ausdruck wegen der Antipodalpunktfreiheit nie verschwindet. Aus Satz I.6.1 folgt nun auch $\deg(f) = 1$. Um (a) einzusehen, sei nun

$f : S^n \to S^n$ fixpunktfrei, dh. $f(x) \neq x$ für alle $x \in S^n$. Es ist dann

$$h : S^n \times I \to S^n, \qquad h(x,t) := \frac{-tx + (1-t)f(x)}{|-tx + (1-t)f(x)|},$$

eine Homotopie von f zur Antipodalabbildung A. Aus Satz I.6.1 folgt nun auch $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. □

I.6.6. Korollar. *Ist $f : S^{2n} \to S^{2n}$ glatt, dann existiert $x \in S^{2n}$ mit $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$, $n \geq 0$.*

Beweis. Hätte $f : S^{2n} \to S^{2n}$ weder Fix- noch Antipodalpunkt, erhielten wir den Widerspruch $1 = \deg(f) = (-1)^{2n+1} = -1$ aus Satz I.6.5(a) bzw. (b). □

I.6.7. Korollar (Satz vom Igel). *Jedes glatte Vektorfeld X auf S^{2n}, $n \geq 0$, besitzt eine Nullstelle, dh. es existiert $x \in S^{2n}$ mit $X(x) = 0$.*

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial, sei also o.B.d.A. $n \geq 1$. Wir gehen indirket vor und nehmen an $X \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ besitze keine Nullstelle. Dann ist $f : S^{2n} \to S^{2n}$, $f(x) := X(x)/|X(x)|$, eine glatte Abbildung ohne Fixpunkt und ohne Antipodalpunkt, denn $f(x) \perp x$ für alle $x \in S^{2n}$. Da dies Korollar I.6.6 widerspricht muss X also eine Nullstelle besitzen. □

I.7. Poincaré Dual von Teilmannigfaltigkeiten. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einer *Teilmannigfaltigkeit* von M verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq M$, sodass zu jedem Punkt $x \in S$ eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ von M existiert, für die $x \in U$ und $u(U \cap S) = u(U) \cap \mathbb{R}^k$ gilt. Dh. lokal liegt S in M wie $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Jede solche Karte wird eine *Teilmannigfaltigkeitskarte (lokale Trivialisierung)* von $S \subseteq M$ bei x genannt. Die Einschränkungen dieser Teilmannigfaltigkeitskarten bilden einen glatten Atlas für S, jede Teilmannigfaltigkeit ist daher in natürlicher Weise selbst eine glatte Mannigfaltigkeit. Zudem ist die kanonische Inklusion $\iota : S \to M$ glatt. Für $M = \mathbb{R}^n$ liefert dies den selben Begriff wie in [**3**, Kapitel 2].

I.7.1. Bemerkung. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Dann ist S auch Teilmannigfaltigkeit von N, vgl. Aufgabe 26.

I.7.2. Definition (Transversalität). Zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ heißen *transversal,* wenn für jedes $x \in M$ und $y \in P$ mit $f(x) = g(y) =: z$ die Bilder der Tangentialabbildungen $T_x f : T_x M \to T_z N$ und $T_y g : T_y P \to T_z N$ den Tangentialraum $T_z N$ aufspannen, dh.

$$\operatorname{img}\bigl(T_x M \xrightarrow{T_x f} T_z N\bigr) + \operatorname{img}\bigl(T_y P \xrightarrow{T_y g} T_z N\bigr) = T_z N.$$

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird transversal zu einer Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq N$ genannt, wenn sie transversal zu der kanonischen Inklusion $\iota : S \to N$ ist. Zwei Teilmannigfaltigkeiten $S_1, S_2 \subseteq N$ werden transversal genannt, wenn die kanonischen Inklusionen $\iota_1 : S_1 \to N$ und $\iota_2 : S_2 \to N$ transversal sind.

I.7.3. Satz. *Es sei $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit und $f : M \to N$ transversal zu S. Dann ist $f^{-1}(S)$ eine Teilmannigfaltigkeit von M und es gilt*

$$\dim_x(M) - \dim_x(f^{-1}(S)) = \dim_{f(x)}(N) - \dim_{f(x)}(S), \qquad x \in f^{-1}(S),$$

dh. die Kodimension von $f^{-1}(S)$ in M stimmt mit der Kodimension von S in N überein.

Beweis. Sei also $x \in f^{-1}(S)$. Da $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit ist, existiert eine Karte $N \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in U$ und $u(U \cap S) = u(U) \cap \mathbb{R}^s$, wobei $n = \dim_{f(x)}(N)$ und $s = \dim_{f(x)}(S)$. Da f stetig ist, existiert eine Karte $M \supseteq V \xrightarrow{v} v(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in V$ und $f(V) \subseteq U$, wobei $m = \dim_x(M)$. Betrachte nun die glatte Abbildung $\mathbb{R}^m \supseteq v(V) \xrightarrow{g:=p_2 \circ u \circ v^{-1}} \mathbb{R}^{n-s}$, wobei $p_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$ die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Beachte $v(V \cap f^{-1}(S)) = g^{-1}(0)$. Wegen der Transversalitätsvoraussetzung ist zudem $D_z g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-s}$ für jedes $z \in v(V \cap f^{-1}(S))$ surjektiv. Somit ist $v(V \cap f^{-1}(S))$ eine $(m-n+s)$-dimensionale reguläre Nullstellenmenge, siehe [**3**, Abschnitt 2.1]. Aus dem Satz in [**3**, Abschnitt 2.3] folgt daher, dass $v(V \cap f^{-1}(S))$ lokale $(m-n+s)$-dimensionale Trivialisierungen besitzt. Also existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq v(V)$ mit $v(x) \in W$ und ein Diffeomorphismus $\psi : W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$, sodass $\psi(W \cap (V \cap f^{-1}(S))) = \psi(W) \cap \mathbb{R}^{m-n+s}$. Die Komposition $\psi \circ v|_{v^{-1}(W)} : v^{-1}(W) \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist daher eine Teilmannigfaltigkeitskarte von $S \subseteq M$ bei x. □

I.7.4. Bemerkung. Es sei $f : M \to N$ glatt. Ein Punkt $y \in N$ wird *regulärer Wert von f* genannt, wenn für jedes $x \in f^{-1}(y)$ die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_y N$ surjektiv ist. Offensichtlich ist dies genau dann der Fall, wenn f transversal zu der einpunktigen Teilmannigfaltigkeit $\{y\} \subseteq N$ ist. Aus Satz I.7.3 folgt daher, dass das Urbild $f^{-1}(y)$ eines regulären Wertes y eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit bildet und es gilt $\dim_x(M) - \dim_x(f^{-1}(y)) = \dim_{f(x)}(N)$, für alle $x \in f^{-1}(y)$.

I.7.5. Bemerkung. Sind S_1 und S_2 zwei transversale Teilmannigfaltigkeiten von M, dann ist auch ihr Durchschnitt $S_1 \cap S_2$ eine Teilmannigfaltigkeit von M, und für jedes $x \in S_1 \cap S_2$ gilt

$$\dim_x(M) - \dim_x(S_1 \cap S_2) = \big(\dim_x(M) - \dim_x(S_1)\big) + \big(\dim_x(M) - \dim_x(S_2)\big),$$

dh. die Kodimension ist additiv. Es bezeichnen dazu $\iota_1 : S_1 \to M$ und $\iota_2 : S_2 \to M$ die beiden kanonischen Inklusionen. Nach Satz I.7.3 ist $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1)$ eine Teilmannigfaltigkeit von S_2. Zusammen mit Bemerkung I.7.1 folgt daher, dass $S_1 \cap S_2$ auch Teilmannigfaltigkeit von M ist.

I.7.6. Definition. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird *immersiv* oder *Immersion* genannt, wenn die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ bei jedem $x \in M$ injektiv ist. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wird *submersiv* oder *Submersion* genannt, wenn die Tangentialabbildung $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ bei jedem $x \in M$ surjektiv ist.

I.7.7. Beispiel. Eine immersive Abbildung wird i.A. nicht injektiv sein, betrachte etwa $\mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\mathbf{i}t}$. Das Bild einer injektiven Immersion wird i.A. keine Teilmannigfaltigkeit sein.

I.7.8. Satz. *Es sei $f : M \to N$ eine injektive Immersion und ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dh. $f : M \to f(M)$ ist ein Homöomorphismus, wobei $f(M)$ die von N induzierte Topologie trägt. Dann ist $f(M)$ eine Teilmannigfaltigkeit von N und es gilt*

$$\dim_{f(x)}(f(M)) = \dim_x(M), \qquad x \in M.$$

Beweis. Es sei $x \in M$ und $M \supseteq \tilde{U} \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{u}(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit $x \in \tilde{U}$, $m = \dim_x(M)$. Da f ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, existiert eine offene Teilmenge $\tilde{V} \subseteq N$ mit $f(\tilde{U}) = f(M) \cap \tilde{V}$. Wähle eine Karte $N \supseteq V \xrightarrow{v} v(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in V \subseteq \tilde{V}$, $n = \dim_{f(x)}(N)$. Setze $U := \tilde{U} \cap f^{-1}(V)$ und $M \supseteq U \xrightarrow{u:=\tilde{u}|_U} u(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Nach Konstruktion ist dies eine Karte von M mit $x \in U$ und es gilt $f(U) = f(M) \cap V$. Es ist daher $v \circ f \circ u^{-1} : u(U) \to v(f(M) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Parametrisierung von $v(f(M) \cap V)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.1]. Nach dem Satz in [**3**, Abschnitt 2.3] ist $v(f(M) \cap V)$ also eine m-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt sofort, dass $f(M)$ eine Teilmannigfaltigkeit von N ist. □

I.7.9. Bemerkung. Ist $f : M \to N$ eine injektive Immersion und M geschlossen, dann ist f ein Homöomorphismus auf ihr Bild und $f(M)$ daher eine Teilmannigfaltigkeit von N, siehe Satz I.7.8. Dies folgt aus der elementaren Tatsache, dass jede stetige Bijektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum schon ein Homöomorphismus ist, siehe etwa [**5**, Kapitel I§8].

I.7.10. Beispiel. Es sei $f : M \to N$ glatt, und es bezeichne

$$G_f := \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in M\big\} \subseteq M \times N$$

den *Graph* von f. Dies ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit und $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f$, $x \mapsto (x, f(x))$, ist ein Diffeomorphismus mit Inverser $p_1 : G_f \to M$, $p_1(x, y) := x$, siehe [**3**, Abschnitt 2.3]. Ist M orientiert, dann versehen wir G_f mit jener eindeutigen Orientierung, die $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f$ zu einem orientierungsbewahrenden Diffeomorphismus macht.

I.7.11. Beispiel. Für jede glatte glatte Mannigfaltigkeit M, ist die *Diagonale,*

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M,$$

eine glatte Teilmannigfaltigkeit und $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ ein Diffeomorphismus. Dies ist ein Spezialfall von Beispiel I.7.10, denn die Diagonale ist der Graph der identischen Abbildung, $\Delta = G_{\mathrm{id}_M}$. Ist M orientiert, dann versehen wir die

Diagonale mit jener eindeutigen Orientierung, die $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ zu einem orientierungsbewahrenden Diffeomorphismus macht.

I.7.12. Bemerkung. Zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ sind genau dann transversal, wenn die Abbildung $f \times g : M \times P \to N \times N$ transversal zur Diagonale $\Delta \subseteq N \times N$ ist, vgl. Aufgabe I.7.12.

I.7.13. Definition (Poincaré Dual einer Teilmannigfaltigkeit). Es bezeichne $\iota : S \to M$ die Inklusion einer geschlossenen orientierten k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit in einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Betrachte nun das lineare Funktional

$$H^k(M) \to \mathbb{R}, \qquad a \mapsto \int_S a := \int_S \iota^* a.$$

Nach Korollar I.5.18 existiert eine eindeutige Klasse $\eta_S \in H^{n-k}(M)$, sodass

$$\int_S a = \int_M a \wedge \eta_S, \qquad \text{für alle } a \in H^k(M). \tag{I.38}$$

Die Klasse η_S wird als das *Poincaré Dual* der Teilmannigfaltigkeit S bezeichnet.

I.7.14. Beispiel. Es sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeit. Das Poincaré Dual eines Punktes $P \in M$ ist dann jene eindeutig bestimmte Klasse $\eta_P \in H^n(M)$ für die $\int_M \eta_P = 1$ gilt, vgl. Korollar I.5.16.

I.7.15. Beispiel. Es sei M eine geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeit. Fassen wir M als Teilmannigfaltigkeit von sich selbst auf, dann gilt für ihr Poincaré Dual offensichtlich $\eta_M = [1] \in H^0(M)$.

I.7.16. Beispiel. Das Poincaré Dual von $S^k \subseteq S^n$, $0 < k < n$, ist trivial, denn $H^{n-k}(S^n) = 0$, siehe Satz I.3.18.

I.7.17. Beispiel. Das Poincaré Dual der Teilmannigfaltigkeit $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $0 \leq k \leq n$, ist nicht-trivial, denn die Inklusion induziert einen Isomorphismus $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^k) \cong \mathbb{R}$, siehe Satz I.3.23.

I.7.18. Beispiel. Es sei $x \in S^1$ und betrachte die Teilmannigfaltigkeit $S := S^1 \times \{x\} \subseteq S^1 \times S^1$. Für ihr Poincaré Dual $\eta_S \in H^1(S^1 \times S^1)$ gilt dann $\eta_S = p_2^* a$, wobei $a \in H^1(S^1)$ die eindeutige Klasse mit $\int_{S^1} a = 1$ bezeichnet. Eine Verallgemeinerung davon wird in Aufgabe 28 besprochen.

I.7.19. Definition (Lefschetz Zahl). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie und $f : M \to M$ glatt. Unter der *Lefschetz Zahl* von f verstehen wir reelle Zahl

$$\lambda(f) := \sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\bigl(H^q(M) \xrightarrow{f^*} H^q(M)\bigr).$$

I.7.20. Proposition. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit endlich dimensionaler Kohomologie. Die Lefschetz Zahl glatter Abbildungen $f, g : M \to M$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\lambda(\mathrm{id}_M) = \chi(M)$.

(b) $\lambda(f \circ g) = \lambda(g \circ f)$.
(c) Sind f *und* g *glatt homotop, dann gilt* $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Beweis. Behauptung (a) ist offensichtlich, denn $\operatorname{tr}(\mathrm{id}_V) = \dim V$ für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V, siehe auch (I.4). Auch (b) ist offensichtlich, denn $\operatorname{tr}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{tr}(\psi \circ \varphi)$ für je zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi : V \to V$, siehe auch (I.5). Behauptung (c) folgt aus Satz I.2.5. □

I.7.21. Proposition. *Es sei* M *eine geschlossene orientierte glatte* n*-Mannigfaltigkeit,* a_i *eine graduierte Basis von* $H^*(M)$*, und* b^j *die dazu duale Basis von* $H^*(M)$*, dh.* $\int_M a_i \wedge b^j = \delta_i^j$*, vgl. Korollar I.5.18. Weiters sei* $f : M \to M$ *glatt und* $f_i^j \in \mathbb{R}$ *die Matrixdarstellung von* $f^* : H^*(M) \to H^*(M)$*, dh.* $f^*a_i = \sum_j f_i^j a_j$*. Für das Poincaré Dual des Graphen* $\eta_{G_f} \in H^n(M \times M)$*, siehe Beispiel I.7.10, gilt dann*

$$\eta_{G_f} = \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f_j^i \, p_1^* a_i \wedge p_2^* b^j,$$

wobei $p_1, p_2 : M \times M \to M$ *die beiden kanonischen Projektionen bezeichnen.*

Beweis. Nach Satz I.4.1 existieren $\eta_j^i \in \mathbb{R}$ mit $\eta_{G_f} = \sum_{i,j} \eta_j^i \, p_1^* a_i \wedge p_2^* b^j$. Es gilt nun η_j^i zu berechnen. Mit Bemerkung I.4.16 erhalten wir, für jedes k und l,

$$\begin{aligned}
\int_{M\times M} p_1^* b^k \wedge p_2^* a_l \wedge \eta_{G_f} &= \sum_{i,j} \eta_j^i \int_{M\times M} p_1^* b^k \wedge p_2^* a_l \wedge p_1^* a_i \wedge p_2^* b^j \\
&= \sum_{i,j} (-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|} \, \eta_j^i \int_{M\times M} p_1^*(a_i \wedge b^k) \wedge p_2^*(a_l \wedge b^j) \\
&= \sum_{i,j} (-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|} \, \eta_j^i \int_M p_1^*(a_i \wedge b^k) \int_M p_2^*(a_l \wedge b^j) \\
&= \sum_{i,j} (-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_i|} \, \eta_j^i \, \delta_i^k \, \delta_l^j = (-1)^{(|b^k|+|a_l|)|a_k|} \, \eta_l^k
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Definition des Poincaré Duals, siehe (I.38),

$$\begin{aligned}
\int_{M\times M} p_1^* b^k \wedge p_2^* a_l \wedge \eta_{G_f} &= \int_{G_f} p_1^* b^k \wedge p_2^* a_l = \int_M (\mathrm{id}_M, f)^*(p_1^* b^k \wedge p_2^* a_l) \\
&= \int_M b^k \wedge f^* a_l = \sum_j f_l^j \int_M b^k \wedge a_j = \sum_j (-1)^{|b^k||a_j|} f_l^j \delta_j^k = (-1)^{|b^k||a_k|} f_l^k,
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also $\eta_l^k = (-1)^{|a_l||a_k|} f_l^k = (-1)^{|a_k|} f_l^k$, wobei wir im letzten Gleichheitszeichen verwendet haben, dass f_l^k nur dann nicht-trivial sein kann, wenn $|a_k| = |a_l|$ gilt. □

I.7.22. Satz. *Ist* M *eine geschlossene orientierte glatte* n*-Mannigfaltigkeit,* $f : M \to M$ *glatt und bezeichnet* $\eta_{G_f} \in H^n(M \times M)$ *das Poincaré Dual des*

Graphen $G_f \subseteq M \times M$, siehe Beispiel I.7.10, dann gilt

$$\textstyle\int_\Delta \eta_{G_f} = \lambda(f),$$

wobei $\Delta \subseteq M \times M$ die Diagonale bezeichnet.

Beweis. Da $(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M) : M \to \Delta$ ein orientierungsbewahrender Diffeomorphismus ist folgt, mit der Notation aus Proposition I.7.21,

$$\begin{aligned}\int_\Delta \eta_{G_f} = \int_M (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)^* \eta_{G_f} &= \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \int_M (\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)^* (p_1^* a_i \wedge p_2^* b^j) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \int_M a_i \wedge b^j = \sum_{i,j} (-1)^{|a_i|} f^i_j \, \delta^j_i = \sum_i (-1)^{|a_i|} f^i_i \\ &= \sum_q (-1)^q \operatorname{tr}\bigl(H^q(M) \xrightarrow{f^*} H^q(M)\bigr) = \lambda(f),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

I.7.23. Korollar. *Ist M eine orientierte geschlossene glatte n-Mannigfaltigkeit und bezeichnet $\eta_\Delta \in H^n(M \times M)$ das Poincaré Dual der Diagonale $\Delta \subseteq M \times M$, dann gilt $\int_\Delta \eta_\Delta = \chi(M)$.*

Beweis. Die Diagonale ist der Graph der identischen Abbildung, $\Delta = G_{\mathrm{id}_M}$. Aus Satz I.7.22 erhalten wir somit $\int_\Delta \eta_\Delta = \lambda(\mathrm{id}_M) = \chi(M)$, siehe auch Proposition I.7.20(a). □

I.8. Abschließende Bemerkungen. Die de Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit ist in kanonischer Weise zu ihrer singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten isomorph. Wir wollen hier noch einen Beweis dieses Satzes von de Rham kurz skizzieren.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einem glatten q-Simplex verstehen wir eine glatte Abbildung $\sigma : \Delta^q \to M$, wobei $\Delta^q := \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\}$ den standard q-Simplex bezeichnet. Der Standardsimplex ist eine Mannigfaltigkeit mit Ecken, i.A. jedoch keine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Glattheit von σ meint, dass eine glatte Ausdehnung auf eine offene Umgebung von $\Delta^q \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$ existiert. Es bezeichne $S^\infty_q(M)$ die Menge aller glatten q-Simplizes in M, und $C^q_\infty(M; \mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller Abbildungen $S^\infty_q(M) \to \mathbb{R}$. Offensichtlich ist dies ein Teilkomplex des singulären Kokettenkomplexes, $C^*_\infty(M; \mathbb{R}) \subseteq C^*_{\text{sing.}}(M; \mathbb{R})$, wir bezeichnen seine Kohomologie mit $H^q_\infty(M; \mathbb{R})$. Jede glatte Abbildung $f : M \to N$ induziert offensichtlich eine Komplexabbildung $f^* : C^*_\infty(N; \mathbb{R}) \to C^*_\infty(M; \mathbb{R})$, und daher Abbildungen in der Kohomologie, $f^* : H^q_\infty(N; \mathbb{R}) \to H^q_\infty(M; \mathbb{R})$. Da die baryzentrische Unterteilung glatte Simplizes bewahrt haben wir auch für $H^*_\infty(M; \mathbb{R})$ eine Mayer–Vietoris Sequenz. Da die Kegelkonstruktion glatte Simplizes bewahrt induziert die Inklusion

$C^*_\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \to C^*_{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ Isomorphismen

$$H^q_\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = H^q_{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } q=0, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{I.39}$$

Ein Mayer–Vietoris Argument wie im Beweis von Satz I.4.1 oder Satz I.5.9 zeigt dann, dass die Inklusion in den singulären Kokettenkomplex, $C^*_\infty(M;\mathbb{R}) \to C^*_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R})$, für jedes M und q natürliche Isomorphismen

$$H^q_\infty(M;\mathbb{R}) = H^q_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R}) \tag{I.40}$$

induziert. Die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten kann daher mit glatten Simplizes berechnet werden.

Integration liefert lineare Abbildungen

$$\varphi : \Omega^q(M) \to C^q_\infty(M;\mathbb{R}), \quad \varphi(\alpha)(\sigma) := \int_{\Delta^q} \sigma^*\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M),\ \sigma \in S^\infty_q(M).$$

Aus dem Satz von Stokes (für Mannigfaltigkeiten mit Ecken) folgt, dass dies eine Komplexabbildung ist und daher Abbildungen in der Kohomologie induziert,

$$\varphi : H^q_{\text{de Rham}}(M) \to H^q_\infty(M;\mathbb{R}). \tag{I.41}$$

Diese sind offensichtlich natürlich, dh. mit den von glatten Abbildungen $f : M \to N$ induzierten Homomorphismen verträglich. Für $M = \mathbb{R}^n$ und jedes q ist (I.41) ein Isomorphismus, siehe (I.39). Eine einfache Überlegung zeigt, dass (I.41) auch mit den Einhängungshomomorphismen der Mayer–Vietoris Sequenzen verträglich ist. Mit einem Mayer–Vietoris Argument wie im Beweis von Satz I.4.1 oder Satz I.5.9 folgt dann, dass (I.41) für jedes M und q ein Isomorphismus ist. Zusammen mit (I.40) erhalten wir also einen natürlichen Isomorphismus zwischen der de Rham Kohomologie $H^*_{\text{de Rham}}(M)$ und der singulären Kohomologie $H^*_{\text{sing.}}(M;\mathbb{R})$.

I.9. Aufgaben zu Kapitel I.

1. Aufgabe. Es sei $M \neq \emptyset$ eine orientierbare kompakte n-Mannigfaltigkeit mir Rand ∂M. Zeige, dass ∂M nicht glatter Retrakt von M ist, dh. es existiert keine glatte Abbildung $r : M \to \partial M$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in \partial M$. Insbesondere ist also S^{n-1} nicht glatter Retrakt von D^n, $n \geq 1$. *Anleitung:* Nimm indirekt die Existenz einer solchen Abbildung r an, konstruiere eine Form $\alpha \in \Omega^{n-1}(\partial M)$ mit $\int_{\partial M} \alpha \neq 0$ und wende den Satz von Stokes, siehe [**3**, Abschnitt 4.8], auf $r^*\alpha$ an.

2. Aufgabe. Zeige folgende Version des Fixpunktsatzes von Brouwer. Jede glatte Abbildung $f : D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt, $n \geq 0$. *Anleitung:* O.B.d.A. sei $n \geq 1$. Gehe indirekt vor und nimm an f hätte keinen Fixpunkt. Betrachte die Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$ die jedem Punkt $x \in D^n$ den (eindeutigen) Schnittpunkt von S^{n-1} mit dem Halbstrahl $\{x + t(x - f(x)) : t \geq 0\}$

zuordnet. Zeige, dass r durch die Formel $r(x) := x + t(x)\big(x - f(x)\big)$ gegeben ist, wobei $t : D^n \to [0, \infty)$,

$$t(x) := \frac{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \sqrt{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle^2 + \big(1 - |x|^2\big)\big|f(x) - x\big|^2}}{\big|f(x) - x\big|^2}.$$

Schließe daraus, dass r glatt ist und leite einen Widerspruch zu Aufgabe 1 her.

3. Aufgabe. Zeige, dass glatt homotop zu sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Abbildungen $M \to N$ definiert, vgl. Bemerkung I.2.2. *Hinweis:* Für die Transitivität ist es hilfreich Homotopien mit $h(x, t) = h(x, 0)$ für $t \in [0, 1/3]$ und $h(x, t) = h(x, 1)$ für $t \in [2/3, 1]$ zu betrachten.

4. Aufgabe. Es seien $f_0 \simeq f_1 : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen und $g_0 \simeq g_1 : N \to P$ zwei weitere glatt homotope Abbildungen. Zeige, dass dann auch $g_0 \circ f_0$ glatt homotop zu $g_1 \circ f_1$ ist, vgl. Bemerkung I.2.3.

5. Aufgabe. Zeige, dass der Ausdruck $\int_0^1 \iota_t^* i_{\partial t} h^* \alpha \, dt$ im Beweis von Satz I.2.5 tatsächlich eine glatte Differentialform definiert.

6. Aufgabe. Zeige, dass die stereographische Projektion in Beispiel I.2.16 tatsächlich ein Diffeomorphismus $N^\perp \cong S^n \setminus \{N\}$ ist.

7. Aufgabe. Zeige, dass die Abbildung $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und beschreibe das Urbild $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, vgl. Beispiel I.2.17.

8. Aufgabe. Konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$, siehe Beispiel I.2.17.

9. Aufgabe. Es sei $N := [0 : 0 : 1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Zeige, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{N\}$ diffeomorph zum Möbiusband ist.

10. Aufgabe. Zeige, dass die Hopf Abbildung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ glatt ist und beschreibe das Urbild $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, vgl. Beispiel I.2.18.

11. Aufgabe. Konstruiere einen Diffeomorphismus $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$, vgl. Beispiel I.2.18.

12. Aufgabe. Zeige, dass die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Homotopieäquivalenz ist, vgl. Beispiel I.2.19.

13. Aufgabe. Zeige, dass die kanonische Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine glatte Homotopieäquivalenz ist, vgl. Beispiel I.2.19.

14. Aufgabe. Zeige, dass der Einhängungshomomorphismus in Satz I.3.11 tatsächlich linear ist.

15. Aufgabe. Zeige, dass die Aussage im Fünferlemma I.3.8 richtig bleibt, wenn das Diagramm nur bis auf Vorzeichen kommutiert.

16. Aufgabe. Betrachte die zusammenhängende glatte 2-Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Zeige, dass $H^1(M)$ unendlich dimensional ist.

17. Aufgabe. Berechne $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$.

18. Aufgabe. Zeige, dass die Betti Zahlen der beiden Mannigfaltigkeiten $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times S^{2n+2}$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1}$ übereinstimmen, diese jedoch nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht diffeomorph sind.

19. Aufgabe. Betrachte die glatte Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^5 \setminus (\mathbb{R}^2 \cup \{P\})$ wobei $P \in \mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^2$. Zeige $H^q(M) \cong \mathbb{R}$ für $q = 0, 2, 4$ und $H^q(M) = 0$ andernfalls, dh. M hat dieselben Betti Zahlen wie $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, vgl. Satz I.3.23. Zeige weiters $a \wedge a = 0$ für alle $a \in H^2(M)$, und schließe daraus, dass M nicht homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sein kann.

20. Aufgabe. Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit endlich dimensionaler Kohomologie. Zeige $p_{M \times N}(t) = p_M(t) \cdot p_N(t)$. *Hinweis:* Gehe wie im Beweis von Korollar I.4.9 vor.

21. Aufgabe. Führe die Details in Bemerkung I.4.16 aus. Zeige insbesondere, dass die Produktorientierung auf $M \times N$ wohldefiniert und glatt ist, und verifiziere $\int_{M \times N} p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta = \int_M \alpha \cdot \int_N \beta$ für alle $\alpha \in \Omega_c^m(M)$ und $\beta \in \Omega_c^n(N)$. *Hinweis:* Wähle Partitionen der Eins $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, von M und $\{\mu_j\}_{j \in J}$, von N, und verwende die Partition der Eins $\{(\lambda_i \circ p_1) \cdot (\mu_j \circ p_2)\}_{(i,j) \in I \times J}$, von $M \times N$ um das Integral über $M \times N$ zu berechnen.

22. Aufgabe. Es seien M und N zwei geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten gerader Dimension. Zeige $\sigma(M \times N) = 0$.

23. Aufgabe. Es seien M und N zwei geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension $4k$ bzw. $4l$. Zeige $\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N)$.

24. Aufgabe. Betrachte $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $f_n : S^1 \to S^1$, $f_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Zeige $\deg(f_n) = n$ auf zwei Arten, einmal mit Hilfe von Satz I.6.3 und einmal direkt aus der Definition, siehe (I.37).

25. Aufgabe. Berechne den Abbildungsgrad der Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, mit Hilfe von Satz I.6.3.

26. Aufgabe. Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Zeige, dass dann S auch Teilmannigfaltigkeit von N ist, vgl. Bemerkung I.7.1.

27. Aufgabe. Zeige, dass zwei glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : P \to N$ genau dann transversal sind, wenn die Abbildung $f \times g : M \times P \to N \times N$ transversal zur Diagonale $\Delta \subseteq N \times N$ ist, vgl. Bemerkung I.7.12. *Hinweis:* Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum und sind $V_0, V_1 \subseteq V$ zwei Teilräume dann gilt $V_0 + V_1 = V$ genau dann wenn $V_0 \times V_1 + D = V \times V$, wobei $D \subseteq V \times V$ den Teilraum $D := \{(v, v) \mid v \in V\}$ bezeichnet.

28. Aufgabe. Es sei $S \subseteq N$ eine geschlossene orientierte k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit in einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit N und M eine weitere geschlossene orientierte m-Mannigfaltigkeit. Es bezeichne $\eta_S \in H^{n-k}(N)$ das Poincaré Dual von $S \subseteq N$ und $\eta_{M\times S} \in H^{n-k}(M \times N)$ das Poincaré Dual von $M \times S \subseteq M \times N$. Zeige $\eta_{M\times S} = p_2^*\eta_S$, wobei $p_2 : M \times N \to N$ die kanonische Projektion bezeichnet. *Hinweis:* Zeige zuerst $\int_{M\times S} p_1^*a \wedge p_2^*b = \int_{M\times N} p_1^*a \wedge p_2^*b \wedge p_2^*\eta_S$, $a \in H^p(M)$, $b \in H^q(N)$, $p + q = m + k$, und verwendet das Künneth Theorem I.4.1 um daraus $\eta_{M\times S} = p_2^*\eta_S$ zu schließen.

29. Aufgabe. Zeige, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau dann orientierbar ist wenn $n = 0$ oder n ungerade ist, ohne dabei auf die hier nicht vollständig bewiesene Bemerkung I.5.17 zurückzugreifen. *Hinweis:* Zeige, dass die Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$ für ungerades n orientierungsbewahrend ist und schließe daraus, dass in diesem Fall auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau eine Orientierung existiert für die die kanonische Projektion $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein orientierungserhaltender lokaler Diffeomorphismus wird. Für gerades $n > 0$ verwende etwa Korollar I.5.20 und Beispiel I.3.15 oder Satz I.6.1(e).