$0 = \nabla(\lambda s) = \lambda\nabla s + d\lambda \otimes s$, also $(\nabla s)_x = 0$. Ist $U \subseteq M$ offen dann folgt aus der Lokalität, dass $(\nabla s)|_U \in \Gamma(T^*M \otimes E|_U)$ nur von $s|_U \in \Gamma(E|_U)$ abhängt, dh. ∇ schränkt sich zu einer kovarianten Ableitung $\nabla^{E|_U}$ auf $E|_U$ ein.

II.3.1. Beispiel. Ist $E = M \times V$ ein triviales Vektorbündel, so definiert $\nabla s := ds$, dh. $\nabla_X s = X \cdot s$, eine lineare Konnexion, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in C^\infty(M, V) = \Gamma(E)$. Diese wird als *triviale Konnexion* bezeichnet.

II.3.2. Beispiel. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit, dann bildet die in [**3**, Abschnitt 3.6] konstruierte Levi–Civita Ableitung ∇ eine kovariante Ableitung auf TM.

Wir definieren die Menge der E-wertigen q-Formen durch

$$\Omega^q(M; E) := \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes E).$$

Elemente von $\Omega^q(M; E)$ können kanonisch mit $C^\infty(M)$-multilinearen alternierenden Abbildungen $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$ identifiziert werden. Für $E = \xi^1 = M \times \mathbb{R}$ erhalten wir $\Omega^q(M; \xi^1) = \Omega^q(M)$ zurück. Beachte auch $\Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$. Ist $f : N \to M$ glatt, so definieren wir $f^* : \Omega^q(M; E) \to \Omega^q(N; f^*E)$,

$$(f^*\sigma)_x(Y_1, \ldots, Y_q) := \sigma_{f(x)}(T_x f \cdot Y_1, \ldots, T_x f \cdot Y_q), \qquad Y_i \in T_x N.$$

Beachte auch $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : \Omega^q(M; E) \to \Omega^q(M; g^*f^*E) = \Omega^q(M; (f \circ g)^*E)$ für jede weitere glatte Abbildung $g : P \to N$.

II.3.3. Proposition. *Jedes Vektorbündel besitzt lineare Konnexionen. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf E und $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{end}(E))$, dann ist auch $\nabla + A$ eine lineare Konnexion auf E. Jede weitere lineare Konnexion $\tilde\nabla$ auf E lässt sich als $\tilde\nabla = \nabla + A$ für ein eindeutig bestimmtes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$ schreiben, dh. $\tilde\nabla_X s = \nabla_X s + A(X)s$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$. Die Menge der linearen Konnexionen auf E bildet daher einen affinen Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$.*

Beweis. Um die Existenz einer linearen Konnexion auf E einzusehen, wählen wir Vektorbündelkarten $E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$ mit $\bigcup_i U_i = M$. Nach dem vorangehenden Beispiel existieren lineare Konnextionen $\nabla^{E|_{U_i}}$ auf den trivialen Vektorbündeln $E|_{U_i}$. Sei nun $\{\lambda_i\}$ eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Der offensichtlich lineare Operator

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E), \qquad \nabla s := \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}(s|_{U_i}),$$

bildet eine lineare Konnexion auf E, denn für $f \in C^\infty(M)$ folgt

$$\nabla(fs) = \sum_i \lambda_i \nabla^{E|_{U_i}}(fs|_{U_i}) = \sum_i \lambda_i f \nabla^{E|_{U_i}}(s|_{U_i}) + \lambda_i (df)s = f\nabla s + (df)s.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass für jedes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$ auch

$$\tilde{\nabla}_X s := \nabla_X s + A(X)s$$

eine lineare Konnexion auf E bildet. Sind umgekehrt ∇ und $\tilde{\nabla}$ zwei lineare Konnexionen, dann ist $A(X)s := \tilde{\nabla}_X s - \nabla_X s$ in beiden Variablen $C^\infty(M)$-linear und definiert daher einen Schnitt $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$. □

II.3.4. Proposition. *Ist E ein Vektorbündel über M, ∇ eine kovariante Ableitung auf E und $f : N \to M$ glatt, dann existiert auf dem Pullback Bündel f^*E genau eine kovariante Ableitung $\nabla^{f^*E} = f^*\nabla$, sodass*

$$\nabla^{f^*E}(f^*s) = f^*(\nabla s), \tag{II.5}$$

für alle $s \in \Gamma(E)$, dh. $\nabla^{f^*E}_Y(s \circ f) = \nabla_{T_y f \cdot Y} s$ für jedes $Y \in T_y N$. Zudem haben wir $f^*(\nabla + A) = f^*\nabla + f^*A$ für jedes $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$. Ist $g : P \to N$ glatt dann gilt weiters $\mathrm{id}_M^* \nabla = \nabla$ und $g^* f^* \nabla = (f \circ g)^* \nabla$ bis auf die kanonischen Isomorphismen $\mathrm{id}_M^* E = E$ und $g^* f^* E = (f \circ g)^* E$.

Beweis. Es sei $E|_U \cong U \times V$ eine Vektorbündelkarte, $\tilde{U} := f^{-1}(U)$ und $f^*E|_{\tilde{U}} \cong \tilde{U} \times V$ die entsprechende Vektorbündelkarte des Pullback Bündels. Nach Proposition II.3.3 existiert $A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(V))$, sodass $\nabla_X s = X \cdot s + A(X)s$, für alle $s \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, V)$ und $X \in T_x U$. Betrachte nun $\tilde{A} := f^*A \in \Omega^1(\tilde{U}, \mathrm{end}(V))$, $\tilde{A}(Y) = A(T_y f \cdot Y)$, $Y \in T_y \tilde{U}$. Es definiert dann

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{s} := Y \cdot \tilde{s} + \tilde{A}(Y)\tilde{s}, \qquad Y \in T_y \tilde{U},\ \tilde{s} \in \Gamma(f^*E|_{\tilde{U}}) = C^\infty(\tilde{U}, V)$$

eine kovariante Ableitung auf $f^*E|_{\tilde{U}}$. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Y(s \circ f) &= Y \cdot (s \circ f) + \tilde{A}(Y)(s \circ f)\\ &= (T_y f \cdot Y) \cdot s + A(T_y f \cdot Y)s(f(y)) = \nabla_{T_y f \cdot Y} s\end{aligned}$$

für alle $s \in \Gamma(E|_U) = C^\infty(U, V)$ und $Y \in T_y \tilde{U}$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass $\tilde{\nabla}$ die einzige kovariante Ableitung auf $f^*E|_{\tilde{U}}$ mit dieser Eigenschaft ist. Ist nun $E|_{U_i} \cong U_i \times V_i$ ein Vektorbündelatlas und bezeichnen $\tilde{\nabla}^i$ die eben konstruierten kovarianten Ableitungen auf $f^*E|_{f^{-1}(U_i)}$, dann müssen wegen der Eindeutigkeitsaussage oben, je zwei davon auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Diese $\tilde{\nabla}^i$ definieren daher eine kovariante Ableitung ∇^{f^*E} auf f^*E für die (II.5) gilt. Die verbleibenden Eigenschaften lassen sich nun leicht mit Hilfe der Eindeutigkeit zeigen. □

II.3.5. Beispiel. Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M und ist $f : N \to M$ eine konstante Abbildung $f(y) = x_0$, dann erhalten wir eine kanonische Trivialisierung $f^*E = N \times E_{x_0}$ und die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ auf f^*E stimmt mit der trivialen Konnexion überein.

II.3.6. Beispiel. Ist ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E über M, und Bezeichnet $\iota : U \to M$ die Inklusion einer offenen Teilmenge, dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus $\iota^*E = E|_U$ und die zurückgezogene Konnexion $\iota^*\nabla$ stimmt mit der Einschränkung $\nabla^{E|_U}$ überein.

Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und es bezeichne $\nabla^{p^*E} = p^*\nabla$ die induzierte Konnexion auf dem Pullback Bündel p^*E über E. Wir fassen die identische Abbildung auf E als $\mathbf{x} \in \Gamma(p^*E)$ auf und setzen $P^\nabla := \nabla^{p^*E}\mathbf{x} \in \Omega^1(E; p^*E) = \Gamma(T^*E \otimes p^*E)$. Für jeden Schnitt $s \in \Gamma(E)$ gilt

$$\nabla s = s^*(P^\nabla) \in \Omega^1(M; E) = \Omega^1(E; s^*p^*E), \tag{II.6}$$

denn $s^*P^\nabla = s^*\nabla^{p^*E}\mathbf{x} = \nabla^{s^*p^*E}s^*\mathbf{x} = \nabla s$, da ja $s^*p^*E = (p \circ s)^*E = \mathrm{id}_M^* E = E$, $s^*p^*\nabla = (p \circ s)^*\nabla = \mathrm{id}_M^* \nabla = \nabla$ und $s^*\mathbf{x} = s$, siehe Proposition II.3.4 oben. Fassen wir P^∇ mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus $p^*E = VE$, siehe Beispiel II.1.12, als Vektorbündelhomomorphismus $P^\nabla : TE \to VE \subseteq TE$ auf, dann wird P^∇ als *vertikale Projektion* bezeichnet, es gilt

$$P^\nabla \circ P^\nabla = P^\nabla \quad \text{und} \quad \mathrm{img}(P^\nabla) = VE. \tag{II.7}$$

Bezeichnet nämlich $\iota : E_x \to E$ die Inklusion einer Faser, dann folgt $\iota^*p^*E = (p\circ\iota)^*E = c_x^*E = E_x \times E_x$ und $\iota^*p^*\nabla = (p\circ\iota)^*\nabla = c_x^*\nabla = d$, siehe Beispiel II.3.5, folglich $\iota^*P^\nabla = \iota^*\nabla^{p^*E}\mathbf{x} = \nabla^{\iota^*p^*E}\iota^*\mathbf{x} = d\,\mathrm{id}_{E_x} = \mathrm{id}_{\iota^*E}$. Dies zeigt $P^\nabla|_{VE} = \mathrm{id}_{VE}$ und damit (II.7). Nach Proposition II.1.19 bildet daher $H^\nabla := \ker(P^\nabla) \subseteq TE$ ein zu VE komplementäres Teilbündel, $VE \oplus H^\nabla = TE$, das sogenannte *horizontale Bündel*. Zudem liefert die Einschränkung der Tangentialabbildung der Projektion $Tp : TE \to TM$ einen Isomorphismus $Tp : H^\nabla \cong p^*TM$.

II.3.7. Beispiel. Bezeichnet $\nabla = d$ die triviale Konnexion auf dem trivialen Vektorbündel $E = M \times V$, dann gilt $H^\nabla = \ker(Tp_2)$, wobei $p_2 : E \to V$ die kanonische Projektion bezeichnet.

II.3.8. Beispiel. Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel E über M und $f : N \to M$ glatt. Weiters bezeichne $\tilde f : f^*E \to E$ den kanonischen Vektorbündelhomomorphismus über f. Für das horizontale Bündel des Pullback Bündels gilt dann $H^{f^*\nabla} = (T\tilde f)^{-1}(H^\nabla)$ und $P^{f^*\nabla} = \tilde f^*P^\nabla$.

II.3.9. Bemerkung. Der von einer linearen Konnexion ∇ auf E induzierte Isomorphismus $p^*TM \cong H^\nabla$ erlaubt es Vektorfelder auf der Basis $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu Vektorfeldern $\tilde X := p^*X \in \Gamma(p^*TM) \cong \Gamma(H^\nabla) \subseteq \mathfrak{X}(E)$ am Totalraum zu liften. Dieses Vektorfeld $\tilde X \in \mathfrak{X}(E)$ wird als *horizontaler Lift* von X bezeichnet und ist durch seine Eigenschaften $Tp \circ \tilde X = X \circ p$ und $\tilde X(e) \in H_e^\nabla$, $e \in E$, eindeutig bestimmt. Der horizontale Lift ist i.A. nicht mit der Lie Klammer von Vektorfeldern verträglich, $\widetilde{[X,Y]} \neq [\tilde X, \tilde Y]$, wir werden dieses Phänomen in Abschnitt II.4 genauer untersuchen, siehe Proposition II.4.2 unten.

II.3.10. Bemerkung. Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Unter einem *Schnitt von E längs c* verstehen wir eine glatte Kurve $s : I \to E$, sodass $p \circ s = c$. Äquivalent kann ein Schnitt längs c als Schnitt des Pullback Bündels c^*E aufgefasst werden.

Die induzierte Konnexion auf c^*E erlaubt es daher Schnitte längs c kovariant abzuleiten, $\nabla^{c^*E}_{\partial_t}s$ ist ja wieder ein Schnitt längs c. Es ist üblich diese kovariante Ableitung mit $\nabla_{c'}s := \nabla^{c^*E}_{\partial_t}s$ zu bezeichnen. Beachte jedoch, dass $\nabla_{c'}s$ keine kovariante Ableitung im ursprünglichen Sinn darstellt, denn s ist ja kein Schnitt von E. Der entscheidende Punkt ist, dass für $\tilde{s} \in \Gamma(E)$ der Ausdruck

$$\nabla_{c'(t)}\tilde{s} = (\tilde{s}^*P^\nabla)(c'(t)) = P^\nabla(T\tilde{s}\cdot c'(t)) = P^\nabla((\tilde{s}\circ c)'(t)) = ((\tilde{s}\circ c)^*P^\nabla)(\partial_t)$$

nur von dem Schnitt $s = \tilde{s}\circ c$ längs c abhängt. Ist $s : I \to E$ ein Schnitt längs $c : I \to M$ und gilt $c'(t_0) \neq 0$, dann existiert $\tilde{s} \in \Gamma(E)$, sodass $\tilde{s}\circ c = s$ lokal um t_0, und nach (II.5) also $\nabla^{c^*E}_{\partial_t}s = \nabla_{c'}\tilde{s}$, wobei auf der rechten Seite nun die ursprüngliche kovariante Ableitung der Ausdehnung $\tilde{s}$ steht. Diese ist daher unabhängig von der Ausdehnung und rechtfertigt die Schreibweise $\nabla_{c'}s = \nabla^{c^*E}_{\partial_t}s$.

Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$, und es bezeichne $H^\nabla \subseteq TE$ das entsprechende horizontale Teilbündel. Weiters sei $s : I \to E$ ein Schnitt längs $c = p\circ s : I \to M$. Die Kurve s wird *horizontal* genannt, falls $s'(t) \in H^\nabla_{s(t)}$ für alle $t \in I$ gilt. Nach Proposition II.3.4 ist dies genau dann der Fall wenn s, aufgefasst als Schnitt von c^*E parallel ist, dh. $\nabla^{c^*E}s = 0$ oder äquivalent $\nabla^{c^*E}_{\partial_t}s = 0$. Mit der Notation von oben bedeutet dies $\nabla_{c'}s = 0$, dh. s ist parallel längs c.

II.3.11. Satz (Paralleltransport). *Es sei ∇ eine lineare Konnexion auf einem Vektorbündel $p : E \to M$. Weiters sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $c : I \to M$ eine glatte Kurve, $t_0 \in I$ und $e_0 \in E_{c(t_0)}$. Dann existiert eine eindeutige horizontale Kurve $s : I \to E$, sodass $p\circ s = c$ und $s(t_0) = e_0$. Diese Kurve s wird als* Paralleltransport von e_0 längs c *bezeichnet, wir schreiben dafür auch*

$$\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}, \qquad \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}(e_0) := s(t_1), \quad t_0, t_1 \in I.$$

Der Paralleltransport hat folgende Eigenschaften:

(a) $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} : E_{c(t_0)} \to E_{c(t_1)}$ *ist ein linearer Isomorphismus,* $t_0, t_1 \in I$.
(b) $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_0} = \mathrm{id}_{E_{c(t_0)}}$, $t_0 \in I$.
(c) $\mathrm{pt}^c_{t_2,t_1}\circ \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{t_2,t_0}$, $t_0, t_1, t_2 \in I$.
(d) $\mathrm{pt}^{c\circ\rho}_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{\rho(t_1),\rho(t_0)} : E_{c(\rho(t_0))} \to E_{c(\rho(t_1))}$, *für jede glatte Abbildung zwischen Intervallen* $\rho : J \to I$, $t_0, t_1 \in J$.
(e) Der Paralleltransport hängt glatt von c ab, dh. ist $h : N \times I \to M$ glatt dann liefert der Paralleltransport einen Vektorbündelisomorphismus $h_0^*E \cong h^*E$,

$$(x,t,v) \mapsto \mathrm{pt}^{h(x,-)}_{t,t_0} v, \qquad (x,t) \in N\times I,\ v \in h_0^*E_{(x,t)} = E_{h_0(x)} \tag{II.8}$$

wobei $h_0 : N \times I \to M$, $h_0(x) := h(x,t_0)$.

Beweis. Um die Existenz und Eindeutigkeit von s zu zeigen betrachten wir zunächst das lokale Problem. Sei also $E|_U \cong U \times V$ eine Vektorbündelkarte und $J \subseteq I$ ein Teilintervall mit $c(J) \subseteq U$. Nach Proposition II.3.3 existiert

$A \in \Omega^1(U; \mathrm{end}(V))$, sodass $\nabla^{E|_U} = d + A$. Fassen wir $s \in C^\infty(J, V)$ als Schnitt längs $c|_J : J \to U$ auf, so ist dieser genau dann horizontal, wenn

$$s'(t) + A(c'(t))s(t) = 0. \tag{II.9}$$

Dies ist eine gewöhnliche (nicht autonome) lineare Differentialgleichung erster Ordnung für s. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf besitzt diese Gleichung auf ganz J definierte eindeutige Lösungen zu jedem Anfangswert $s(t_0) = e_0$, $t_0 \in J$. Wegen der Eindeutigkeit folgt nun leicht, dass sich diese lokalen Lösungen zu einem globalen horizontalen Schnitt $s : I \to E$ längs c zusammenfügen lassen, $\nabla^{c^*E}_{\partial_t} s = \nabla_{c'} s = 0$, $p \circ s = c$, $s(t_0) = e_0$. Die Eigenschaft (b) ist trivialerweise erfüllt. Auch (c) folgt sofort aus der Eindeutigkeit des Paralleltransports. Daraus erhalten wir nun auch (a), denn $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_1} \circ \mathrm{pt}^c_{t_1,t_0} = \mathrm{pt}^c_{t_0,t_0,} = \mathrm{id}_{E_{c(t_0)}}$, also ist $\mathrm{pt}^c_{t_0,t_1}$ inverse zu $\mathrm{pt}^c_{t_1,t_0}$. Beachte auch, dass die Lösung s linear vom Anfangswert e_0 abhängt, denn aus $\nabla_{c'} s_1 = 0 = \nabla_{c'} s_2$ folgt $\nabla_{c'}(s_1 + s_2) = \nabla_{c'} s_1 + \nabla_{c'} s_2 = 0 + 0 = 0$. Behauptung (d) folgt aus (II.5), denn mit $\nabla^{c^*E} s = 0$ gilt aufgrund dieser Relation auch $\nabla^{(c\circ\rho)^*E}(s \circ \rho) = \nabla^{\rho^*c^*E}\rho^* s = \rho^*\nabla^{c^*E} s = \rho^* 0 = 0$, also ist $s \circ \rho$ der Paralleltransport längs $c \circ \rho$. Um (e) einzusehen, erinnern wir uns daran, dass die Lösungen der Differentialgleichung (II.9) glatt von den Koeffizienten $A(c'(t))$ und der Anfangsbedingung abhängen, und daher (II.8) ein glatter Vektorbündelhomomorphismus ist. Nach (a) ist dieser faserweise bijektiv, also ein Isomorphismus, siehe Proposition II.1.5. □

II.3.12. Bemerkung. Sind c_1 und c_2 zwei glatte Kurven von $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ nach $c_1(t_1) = c_2(t_1)$, dann wird der Paralleltransport längs c_1 i.A. vom Paralleltransport längs c_2 verschieden sein, $\mathrm{pt}^{c_1}_{t_1,t_0} \neq \mathrm{pt}^{c_2}_{t_1,t_0}$. Wir werden dieses Phänomen in Abschnitt II.4 genauer untersuchen, siehe Satz II.4.6 unten.

II.3.13. Korollar. *Ist E ein Vektorbündel über M und sind $f \simeq g : N \to M$ zwei homotope glatte Abbildungen, dann gilt $f^*E \cong g^*E$.*

Beweis. Wähle eine lineare Konnexion auf E, siehe Proposition II.3.3. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Abbildung $h : N \times I \to M$ mit $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$, $x \in N$. Nach Satz II.3.11(e) liefert der Paralleltransport einen Isomorphismus $h^*E \cong h_0^*E$, wobei $h_0 : N \times I \to M$, $h_0(x,t) := h(x, 0)$. Bezeichnen nun $\iota_0, \iota_1 : N \to N \times I$ die beiden Inklusionen $\iota_0(x) := (x, 0)$ und $\iota_1(x) := (x, 1)$, so folgt $g^*E = (h \circ \iota_1)^*E = \iota_1^* h^* E \cong \iota_1^* h_0^* E = (h_0 \circ \iota_1)^* E = f^*E$, denn offensichtlich gilt $h \circ \iota_1 = g$ und $h_0 \circ \iota_1 = f$. □

II.3.14. Korollar. *Über kontrahierbaren Mannigfaltigkeiten ist jedes Vektoründel trivilisierbar und insbesondere orientierbar.*

Beweis. Für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten M ist die identische Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung, $\mathrm{id}_M \simeq c_{x_0}$, $x_0 \in M$. Für jedes Vektorbündel E über M erhalten wir mittels Korollar II.3.13 einen Isomorphismus $E = \mathrm{id}_M^* E \cong c_{x_0}^* E$. Da $c_{x_0}^* E = M \times E_{x_0}$ trivialisierbar ist, siehe Beispiel II.3.5, folgt die Behauptung. □

II.3.15. Bemerkung. Es sei $s \in \Gamma(E)$, $x \in M$ und $X \in T_xM$. Weiters sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Dann gilt

$$\nabla_X s = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(\mathrm{pt}^c_{0,t}(s(c(t))) - s(x)\big),$$

siehe Aufgabe 42. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{1}{t}(s(c(t)) - s(x)$ keinen Sinn macht, denn $s(c(t)) \in E_{c(t)}$ und $s(x) \in E_x$ liegen in verschiedenen Vektorräumen.

Sind E und F zwei Vektorbündel über M mit linearen Konnexionen ∇^E und ∇^F, so erhalten wir eine *induzierte Konnexion* auf $E \oplus F$,

$$\nabla^{E\oplus F}_X(s \oplus t) := \nabla^E_X s \oplus \nabla^F_X t$$

wobei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$, $t \in \Gamma(F)$ und $s \oplus t \in \Gamma(E) \oplus \Gamma(F) = \Gamma(E \oplus F)$.

Ebenso erhalten wir eine induzierte Konnexion auf $\hom(E, F)$,

$$(\nabla^{\hom(E,F)}_X \phi)(s) = \nabla^F_X(\phi(s)) - \phi(\nabla^E_X s), \tag{II.10}$$

wobei $\phi \in \Gamma(\hom(E, F)) = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$. Beachte dazu, dass die rechte Seite $C^\infty(M)$-linear in den Variablen s und X ist, dh. $\nabla^{\hom(E,F)}\phi \in \Gamma(T^*M \otimes \hom(E, F))$, und auch die Leibniz Regel gilt, $\nabla^{\hom(E,F)}(f\phi) = f\nabla^{\hom(E,F)}\phi + df \otimes \phi$, $f \in C^\infty(M)$.

Insbesondere erhalten wir auf dem dualen Bündel $E' = \hom(E, \xi^1)$ eine lineare Konnexion $\nabla^{E'}$, sodass

$$(\nabla^{E'}_X \sigma)(s) = X \cdot (\sigma(s)) - \sigma(\nabla^E_X s), \tag{II.11}$$

wobei $\sigma \in \Gamma(E') = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), C^\infty(M))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$.

Mit Hilfe der kanonischen Indentifikation $E \otimes F = E'' \otimes F = \hom(E', F)$ erhalten wir auch eine induzierte Konnexion $\nabla^{E\otimes F}$ auf dem Vektorbündel $E \otimes F$. Dies ist die eindeutige lineare Konnexion auf $E \otimes F$, sodass

$$\nabla^{E\otimes F}_X(s \otimes t) = (\nabla^E_X s) \otimes t + s \otimes \nabla^F_X t, \tag{II.12}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ und $t \in \Gamma(F)$, denn für $\sigma \in \Gamma(E')$ gilt nach Definition der Konnexion auf $\hom(E', F)$, siehe (II.10) und (II.11),

$$\begin{aligned}
\big(\nabla^{E\otimes F}_X(s \otimes t)\big)(\sigma) &= \nabla^F_X((s \otimes t)(\sigma)) - (s \otimes t)(\nabla^{E'}_X \sigma) \\
&= \nabla^F_X(\sigma(s)t) - (\nabla^{E'}_X \sigma)(s)t \\
&= \sigma(s)\nabla^F_X t + (X \cdot \sigma(s))t - \big((X \cdot \sigma(s)) - \sigma(\nabla^E_X s)\big)t \\
&= \sigma(s)\nabla^F_X t + \sigma(\nabla^E_X s)t = \big((\nabla^E_X s) \otimes t + s \otimes \nabla^F_X t\big)(\sigma).
\end{aligned}$$

Beachte auch

$$X \cdot \mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\nabla^{\mathrm{end}(E)}_X \phi), \tag{II.13}$$

für $\phi \in \Gamma(\mathrm{end}(E))$, und

$$\nabla^{\hom(E,G)}_X(\psi\phi) = (\nabla^{\hom(F,G)}_X \psi)\phi + \psi(\nabla^{\hom(E,F)}_X \phi), \tag{II.14}$$

für alle $\phi \in \Gamma(\hom(E, F))$ und $\psi \in \Gamma(\mathrm{end}(F, G))$.

Insbesondere erhalten wir eine induzierte Konnexion auf $\otimes^l_k E$,

$$\begin{aligned}(\nabla^{\otimes^l_k E}_X \phi)(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l) = X\cdot(\phi(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l))\\ -\sum_{i=1}^k \phi(s_1,\dots,\nabla^E_X s_i,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\sigma_l)\\ -\sum_{j=1}^l \phi(s_1,\dots,s_k,\sigma_1,\dots,\nabla^{E'}_X\sigma_j,\dots,\sigma_l)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\nabla^{\otimes^l_k E}_X\big(\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\big)\\ =\sum_{i=1}^k \sigma_1\otimes\cdots\otimes(\nabla^{E'}_X\sigma_i)\otimes\ldots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\\ +\sum_{j=1}^l \sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes(\nabla^E_X s_j)\otimes\cdots\otimes s_l\end{aligned}$$

wobei $s_i\in\Gamma(E)$ und $\sigma_j\in\Gamma(E')$, siehe auch (II.11). Bezeichnet $\mathrm{tr}^j_i:\otimes^l_k E\to\otimes E^{l-1}_{k-1}$ die kanonische Kontraktion des i-ten mit dem $(k+j)$-ten Faktor,

$$\mathrm{tr}^j_i\big(\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_l\big)=\sigma_i(s_j)\sigma_1\otimes\cdots\hat{i}\cdots\otimes\sigma_k\otimes s_1\otimes\cdots\hat{j}\cdots\otimes s_l,$$

dann gilt

$$\mathrm{tr}^j_i(\nabla^{\otimes^l_k E}_X\phi)=\nabla^{\otimes^{l-1}_{k-1}E}_X(\mathrm{tr}^j_i(\phi)),\tag{II.15}$$

dh. tr^j_i ist parallel. Jede Permutation $\pi\in\mathfrak{S}_l$ liefert einen Vektorbündelisomorphismus $\psi_\pi:\otimes^l E\to\otimes^l E$, $\psi_\pi(s_1\otimes\cdots\otimes s_l)=s_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes s_{\pi(l)}$, für den offensichtlich

$$\psi_\pi(\nabla^{\otimes^l E}_X\phi)=\nabla^{\otimes^l E}_X(\psi_\pi(\phi)),\tag{II.16}$$

gilt, dh. jedes ψ_π ist parallel. Daraus folgt auch

$$\mathrm{alt}(\nabla^{\otimes^l E}_X\phi)=\nabla^{\otimes^l E}_X(\mathrm{alt}(\phi))\quad\text{und}\quad\mathrm{sym}(\nabla^{\otimes^l E}_X\phi)=\nabla^{\otimes^l E}_X(\mathrm{sym}(\phi)),\tag{II.17}$$

siehe Abschnitt II.1. Die kovariante Ableitung eines Schnitts $\phi\in\Gamma(\Lambda^l E)\subseteq\Gamma(\otimes^l E)$ hat daher wieder Werte in $\Lambda^l E$, dh. $\nabla_X\phi\in\Gamma(\Lambda^l E)\subseteq\Gamma(\otimes^l E)$. Wir erhalten so eine kovariante Ableitung auf $\Lambda^l E$, und analog eine auf $S^l E$. Beachte, dass auch der vom Hack Produkt induzierte Vektorbündelhomomorphismus $\Lambda^p E\otimes\Lambda^q E\to\Lambda^{p+q}E$ parallel ist, dh.

$$\nabla^{\Lambda^{p+q}E}_X(\sigma\wedge\tau)=(\nabla^{\Lambda^p E}_X\sigma)\wedge\tau+\sigma\wedge\nabla^{\Lambda^q E}_X\tau.\tag{II.18}$$

Aufgrund dieser Kompatibilitäten ist es üblich die induzierten Konnexionen auf $\otimes^l_k E$, $\Lambda^k E$ und $S^k E$ alle einfach wieder mit ∇ zu bezeichnen.

II.3.16. Bemerkung. Es sei $E \to M$ ein Vektorbündel, ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen und $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ der duale lokale Korahmen, $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$, siehe Bemerkung II.1.30. Für die kovarianten Ableitungen der s_i gilt dann

$$\nabla_X s_i = \sum_{j=1}^k \omega_i^j(X) s_j,$$

wobei $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$, $\omega_i^j(X) = \sigma^j(\nabla_X s_i)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$. Ist $t \in \Gamma(E|_U)$, dann gilt $t = \sum_{i=1}^k t^i s_i$ mit $t^i = \sigma^i(t) \in C^\infty(U)$, und daher $\nabla_X t = \sum_{i=1}^k (\nabla_X t)^i s_i$ mit

$$(\nabla_X t)^i = \sigma^i(\nabla_X t) = X \cdot t^i + \sum_{j=1}^k \omega_j^i(X) t^j.$$

Sind einmal die sogenannten *Konnexionsformen* ω_j^i bestimmt, dann können wir also leicht beliebige Schnitte kovariant ableiten. Fassen wir die Komponenten $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^k)^t$ und $\nabla \mathbf{t} = ((\nabla t)^1, \dots, (\nabla t)^k)^t$ als Spaltenvektoren mit Eintragungen in $C^\infty(U)$ bzw. $\Omega^1(U)$ auf, und betrachten wir $\mathbf{w} = (\omega_j^i)$ als $(k \times k)$-Matrix mit Eintragungen in $\Omega^1(U)$, dann lässt sich obige Relation kurz als

$$\nabla_X \mathbf{t} = X \cdot \mathbf{t} + \mathbf{w}(X)\mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \nabla \mathbf{t} = d\,\mathbf{t} + \mathbf{w}\,\mathbf{t} \tag{II.19}$$

schreiben, $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Ist $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k \in \Gamma(E|_U)$ ein weiterer lokaler Rahmen und $\mathbf{h} = (h_i^j)$ die Matrix zum Rahmenwechsel, $s_i = \sum_{j=1}^k h_i^j \tilde{s}_j$, siehe Bemerkung II.1.30, dann folgt

$$\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k h_l^j \omega_i^l(X) \tilde{s}_j = \sum_{l=1}^k \omega_i^l(X) s_l = \nabla_X s_i = \sum_{j=1}^k \Big(X \cdot h_i^j + \sum_{l=1}^k \tilde{\omega}_l^j(X) h_i^l \Big) \tilde{s}_j,$$

wobei $\tilde{\omega}_i^j(X) = \tilde{\sigma}^j(\nabla_X \tilde{s}_i)$ die Konnexionsformen bezüglich des Rahmens $\tilde{s}_i$ bezeichnen, $\nabla_X \tilde{s}_i = \sum_{j=1}^k \tilde{\omega}_i^j(X) \tilde{s}_j$. Es gilt daher

$$\sum_{l=1}^k h_l^j \omega_i^l = dh_i^j + \sum_{l=1}^k \tilde{\omega}_l^j h_i^l,$$

bzw. mittels Matrizenschreibweise $\mathbf{h}\mathbf{w} = d\,\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{h}$ oder äquivalent

$$\mathbf{w} = \mathbf{h}^{-1} d\,\mathbf{h} + \mathbf{h}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{h}, \tag{II.20}$$

wobei $\mathbf{h}^{-1}$ die zu $\mathbf{h}$ inverse Matrix bezeichnet.

II.4. Krümmung. Sind E und F zwei Vektorbündel über M so induziert der Vektorbündelhomomorphismus

$$(\Lambda^p T^*M \otimes E) \otimes (\Lambda^q T^*M \otimes F) \xrightarrow{\wedge \otimes \mathrm{id}} \Lambda^{p+q} T^*M \otimes (E \otimes F)$$

ein $C^\infty(M)$-bilineares Hack Produkt

$$\Omega^p(M; E) \times \Omega^q(M; F) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; E \otimes F). \tag{II.21}$$

Explizit ist dies durch folgende Formel gegeben, vgl. [**3**, Abschnitt 4.3],

$$(\sigma \wedge \tau)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \sigma(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}) \otimes \tau(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})$$

wobei $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Omega^p(M; E)$ und $\tau \in \Omega^q(M; F)$. Beachte, dass (II.21) assotiativ ist, dh. $(\phi \wedge \psi) \wedge \rho = \phi \wedge (\psi \wedge \rho)$ bis auf die kanonische Identifikation $\Omega^{p+q+r}(M; (E \otimes F) \otimes G) = \Omega^{p+q+r}(M; E \otimes (F \otimes G))$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M; E) := \bigoplus_q \Omega^q(M; E)$ zu einem graduierten Modul über $\Omega^*(M)$, denn $\Omega^*(M) = \Omega^*(M; \xi^1)$ und $\xi^1 \otimes E = E$. Zudem erhalten wir eine $C^\infty(M)$-bilineare Multiplikation

$$\Omega^p(M; \hom(F, G)) \times \Omega^q(M; \hom(E, F)) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(E, G)), \tag{II.22}$$

indem wir (II.21),

$$\Omega^p(M; \hom(F, G)) \otimes \Omega^q(M; \hom(E, F)) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(F, G) \otimes \hom(E, G)),$$

noch mit der faserweisen Komposition $\hom(F, G) \otimes \hom(E, F) \to \hom(E, G)$ zusammensetzen. Explizit gilt

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \phi(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})\big(\psi(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})(s)\big)$$

wobei $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Omega^p(M; \hom(F, G))$, $\psi \in \Omega^q(M; \hom(E, F))$ und $s \in \Gamma(E)$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M; \operatorname{end}(E))$ zu einer assotiativen i.A. jedoch *nicht* (graduiert) kommutativen Algebra. Beachte auch, dass der Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{tr} : \operatorname{end}(E) \to \xi^1$ eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung

$$\operatorname{tr} : \Omega^q(M; \operatorname{end}(E)) \to \Omega^q(M) \tag{II.23}$$

induziert, $(\operatorname{tr} \phi)(X_1, \dots, X_q) = \operatorname{tr}(\phi(X_1, \dots, X_q))$, für die

$$\operatorname{tr}(\phi \wedge \psi) = (-1)^{pq} \operatorname{tr}(\psi \wedge \phi) \tag{II.24}$$

gilt, wobei $\phi \in \Omega^p(M; \operatorname{end}(E))$ und $\psi \in \Omega^q(M; \operatorname{end}(E))$. Schließlich haben wir eine $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung

$$\Omega^p(M; \hom(E, F)) \times \Omega^q(M; E) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; F), \tag{II.25}$$

wobei wir (II.21), $\Omega^p(M; \hom(E, F)) \times \Omega^q(M; E) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M; \hom(E, F) \otimes E)$, noch mit der faserweisen Evaluation $\hom(E, F) \otimes E \to F$ zusammensetzen, dh.

$$(\phi \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\pi)\, \phi(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})\big(\sigma(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})\big),$$

$X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Omega^p(M; \hom(E, F))$ und $\sigma \in \Omega^q(M; E)$. Insbesondere wird dadurch $\Omega^*(M; E)$ ein Modul über der Algebra $\Omega^*(M; \mathrm{end}(E))$,

II.4.1. Proposition. *Jede lineare Konnexion auf E,*

$$\Omega^0(M; E) = \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(M; E),$$

lässt sich auf eindeutige Weise zu einem linearen Operator

$$d^\nabla : \Omega^q(M; E) \to \Omega^{q+1}(M; E)$$

ausdehnen, sodass die graduierte Leibniz Regel

$$d^\nabla(\alpha \wedge \sigma) = d\alpha \wedge \sigma + (-1)^p \alpha \wedge d^\nabla \sigma \tag{II.26}$$

für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M; E)$ gilt. Für $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ haben wir weiters

$$\begin{aligned}(d^\nabla \sigma)(X_0, \dots, X_q) = \sum_i (-1)^i \nabla_{X_i}(\sigma(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_q)) \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, X_q).\end{aligned} \tag{II.27}$$

Diese Ausdehnung d^∇ hat folgende Eigenschaften, $\sigma \in \Omega^*(M; E)$, $\tau \in \Omega^*(M; F)$, $\phi \in \Omega^*(M; \hom(E, F))$ und $\psi \in \Omega^*(M; \hom(F, G))$:

(a) $d^{\nabla + A}\sigma = d^\nabla \sigma + A \wedge \sigma$, für alle $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$.
(b) $d^{f^*\nabla}(f^*\sigma) = f^*(d^\nabla \sigma)$, für alle glatten $f : N \to M$.
(c) $d^{\nabla^{E \oplus F}}(\sigma \oplus \tau) = d^{\nabla^E}\sigma \oplus d^{\nabla^F}\tau$.
(d) $d^{\nabla^{E \otimes F}}(\sigma \wedge \tau) = d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau$, siehe (II.21).
(e) $d\,\mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}}\phi)$, siehe (II.23).
(f) $d^{\nabla^F}(\phi \wedge \sigma) = (d^{\nabla^{\hom(E,F)}}\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge d^{\nabla^E}\sigma$, siehe (II.25).
(g) $d^{\nabla^{\hom(E,G)}}(\psi \wedge \phi) = (d^{\nabla^{\hom(F,G)}}\psi) \wedge \phi + (-1)^{|\psi|}\psi \wedge d^{\nabla^{\hom(E,F)}}\phi$, siehe (II.22).

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sei also $\tilde{d}^\nabla$ eine weitere lineare Ausdehnung von ∇ die auch der Leibniz Regel (II.26) genügt. Die Differenz $\tilde{d}^\nabla - d^\nabla$ verschwindet dann auf $\Omega^0(M; E)$. Aufgrund der Leibniz Regeln gilt darüberhinaus $(\tilde{d}^\nabla - d^\nabla)(\alpha \wedge \sigma) = (-1)^p \alpha \wedge (\tilde{d}^\nabla - d^\nabla)(\sigma)$, für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M; E)$. Da sich jedes Element aus $\Omega^q(M; E)$ lokal als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha \wedge \sigma$, $\alpha \in \Omega^q(M)$, $\sigma \in \Omega^0(M; E)$, schreiben lässt folgt nun aus der Linearität $\tilde{d}^\nabla - d^\nabla = 0$, es kann daher höchstens eine solche Ausdehnung d^∇ geben.

Nun zur Existenz der Ausdehnung. Eine einfache Rechnung, vgl. [**3**, Abschnitt 4.4], zeigt, dass die rechte Seite von (II.27) in den Vektorfeldern X_i alternierend und $C^\infty(M)$-multilinear ist. Diese Formel definiert daher einen linearen Operator $d^\nabla : \Omega^q(M; E) \to \Omega^{q+1}(M; E)$. Offensichtlich stimmt $d^\nabla : \Omega^0(M; E) \to$

$\Omega^1(M;E)$ mit ∇ überein. Für $f \in C^\infty(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M;E)$ folgt

$$\begin{aligned}\big(d^\nabla(f\sigma) - f d^\nabla\sigma\big)(X_0,\dots,X_q) &= \sum_i (-1)^i df(X_i)\sigma(X_0,\dots,\hat{i},\dots,X_q)\\ &= (df\wedge\sigma)(X_0,\dots,X_q),\end{aligned}$$

dh. (II.26) gilt für $\alpha \in \Omega^0(M)$. Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass (II.26) auch für $\alpha \in \Omega^1(M)$ gültig ist. Der allgemeine Fall folgt nun daraus, dass sich jedes Element aus $\Omega^q(M;E)$ lokal als endlich Summe von Schnitten der Form $\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_q\wedge\sigma$ schreiben lässt, wobei $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ und $\sigma \in \Omega^0(M;E)$.

Aus (II.27) erhalten wir sofort (a), denn

$$\begin{aligned}\big(d^{\nabla+A}\sigma - d^\nabla\sigma\big)(X_0,\dots,X_k) &= \sum_i (-1)^i A(X_i)\sigma(X_0,\dots,\hat{i},\dots,X_k)\\ &= (A\wedge\sigma)(X_0,\dots,X_k).\end{aligned}$$

Behauptung (b) ist für 0-Formen $\sigma \in \Omega^0(M;E)$ richtig, siehe (II.5). Aus der Leinbiz Regel folgt weiters

$$d^{f^*\nabla}(f^*(\alpha\wedge\sigma)) - f^*(d^\nabla(\alpha\wedge\sigma)) = (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\Big(d^{f^*\nabla}(f^*\sigma) - f^*(d^\nabla\sigma)\Big)$$

und damit der allgemeine Fall von (b), denn lokal lässt sich jedes Element von $\Omega^q(M;E)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha\wedge\sigma$ schreiben, wobei $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\sigma \in \Omega^0(M;E)$. Behauptung (c) ist trivial. Um (d) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass diese Relation für $\sigma \in \Omega^0(M;E)$ richtig ist, siehe (II.12). Weiters haben wir aufgrund der Leibniz Regeln

$$\begin{aligned}&d^{\nabla^{E\otimes F}}\big((\alpha\wedge\sigma)\wedge(\beta\wedge\tau)\big) - d^{\nabla^E}(\alpha\wedge\sigma)\wedge(\beta\wedge\tau) - (-1)^{|\alpha\wedge\sigma|}(\alpha\wedge\sigma)\wedge d^{\nabla^F}(\beta\wedge\tau)\\ &\quad= (-1)^{|\alpha|+|\beta|+|\sigma||\beta|}\alpha\wedge\beta\wedge\Big(d^{\nabla^{E\otimes F}}(\sigma\wedge\tau) - d^{\nabla^E}\sigma\wedge\tau - (-1)^{|\sigma|}\sigma\wedge d^{\nabla^F}\tau\Big).\end{aligned}$$

Da sich lokal jedes Element aus $\Omega^*(M;E)$ als endliche Summe von Schnitten der Form $\alpha\wedge\sigma$, schreiben lässt, $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\sigma \in \Omega^0(M;E)$, folgt nun (d). Auch (e) ist für $\phi \in \Omega^0(M;\operatorname{end}(E))$ gültig, siehe (II.13). Wegen der Leibnizregeln gilt weiters

$$d\operatorname{tr}(\alpha\wedge\phi) - \operatorname{tr}(d^{\nabla^{\operatorname{end}(E)}}(\alpha\wedge\phi)) = (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\Big(d\operatorname{tr}(\phi) - \operatorname{tr}(d^{\nabla^{\operatorname{end}(E)}}\phi)\Big)$$

woraus nun wie oben (e) folgt. Die Behauptungen (f) und (g) lassen sich analog zeigen, für 0-Formen sind dies gerade die Relationen (II.10) bzw. (II.14). □

II.4.2. Proposition. *Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ eine lineare Konnexion auf E. Dann existiert genau eine Form $R^\nabla \in \Omega^2(M;\operatorname{end}(E))$, sodass*

$$d^\nabla d^\nabla\sigma = R^\nabla\wedge\sigma, \qquad \sigma\in\Omega^*(M;E), \tag{II.28}$$

wobei auf der rechten Seite das Hack Produkt aus (II.25) *gemeint ist. Diese Form* R^∇ *wird die* Krümmung *von* ∇ *genannt, und ist durch*

$$R^\nabla_{X,Y}s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \ s \in \Gamma(E), \tag{II.29}$$

eindeutig bestimmt. Die Krümmung hat darüber hinaus folgende Eigenschaften:
(a) $d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}} R^\nabla = 0 \in \Omega^3(M; \mathrm{end}(E))$. *(Biancchi Identität)*
(b) $R^{f^*\nabla} = f^*R^\nabla \in \Omega^2(N; \mathrm{end}(f^*E)) = \Omega^2(N; f^*\mathrm{end}(E))$ *für* $f : N \to M$ *glatt.*
(c) $R^{\nabla+A} = R^\nabla + d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}} A + A \wedge A$ *für alle* $A \in \Omega^1(M; \mathrm{end}(E))$.
(d) $R^{\nabla^{E\oplus F}} = R^{\nabla^E} \oplus R^{\nabla^F} \in \Omega^2(M; \mathrm{end}(E) \oplus \mathrm{end}(F)) \subseteq \Omega^2(M; \mathrm{end}(E \oplus F))$.
(e) $R^{\nabla^{E\otimes F}} = R^{\nabla^E} \otimes \mathrm{id}_F + \mathrm{id}_E \otimes R^{\nabla^F}$.

Beweis. Aus der Leibniz Regel (II.26) folgt für $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\sigma \in \Omega^q(M; E)$

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla(\alpha \wedge \sigma) &= d^\nabla\big(d\alpha \wedge \sigma + (-1)^p \alpha \wedge d^\nabla\sigma\big) \\ &= dd\alpha \wedge \sigma + (-1)^{p+1} d\alpha \wedge d^\nabla\sigma + (-1)^p d\alpha \wedge d^\nabla\sigma + (-1)^p(-1)^p \alpha \wedge d^\nabla d^\nabla\sigma \\ &= \alpha \wedge d^\nabla d^\nabla\sigma. \end{aligned} \tag{II.30}$$

Insbesondere ist $d^\nabla d^\nabla : \Omega^0(M; E) \to \Omega^2(M; E)$ tensoriell, dh. $C^\infty(M)$-linear. Es existiert daher eine eindeutige Form $R^\nabla \in \Omega^2(M; \mathrm{end}(E))$, sodass

$$(d^\nabla d^\nabla s)(X, Y) = R^\nabla_{X,Y}s, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \ s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M; E). \tag{II.31}$$

Nach (II.27) ist dies zu (II.29) äquivalent. Zusammen mit (II.30) folgt nun auch (II.28). Nach Proposition II.4.1(f) und (II.28) gilt für alle $\sigma \in \Omega^*(M; E)$,

$$(d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}} R^\nabla) \wedge \sigma = d^\nabla(R^\nabla \wedge \sigma) - R^\nabla \wedge d^\nabla\sigma = d^\nabla(d^\nabla d^\nabla\sigma) - d^\nabla d^\nabla(d^\nabla\sigma) = 0,$$

woraus sofort (a) folgt. Aus Proposition II.4.1(b) und (II.28) erhalten wir

$$d^{\nabla^{f^*E}} d^{\nabla^{f^*E}}(f^*\sigma) = d^{\nabla^{f^*E}}(f^*d^\nabla\sigma) = f^*d^\nabla d^\nabla\sigma = f^*(R \wedge \sigma) = f^*R^\nabla \wedge f^*\sigma$$

und somit (b). Behauptung (c) folgt aus Proposition II.4.1(a)&(f), denn

$$\begin{aligned} d^{\nabla+A} d^{\nabla+A}\sigma &= d^\nabla(d^\nabla\sigma + A \wedge \sigma) + A \wedge (d^\nabla\sigma + A \wedge \sigma) \\ &= d^\nabla d^\nabla\sigma + d^\nabla(A \wedge \sigma) - (-1)^1 A \wedge d^\nabla\sigma + (A \wedge A) \wedge \sigma \\ &= (R^\nabla + d^{\nabla^{\mathrm{end}(E)}} A + A \wedge A) \wedge \sigma. \end{aligned}$$

Behauptung (d) ist trivial, sie folgt sofort aus Proposition II.4.1(c). Schließlich erhalten wir mittels Proposition II.4.1(d), $\sigma \in \Omega^*(M; E)$, $\tau \in \Omega^*(M; F)$,

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{E\otimes F}} d^{\nabla^{E\otimes F}}(\sigma \wedge \tau) &= d^{\nabla^E} d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} d^{\nabla^E}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau \\ &\qquad + (-1)^{|d^{\nabla^E}\sigma|} d^{\nabla^E}\sigma \wedge d^{\nabla^F}\tau + (-1)^{|\sigma|}(-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge d^{\nabla^F} d^{\nabla^F}\tau \\ &= d^{\nabla^E} d^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + \sigma \wedge d^{\nabla^F} d^{\nabla^F}\tau \\ &= R^{\nabla^E}\sigma \wedge \tau + \sigma \wedge R^{\nabla^F}\tau = \big(R^{\nabla^E} \otimes \mathrm{id}_F + \mathrm{id}_E \otimes R^{\nabla^F}\big)(\sigma \wedge \tau) \end{aligned}$$