

III. Riemannsche Geometrie

III.1. Levi–Civita Konnexion und Riemannkrümmung. Unter einer *Riemannschen Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Euklidische Metrik auf dem Tangentialbündel, $g \in \Gamma(S^2T^*M)$, vgl. Abschnitt II.5. Eine Riemannsche Metrik spezifiziert also ein positiv definites symmetrisches inneres Produkt auf jedem Tangentialraum T_xM , $x \in M$, und erlaubt es daher Längen und Winkel von Tangentialvektoren zu messen. Unter einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g . Auf einer orientierten Riemannschen n -Mannigfaltigkeit erhalten wir eine kanonische Volumensform, $\text{vol} \in \Omega^n(M)$, in dem wir $\text{vol}(X_1, \dots, X_n) = 1$ für eine (und dann jede) positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM fordern, $x \in M$.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten besitzen eine ausgezeichnete lineare Konnexion, die sogenannte *Levi–Civita Konnexion*, auf ihrem Tangentialbündel. Um die Bedingung, die diese Konnexion charakterisiert zu formulieren benötigen wir den Begriff der Torsion einer linearen Konnexion auf dem Tangentialbündel. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf TM , so definiert

$$\text{Tor}^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) \quad (\text{III.1})$$

einen Schnitt $\text{Tor}^\nabla \in \Omega^2(M; TM)$, denn der Ausdruck (III.1) ist offensichtlich schiefsymmetrisch und $C^\infty(M)$ linear in X und Y . Dieses Tensorfeld wird als *Torsion* der Konnexion ∇ bezeichnet. Eine lineare Konnexion auf TM wird *torsionsfrei* genannt, wenn der Torsionstensor verschwindet, dh. $\text{Tor}^\nabla(X, Y) = 0$ für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

III.1.1. PROPOSITION (Levi–Civita Konnexion). *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert genau eine torsionsfreie mit g kompatible lineare Konnexion ∇ auf TM , dh. $\text{Tor} = 0$ und $\nabla g = 0$. Diese Konnexion wird die Levi–Civita Konnexion der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) genannt. Sie ist daher durch die Bedingungen*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (\text{III.2})$$

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (\text{III.3})$$

für je drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, eindeutig charakterisiert.

BEWEIS. Wir schreiben die Bedingung $\nabla g = 0$, siehe (III.3), drei mal an:

$$0 = (\nabla_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

$$0 = (\nabla_Y g)(Z, X) = Y \cdot g(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X)$$

$$0 = -(\nabla_Z g)(X, Y) = -Z \cdot g(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Da g symmetrisch ist, erhalten wir durch Aufaddieren dieser drei Gleichungen unter Verwendung von (III.2)

$$\begin{aligned} 0 &= X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y) \\ &\quad - g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \\ &= X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y) - 2g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \left(X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y) \right. \\ &\quad \left. + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Da g nichtdegeneriert ist, sehen wir daraus bereits, dass es höchstens eine torsionsfreie mit g kompatible Konnexion auf TM geben kann. Um auch die Existenz einzusehen, versuchen wir $\nabla_X Y$ durch (III.4) zu definieren. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die rechte Seite dieser Gleichung $C^\infty(M)$ linear in Z ist. Wegen der Nichtdegeneriertheit von g definiert (III.4) also eine, offensichtlich bilineare Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$. Analoge Rechnungen zeigen, dass $\nabla_X Y$ auch $C^\infty(M)$ linear in X ist, und die Leibnitz Regel $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Z$ gilt. Zusammenfassend sehen wir also, dass (III.4) eine lineare Konnexion ∇ auf TM definiert. Es bleibt also noch zu zeigen, dass diese Konnexion ∇ tatsächlich torsionsfrei und mit g kompatibel ist. Aus (III.4) erhalten wir sofort

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X, Y], Z),$$

also $g(\text{Tor}(X, Y), Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) = 0$ für jedes $Z \in \mathfrak{X}(M)$, und daher $\text{Tor}(X, Y) = 0$. Schließlich folgt aus (III.4) auch

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = X \cdot g(Y, Z),$$

also $(\nabla_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, und somit $\nabla g = 0$. \square

Unter dem *Riemannschen Krümmungstensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir die Krümmung, siehe Proposition II.4.2, der Levi-Civita Konnexion, dh.

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (\text{III.5})$$

III.1.2. PROPOSITION. *Der Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt folgende Symmetrien, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

- (a) $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$
- (b) $g(R_{X,Y}Z, W) = -g(R_{X,Y}W, Z)$
- (c) $g(R_{X,Y}Z, W) = g(R_{Z,W}X, Y)$
- (d) $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$ (algebraische Bianchi Identität)

(e) $0 = d^{\nabla^{\text{end}(TM)}} R \in \Omega^3(M; \text{end}(TM))$, dh.

$$0 = \sum_{\text{zykl. } X, Y, Z} \nabla_X^{\text{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z} \quad (\text{III.6})$$

oder äquivalent

$$0 = \sum_{\text{zykl. } X, Y, Z} (\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R)(Y, Z). \quad (\text{III.7})$$

Diese Relation wird zweite oder differentielle Bianchi Identität genannt.

BEWEIS. Die erste Symmetrie (a) ist offensichtlich. Aus Proposition II.5.6(b) erhalten wir (b), denn $\nabla g = 0$. Die Bianchi Identität $d^{\nabla^{\text{end}(TM)}} R = 0$ haben wir allgemeiner in Proposition II.4.2(a) gezeigt, die Reformulierung (III.6) erhalten wir sofort mittels (II.27). Nach Abschnitt II.3 gilt

$$(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R)(Y, Z) = \nabla_X^{\text{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} - R_{Y, \nabla_X Z}$$

und wegen der Torsionsfreiheit, $\nabla_X Z = \nabla_Z X - [Z, X]$, daher

$$(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R)(Y, Z) = \nabla_X^{\text{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} + R_{\nabla_Z X, Y} - R_{[Z, X], Y}.$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefert

$$\sum_{\text{zykl. } X, Y, Z} (\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R)(Y, Z) = \sum_{\text{zykl. } X, Y, Z} \nabla_X^{\text{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z},$$

somit folgt (III.7) aus (III.6). Um (d) einzusehen, verwenden wir die Torsionsfreiheit und schreiben R in folgender Form an:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X, Y] - [[X, Y], Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_Z \nabla_Y X - [[X, Y], Z] \end{aligned}$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefern nun

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = - \sum_{\text{zykl. } X, Y, Z} [[X, Y], Z] = 0,$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Jacobi Identität verwendet haben. Um (c) einzusehen, schreiben wir (d) viermal an:

$$\begin{aligned} 0 &= g(R_{X,Y}Z, W) + g(R_{Y,Z}X, W) + g(R_{Z,X}Y, W) \\ 0 &= g(R_{Y,Z}W, X) + g(R_{Z,W}Y, X) + g(R_{W,Y}Z, X) \\ 0 &= -g(R_{Z,W}X, Y) - g(R_{W,X}Z, Y) - g(R_{X,Z}W, Y) \\ 0 &= -g(R_{W,X}Y, Z) - g(R_{X,Y}W, Z) - g(R_{Y,W}X, Z) \end{aligned}$$

Aufaddieren liefert, unter Verwendung von (a) und (b),

$$0 = 2g(R_{X,Y}Z, W) - 2g(R_{Z,W}X, Y)$$

und somit (c). \square

III.1.3. SATZ. Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sind äquivalent:

(a) $R = 0$, dh. die Levi-Civita Konnexion ist flach.

(b) Lokal um jeden Punkt existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$g = du^1 \otimes du^1 + \cdots + du^n \otimes du^n, \quad (\text{III.8})$$

dh. (M, g) ist lokal isometrisch zu \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik.

In diesem Fall wird die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) flach genannt.

BEWEIS. Die Implikation (b) \Rightarrow (a) ist trivial, siehe Beispiel III.1.10. Für die umgekehrten Implikation (a) \Rightarrow (b) fixieren wir $x \in M$. Nach Satz II.4.6 existiert eine offene Umgebung U von x und ein lokaler Rahmen $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ paralleler Vektorfelder, $\nabla X_i = 0$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $X_1(x), \dots, X_n(x)$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$ bilden. Aus $\nabla g = 0$ folgt

$$Y \cdot g(X_i, X_j) = g(\nabla_Y X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_Y X_j) = 0 + 0 = 0,$$

für jedes $Y \in \mathfrak{X}(U)$, also ist $g(X_i, X_j)$ lokal konstant. Durch Verkleinern von U können wir also $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ erreichen, dh. X_1, \dots, X_n bilden einen lokalen Orthonormalrahmen. Aus der Torsionsfreiheit der Levi-Civita Konnexion erhalten wir $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 - 0 = 0$, also kommutieren die Flüsse der Vektorfelder X_i , dh. $\text{Fl}_t^{X_i} \circ \text{Fl}_s^{X_j} = \text{Fl}_s^{X_j} \circ \text{Fl}_t^{X_i}$ für hinreichend kleine s und t . Somit liefert

$$u^{-1}(t_1, \dots, t_n) := (\text{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ \text{Fl}_{t_n}^{X_n})(x)$$

eine lokal um x definierte Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenvektorfeldern $\frac{\partial}{\partial u^i} = X_i$, vgl. den Beweis von Satz II.4.5. Insbesondere bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ einen lokalen Orthonormalrahmen, folglich ist g durch (III.8) gegeben. \square

Unter der *Ricci Krümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verstehen wir folgende Kontraktion des Riemannschen Krümmungstensors

$$\text{Ric} = -\text{tr}_{24} R, \quad \text{Ric}(X, Y) := -\sum_{i=1}^n g(R_{X, e_i} Y, e_i), \quad X, Y \in T_x M,$$

wobei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_x M$ bezeichnet. Dies ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, nach Proposition III.1.2(c) symmetrisch,

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X), \quad X, Y \in T_x M,$$

und definiert daher ein Tensorfeld, $\text{Ric} \in \Gamma(S^2 T^* M)$, vom selben Typ wie die Metrik g . Eine weitere Kontraktion führt zur sogenannten *Skalarkrümmung*, $r \in C^\infty(M)$,

$$r := \text{tr}^g \text{Ric}, \quad r(x) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i), \quad x \in M,$$

wobei dies wieder unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. Die sogenannte *Schnittkrümmung* ist eine Abbildung, die jedem zwei dimensionalen Teilraum $\xi \subseteq T_x M$, $x \in M$, die Zahl

$$K(\xi) := -g(R_{X,Y}X, Y)$$

zuordnet, wobei X, Y eine Orthonormalbasis von ξ bildet. Dies ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Orthonormalbasis, für eine beliebige Basis X, Y von ξ erhalten wir, vgl. Aufgabe 47,

$$K(\xi) = -\frac{g(R_{X,Y}X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}, \quad X, Y \text{ Basis von } \xi \subseteq T_x M. \quad (\text{III.9})$$

Der *Einstein Tensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch

$$G := \text{Ric} - \frac{r}{2}g \in \Gamma(S^2 T^* M)$$

definiert, dh. $G(X, Y) = \text{Ric}(X, Y) - \frac{r}{2}g(X, Y)$. Beachte, $G(X, Y) = G(Y, X)$.

III.1.4. LEMMA. *Der Riemannsche Krümmungstensor R ist durch die Schnittkrümmung K vollständig bestimmt. Ist die Schnittkrümmung bei einem Punkt $x \in M$ konstant, dh. existiert eine Konstante c_x , sodass $K(\xi) = c_x$ für jede Ebene $\xi \subseteq T_x M$, dann gilt schon*

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -c_x \left(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) \right), \quad X, Y, Z, W \in T_x M,$$

und somit auch $\text{Ric}_x = (n-1)c_x g_x$ und $r(x) = n(n-1)c_x$.

BEWEIS. Da dies ein punktweises Problem ist, fixieren wir $x \in M$. Aufgrund von (III.9) bestimmt die Schnittkrümmung K alle Ausdrücke der Form

$$\rho(X, Y) := g(R_{X,Y}X, Y), \quad X, Y \in T_x M.$$

Mit Hilfe der Symmetrien (a) bis (d) von R in Proposition III.1.2 erhalten wir durch direkte (langwierige) Rechnung [7, Lemma 3.3.3]

$$\begin{aligned} -6g(R_{X,Y}Z, W) &= \rho(X+W, Y+Z) - \rho(X+W, Y) - \rho(X+W, Z) \\ &\quad - \rho(X, Y+Z) - \rho(W, Y+Z) + \rho(X, Z) + \rho(W, Y) \\ &\quad - \rho(Y+W, X+Z) + \rho(Y+W, X) + \rho(Y+W, Z) \\ &\quad + \rho(Y, X+Z) + \rho(W, X+Z) - \rho(Y, Z) - \rho(W, X) \end{aligned}$$

Folglich ist R durch ρ und daher auch durch K bestimmt. Beachte, dass auch R^0 ,

$$R^0(X, Y, Z, W) := g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z), \quad X, Y, Z, W \in T_x M,$$

alle Symmetrien von R besitzt, dh. (a) bis (d) in Proposition III.1.2 gelten auch für R^0 . Für $\rho^0(X, Y) := R^0(X, Y, X, Y)$ erhalten wir

$$\rho^0(X, Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2,$$

die mit R^0 assoziierte ‘‘Schnittkrümmung’’ ist daher konstant, $K^0 = -1$, siehe (III.9). Daraus folgt nun sofort die zweite Behauptung des Lemmas. \square

III.1.5. BEMERKUNG (Riemannsche Flächen). Für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist der Krümmungstensor R also völlig durch die Skalar­krümmung r bestimmt. Genauer folgt aus Lemma III.1.4, $r = 2K$, $\text{Ric} = Kg$, $G = 0$ und

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -K \left(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) \right).$$

Beachte, dass dieses K mit der Gaußkrümmung übereinstimmt, siehe [3, Abschnitt 3.7]. Aus Satz II.5.8 erhalten wir den klassischen Satz von Gauß und Bonnet für geschlossene, orientierbare 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten,

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \text{vol} = \chi(M), \quad (\text{III.10})$$

denn für die Euler Form gilt in diesem Fall $e(TM, g, \nabla) = \frac{1}{2\pi} K \text{vol}$, siehe (II.49).

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $A \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$, so definieren wir die *Divergenz*, $\text{div} A \in \Gamma(\otimes^k T^*M)$, durch $\text{div} A := \text{tr}_{12}^g(\nabla A)$, dh

$$(\text{div} A)(X_1, \dots, X_k) := \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k), \quad X_i \in T_x M,$$

wobei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_x M$ bezeichnet. Dies ist unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis und erfüllt folgende Rechenregeln.

III.1.6. LEMMA. Für $A, B \in \Gamma(\otimes^{k+1}T^*M)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:

- (a) $\text{div}(A + B) = \text{div} A + \text{div} B$
- (b) $\text{div}(fA) = f \text{div} A + \text{tr}_{12}^g(df \otimes A)$
- (c) $\text{div}(fg) = df$.
- (d) $\text{div}(a) \text{vol} = di_{\sharp a} \text{vol} = L_{\sharp a} \text{vol}$, für $a \in \Omega^1(M)$.
- (e) $\int_M \text{div}(a) \text{vol} = 0$, für $a \in \Omega_c^1(M)$.

BEWEIS. Die erste Behauptung (a) ist trivial. Um die zweite Relation einzusehen, sei $X_i \in T_x M$ und e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\text{div}(fA))(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(fA))(e_i, X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k) + (e_i \cdot f)A(e_i, X_1, \dots, X_k) \\ &= (f \text{div} A)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^n (df \otimes A)(e_i, e_i, X_1, \dots, X_k) \\ &= (f \text{div} A)(X_1, \dots, X_k) + (\text{tr}_{12}^g(df \otimes A))(X_1, \dots, X_k) \end{aligned}$$

und somit (b). Aus $\nabla g = 0$ erhalten wir $\operatorname{div}(g) = 0$ und mittels (b) daher $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{tr}_{12}^g(df \otimes g) = df$, also (c). Für (d) verwenden wir Aufgabe 46 sowie $\nabla \operatorname{vol} = 0$, und erhalten

$$\begin{aligned} L_{\sharp a} \operatorname{vol} &= di_{\sharp a} \operatorname{vol} = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{\sharp a} \operatorname{vol}) = \sum_{i=1}^n e^i \wedge (i_{\nabla_{e_i} \sharp a} \operatorname{vol}) \\ &= \sum_{i=1}^n e^i (\nabla_{e_i} \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\nabla \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\sharp_2 \nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}^g(\nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{div}(a) \operatorname{vol}. \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung folgt aus (d) und dem Satz von Stokes. \square

III.1.7. PROPOSITION (Kontrahierte Bianchi Identität). *Der Einstein Tensor einer Riemannsche Mannigfaltigkeit erfüllt*

$$\operatorname{div} G = 0, \quad \text{d.h. es gilt} \quad \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr.$$

BEWEIS. Es sei e_1, \dots, e_n ein lokaler Orthonormalrahmen. Die Bianchi Identität (III.7) besagt

$$(\nabla_{e_i} R)(e_j, X) + (\nabla_{e_j} R)(X, e_i) + (\nabla_X R)(e_i, e_j) = 0$$

also

$$g((\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_i, e_j) + g((\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_i, e_j) + g((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j) = 0$$

und mittels der Symmetrien aus Proposition III.1.2

$$-g((\nabla_{e_i} R)(e_i, e_j)X, e_j) - g((\nabla_{e_j} R)(e_j, e_i)X, e_i) + g((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j) = 0.$$

Summation über i und j liefert

$$-\sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_i} R)(e_i, X) - \sum_j (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_j} R)(e_j, X) + \sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_X R)(e_i, e_i) = 0$$

Da $\operatorname{tr}_{24}(\nabla_Y R) = \nabla_Y(\operatorname{tr}_{24} R) = -\nabla_Y \operatorname{Ric}$, erhalten wir

$$\sum_i (\nabla_{e_i} \operatorname{Ric})(e_i, X) + \sum_j (\nabla_{e_j} \operatorname{Ric})(e_j, X) - \sum_i (\nabla_X \operatorname{Ric})(e_i, e_i) = 0,$$

also

$$2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})(X) = \operatorname{tr}^g(\nabla_X \operatorname{Ric}) = \nabla_X(\operatorname{tr}^g \operatorname{Ric}) = \nabla_X r = X \cdot r = (dr)(X).$$

Dies zeigt die zweite Gleichung, $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr$. Zusammen mit Lemma III.1.6 folgt nun sofort $\operatorname{div} G = 0$. \square

III.1.8. SATZ (Schur). *Ist (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche n -Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(a) *Existiert eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G = fg$, dann ist f konstant.*

Ist darüberhinaus $n \neq 2$, so gilt weiters.⁸

⁸Beachte jedoch, dass (a) für $n = 2$ trivialerweise erfüllt ist, da in diesem Fall ohnehin stets $G = 0$ gilt, siehe Bemerkung III.1.5.

- (b) Existiert eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Ric} = fg$, dann ist f konstant.
(c) Existiert eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $K_x(\xi) = f(x)$ für alle Ebenen $\xi \subseteq T_x M$, dann ist f konstant. In anderen Worten: ist die Schnittkrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.⁹

BEWEIS. Ad (a): Aus $G = fg$ erhalten wir durch Kontraktion $\text{tr} G = nf$, insbesondere muss f also glatt sein. Mit der kontrahierten Bianchi Identität in Proposition III.1.7 und Lemma III.1.6(c) folgt nun $0 = \text{div} G = \text{div}(fg) = df$, und somit muss f konstant sein. Ad (b): Aus $\text{Ric} = fg$ folgt $G = (f - \frac{r}{2})g$ und mittels (a) sehen wir, dass $f - \frac{r}{2}$ konstant sein muss. Kontraktion liefert weiters $r = \text{tr}^g \text{Ric} = \text{tr}^g(fg) = nf$. Da $n \neq 2$ vorausgesetzt wurde, impliziert dies, dass auch f konstant ist. Ad (c): Mittels Lemma III.1.4 erhalten wir in diesem Fall $\text{Ric} = (n - 1)fg$, die Behauptung folgt daher aus (b). \square

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Konnexion ∇ und Riemannschen Krümmungstensor R . Weiters bezeichne $S \subseteq M$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Mittels $g|_S \in \Gamma(S^2 T^* M|_S)$ erhalten wir eine orthogonale Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$. Die Einschränkung von $g|_S$ auf TS liefert eine Riemannsche Metrik $g_S \in \Gamma(S^2 T^* S)$ auf S . Die Einschränkung von $g|_S$ auf $T^\perp S$ liefert eine Euklidische Metrik $g^\perp \in \Gamma(S^2 (T^\perp S)^*)$ auf dem Normalenbündel $T^\perp S$. Wir bezeichnen die assoziierten Orthogonalprojektionen mit $P : TM|_S \rightarrow TS$ und $Q : TM|_S \rightarrow T^\perp S$. Betrachte folgende die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \nabla_X^S Y &:= P(\nabla_X Y), & X, Y \in \mathfrak{X}(S), \\ \text{II}(X, Y) &:= Q(\nabla_X Y), & X, Y \in \mathfrak{X}(S), \\ \nabla_X^\perp \xi &:= Q(\nabla_X \xi), & X \in \mathfrak{X}(S), \xi \in \Gamma(T^\perp S) \\ B_X(\xi) &:= -P(\nabla_X \xi), & X \in \mathfrak{X}(S), \xi \in \Gamma(T^\perp S) \end{aligned}$$

Dabei wird II als *zweite Fundamentalform* bezeichnet, und B heißt *Weingartenabbildung*.

III.1.9. SATZ. Für $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ und $\xi, \eta \in \Gamma(T^\perp S)$ gilt:

- (a) ∇^S ist eine torsionsfreie mit g_S kompatible lineare Konnexion auf TS und stimmt daher mit der Levi-Civita Konnexion von (S, g_S) überein.
(b) ∇^\perp ist eine mit g^\perp kompatible lineare Konnexion auf $T^\perp S$.
(c) Die zweite Fundamentalform II bildet ein Tensorfeld auf S , genauer haben wir $\text{II} \in \Gamma(S^2 T^* S \otimes T^\perp S)$, insbesondere also $\text{II}(X, Y) = \text{II}(Y, X)$.

⁹Auch die ersten beiden Aussagen lassen sich ähnlich interpretieren. Etwa können wir die Ricci Krümmung äquivalent als eine Abbildung auffassen, die jeder Geraden $\xi \subseteq T_x M$ die Zahl $\text{Ric}(X, X)/g(X, X)$ zuordnet, wobei X eine Basis des 1-dimensionalen Teilraums ξ bildet. Dies ist offensichtlich unabhängig vom verwendeten Basisvektor und enthält die volle Information über den Riccitenor, da dieser symmetrisch ist (Polarisieren). Behauptung (b) lässt sich daher auch wie folgt formulieren: ist die Riccigrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.

- (d) Die Weingartenabbildung B bildet ein Tensorfeld auf S , genauer haben wir $B \in \Gamma(T^*S \otimes (T^\perp S)^* \otimes TS)$, und es gilt die sogenannte Weingarten Gleichung $g^\perp(\text{II}(X, Y), \xi) = g_S(Y, B_X \xi)$.
- (e) Bezeichnet R^S die Riemannkrümmung von (S, g_S) , dann gilt die sogenannte Gauß Gleichung, vgl. [3, Abschnitt 3.7],

$$g(R_{X,Y}Z, W) = g_S(R_{X,Y}^S Z, W) + g^\perp(\text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W)) - g^\perp(\text{II}(Y, Z), \text{II}(X, W)).$$

- (f) Bezeichnet R^\perp die Krümmung der Konnexion ∇^\perp auf $T^\perp S$, dann gilt

$$g(R_{X,Y}\xi, \eta) = g^\perp(R_{X,Y}^\perp \xi, \eta) - g_S(B_Y \xi, B_X \eta) + g_S(B_X \xi, B_Y \eta).$$

- (g) Es gilt die Codazzi–Mainardi Gleichung,

$$g(R_{X,Y}Z, \xi) = g^\perp((\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z), \xi) - g^\perp((\tilde{\nabla}_Y \text{II})(X, Z), \xi)$$

wobei $\tilde{\nabla}$ die von ∇^S und ∇^\perp auf $S^2 T^* S \otimes T^\perp S$ induziert Konnexion bezeichnet, dh. $(\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\text{II}(Y, Z)) - \text{II}(\nabla_X^S Y, Z) - \text{II}(Y, \nabla_X^S Z)$.

BEWEIS. Offensichtlich sind alle vier Ausdrücke $C^\infty(M)$ linear in X . Wenden wir auf die Gleichung $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Y$ die Projektion P an und so erhalten wir $\nabla_X^S(fY) = f\nabla_X^S Y + (X \cdot f)Y$, denn $P(Y) = Y$. Anwenden von Q liefert $\text{II}(X, fY) = f\text{II}(X, Y)$, denn $Q(Y) = 0$. Analog erhalten wir aus $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X \xi + (X \cdot f)\xi$ durch Anwenden von Q bzw. P die Gleichungen $\nabla_X^\perp(f\xi) = f\nabla_X^\perp \xi + (X \cdot f)\xi$ und $B_X(f\xi) = fB_X(\xi)$, denn $Q(\xi) = \xi$ und $P(\xi) = 0$. Wir schließen daraus, dass ∇^S und ∇^\perp lineare Konnexionen darstellen, und II und B Tensorfelder sind.

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$. Wenden wir darauf P folgt $\nabla_X^S Y - \nabla_Y^S X - [X, Y] = 0$, denn $P([X, Y]) = [X, Y]$. Somit ist auch ∇^S torsionsfrei. Wenden wir auf die selbe Gleichung Q an, so erhalten wir $\text{II}(X, Y) - \text{II}(Y, X) = 0$, denn $Q([X, Y]) = 0$, also ist $\text{II}(X, Y)$ symmetrisch in X und Y .

Wegen $\nabla g = 0$ gilt $Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ und somit auch $Z \cdot g_S(X, Y) = g_S(\nabla_Z^S X, Y) + g_S(X, \nabla_Z^S Y)$, also ist ∇^S mit g_S verträglich. Analog folgt aus $Z \cdot g(\xi, \eta) = g(\nabla_Z \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_Z \eta)$, dass ∇^\perp mit g^\perp kompatibel ist. Schließlich erhalten wir aus $0 = X \cdot g(Y, \xi) = g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi)$ auch $0 = g^\perp(\text{II}(X, Y), \xi) - g(Y, B_X \xi)$.

Damit sind (a) bis (d) gezeigt. Darüberhinaus gilt bezüglich der orthogonalen Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$,

$$\nabla^{TM|_S} = \nabla^S \oplus \nabla^\perp + \begin{pmatrix} 0 & -B \\ \text{II} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Matrix als Element in $\Omega^1(S; \text{end}(TS \oplus T^\perp S))$ auffassen. Aus Proposition II.4.2(c)&(d) erhalten wir daraus

$$R^{TM|S} = \begin{pmatrix} R^S & 0 \\ 0 & R^\perp \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d^{\nabla''} B \\ d^{\nabla'} \Pi & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \wedge \Pi & 0 \\ 0 & \Pi \wedge B \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

wobei ∇' bzw. ∇'' die von ∇^S und ∇^\perp auf $\text{hom}(TS, T^\perp S)$ bzw. $\text{hom}(T^\perp S, TS)$ induzierten Konnexionen bezeichnen. Die beiden Gleichungen für die Diagonaleinträge liefern zusammen mit der Weingartengleichung (d) sofort (e) und (f). Wegen der Torsionsfreiheit gilt weiters $(d^{\nabla'} \Pi)(X, Y, Z) = (\tilde{\nabla}_X \Pi)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \Pi)(X, Z)$, folglich liefert der linke untere Eintrag in (III.11) die Codazzi–Mainardi Gleichung (g). \square

Unter einer (lokalen) *Isometrie* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir einen (lokalen) Diffeomorphismus $f \in \text{Diff}(M)$ mit $f^*g = g$. Offensichtlich bildet die Menge aller Isometrien eine Untergruppe von $\text{Diff}(M)$, die wir mit $\text{Isom}(M, g)$ bezeichnen. Für jede Isometrie f gilt $f^*\nabla = \nabla$, denn die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ ist mit g kompatibel, $(f^*\nabla)g = (f^*\nabla)(f^*g) = f^*(\nabla g) = f^*0 = 0$, und torsionsfrei, $\text{Tor}^{f^*\nabla}(f^*X, f^*Y) = (f^*\nabla)_{f^*X}(f^*Y) - (f^*\nabla)_{f^*Y}(f^*X) - [f^*X, f^*Y] = f^*(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = f^*\text{Tor}^\nabla(X, Y) = f^*0 = 0$, und muss daher wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 mit der Levi–Civita Konnexion übereinstimmen, dh. $f^*\nabla = \nabla$. Für die Krümmung folgt $f^*R = R$, $f^*\text{Ric} = \text{Ric}$, $f^*r = r$ und $f^*K = K$, genauer $K(T_x f \cdot \xi) = K(\xi)$, für jede Ebene $\xi \subseteq T_x M$.

Der Fluss eines Vektorfeldes X ist genau dann eine (lokale) Isometrie, wenn $L_X g = 0$ gilt, denn $\frac{\partial}{\partial t}(\text{Fl}_t^X)^*g = (\text{Fl}_t^X)^*(L_X g)$. Solche Vektorfelder werden *Killing Vektorfelder*, genannt sie können als *infinitesimale Isometrien* interpretiert werden. Eine einache Rechnung, vgl. Aufgabe 50, zeigt

$$L_X g = 2\text{sym}\nabla X, \quad \text{dh.} \quad (L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \quad (\text{III.12})$$

Killing Vektorfelder sind daher durch die Gleichung $\text{sym}\nabla X = 0$ charakterisiert. Insbesondere ist jedes parallele Vektorfeld $\nabla X = 0$ auch ein Killing Vektorfeld.

III.1.10. BEISPIEL (Euklidische Geometrie, $K = 0$). Betrachte den Euklidischen Raum \mathbb{R}^n mit der Riemannschen Metrik

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n.$$

Die triviale Konnexion auf $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich mit g kompatibel und torsionsfrei. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 sehen wir daher, dass die Levi–Civita Konnexion von (\mathbb{R}^n, g) mit der trivialen Konnexion übereinstimmt. Insbesondere sind die Koordinatenvektorfelder parallel, dh. $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = 0$, und daher $R = 0$. Der flache Euklidische Raum hat daher konstante Schnittkrümmung $K = 0$. Beachte, dass jede affine Abbildung $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \text{O}_n$ und $b \in \mathbb{R}^n$, eine Isometrie von (\mathbb{R}^n, g) ist.

Analog sieht man, dass der sogenannte *flache Torus*, $T^n := S^1 \times \dots \times S^1$ mit Riemannscher Metrik $g := \theta^1 \otimes \theta^1 + \dots + \theta^n \otimes \theta^n$, eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K = 0$ darstellt. Hier ist $\theta^i := p_i^* \theta \in \Omega^1(T^n)$, wobei $p_i : T^n \rightarrow S^1$ die Projektion auf die i -te Koordinate und $\theta \in \Omega^1(S^1)$ die standard Winkelform bezeichnen. Beachte, dass die glatte Überlagerung $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ eine lokale Isometrie bildet.

III.1.11. BEISPIEL (Sphärische Geometrie, $K > 0$). Es sei $r > 0$ und es bezeichne $S := S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre mit Radius r . Wir versehen S_r^n mit der von \mathbb{R}^{n+1} und $g = \sum_{i=0}^n dx^i \otimes dx^i$ induzierten Riemannschen Metrik g_S . Betrachte das radiale Vektorfeld $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, $N(x) := x = \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Beachte, dass N normal auf S steht, und $g^\perp(N, N) = r^2$ gilt. Aus $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ folgt $\nabla N = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$, und mit Hilfe der Weingartengleichung, siehe Proposition III.1.9(d), daher $\text{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$. Zusammen mit der Gauß Gleichung aus Proposition III.1.9(e), liefert dies

$$0 = g_S(R_{X,Y}^S X, Y) + \frac{1}{r^2} g_S(X, X) g_S(Y, Y) - \frac{1}{r^2} g_S(X, Y) g_S(X, Y).$$

Daraus folgt nun, dass S_r^n konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, dass jedes $A \in O_{n+1}$ eine Isometrie von S_r^n darstellt, dh. $O_{n+1} \subseteq \text{Isom}(S_r^n)$. Wir werden später sehen, dass jede Isometrie der Sphäre von dieser Form ist, dh. $O_{n+1} = \text{Isom}(S_r^n)$.

III.1.12. BEISPIEL (Hyperbolische Geometrie, $K < 0$). Betrachte wieder \mathbb{R}^{n+1} , nun aber mit der pseudo Riemannschen Metrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$. Für $r > 0$ bildet das Hyperboloid $S = H_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x, x) = -r^2\}$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit und g induziert eine (positiv definite) Riemannsche Metrik g_S auf H_r^n . Wie im vorangehenden Beispiel folgt $\text{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$, jedoch gilt nun $g^\perp(N, N) = -r^2$, denn g^\perp ist negativ definit. Aus der Gauß Gleichung folgt dann wie zuvor, dass H_r^n konstante Schnittkrümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, $O(1, n) \subseteq \text{Isom}(H_r^n)$, tatsächlich gilt auch hier wieder Gleichheit.

III.1.13. PROPOSITION (Variationsformeln). *Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Volumensform vol , Levi-Civita Konnexion ∇ , und assoziierten Krümmungstensoren R , Ric und r . Weiters sei g_t , $t \in \mathbb{R}$, eine glatte Familie von Riemannmetriken auf M mit $g_0 = g$, und es bezeichne $\dot{g} := \frac{\partial}{\partial t} |_{g_0} \in \Gamma(S^2 T^* M)$. Schließlich definieren wir auf $S^2 T^* M$ eine Euklidische Metrik*

$$\langle h, k \rangle := \text{tr} \text{tr}_{13}(h \otimes k) = \sum_{i,j=1}^n h(e_i, e_j) k(e_i, e_j), \quad h, k \in S^2 T_x^* M,$$

wobei dies unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. In dieser Situation gelten die folgenden Variationsformeln, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(a) \quad \dot{\text{vol}} := \frac{\partial}{\partial t} |_{g_0} \text{vol}^{g_t} = \frac{1}{2} \text{tr} \dot{g} = \frac{1}{2} \langle g, \dot{g} \rangle.$$

(b) Mit $\dot{\nabla} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \nabla^{g_t} \in \Gamma(S^2 T^* M \otimes TM)$ gilt

$$g(\dot{\nabla}_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left((\nabla_X \dot{g})(Y, Z) + (\nabla_Y \dot{g})(Z, X) - (\nabla_Z \dot{g})(X, Y) \right).$$

und daher auch $\text{tr}_{23} \dot{\nabla} = \frac{1}{2} d \text{tr}(\dot{g})$ und $\text{tr}_{12} \dot{\nabla} = \text{div} \dot{g} - \frac{1}{2} d \text{tr}(\dot{g})$.

(c) Mit $\dot{R} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 R^{g_t}$ gilt $\dot{R}_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot{\nabla})(Y, Z) - (\nabla_Y \dot{\nabla})(X, Z)$.

(d) Mit $\dot{r} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 r^{g_t}$ gilt

$$\dot{r} = -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle + \text{div}(\text{tr}_{12} \dot{\nabla}) - \text{div}(\text{tr}_{23} \dot{\nabla}) = -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle + \text{div} \text{div} \dot{g} + \Delta \text{tr}(\dot{g}),$$

wobei wird der Laplace Operator auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ durch $\Delta f := -\text{div} df = -\text{tr} \nabla \nabla f$ definiert ist.

BEWEIS. Es sei e_1, \dots, e_n eine positiv orientierte orthonormale Basis von $T_x M$ bezüglich $g = g_0$, und es bezeichnet $e^1, \dots, e^n \in T_x^* M$ die duale Basis, $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Für beliebiges t gilt dann

$$\text{vol}_x^{g_t} = \sqrt{\det(g_t(e_i, e_j)_{ij})} e^1 \wedge \dots \wedge e^n. \quad (\text{III.13})$$

Zusammen mit $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det(g_t(e_i, e_j)_{ij}) = \text{tr}(\dot{g}(e_i, e_j)_{ij}) = \text{tr}(\dot{g}) = \langle g, \dot{g} \rangle$ folgt nun (a). Ableiten von (III.4) liefert

$$\begin{aligned} g(\dot{\nabla}_X Y, Z) + \dot{g}(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \left(X \cdot \dot{g}(Y, Z) + Y \cdot \dot{g}(Z, X) - Z \cdot \dot{g}(X, Y) \right. \\ &\quad \left. + \dot{g}([X, Y], Z) - \dot{g}([Y, Z], X) + \dot{g}([Z, X], Y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\nabla_X \dot{g})(Y, Z) + (\nabla_Y \dot{g})(Z, X) - (\nabla_Z \dot{g})(X, Y) \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{g}(\nabla_X Y, Z) \right) \end{aligned}$$

und damit (b). Aus Proposition II.4.2(c) erhalten wir $\dot{R} = d^\nabla \dot{\nabla}$, dh.

$$\dot{R}_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot{\nabla}_Y) Z - (\nabla_Y \dot{\nabla}_X) Z - \dot{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Kombinieren wir dies mit $(\nabla_X \dot{\nabla})(Y, Z) = (\nabla_X \dot{\nabla}_Y) Z - \dot{\nabla}_{\nabla_X Y} Z$ und $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ so folgt (c). Da $\text{Ric}^{g_t} = -\text{tr}_{24} R^{g_t}$ gilt $\text{Ric} = -\text{tr}_{24} \dot{R}$. Weiters haben wir $r^{g_t} = \text{tr}^{g_t} \text{Ric}^{g_t} = \text{tr}(\sharp_2^{g_t} \text{Ric}^{g_t})$ und somit

$$\dot{r} = \text{tr}(\sharp_2 \dot{\text{Ric}}) + \text{tr}(\sharp_2 \dot{\text{Ric}}) = -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle + \text{tr} \dot{\text{Ric}} = -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle - \text{tr} \text{tr}_{24} \dot{R}.$$

Kombinieren wir dies mit (c) so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle - \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{e_i} \dot{\nabla})(e_j, e_i), e_j) + \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{e_j} \dot{\nabla})(e_i, e_i), e_j), \\ &= -\langle \text{Ric}, \dot{g} \rangle - \text{div}(\text{tr}_{23} \dot{\nabla}) + \text{div}(\text{tr}_{12} \dot{\nabla}), \end{aligned}$$

denn die Levi-Civita Konnexion vertauscht mit Kontraktionen. \square

III.1.14. BEISPIEL (Einstein–Hilbert Wirkung). Es sei M eine orientierte (geschlossene) Mannigfaltigkeit. Zu jeder Riemannschen Metrik g auf M betrachte

$$E(g) := \int_M r \operatorname{vol}, \quad (\text{III.14})$$

wobei r und vol die Skalarkrümmung und Volumensform von g bezeichnen. Wir wollen nun die kritischen Punkte dieser Wirkung bestimmen. Dazu betrachten wir eine beliebige glatte 1-parameter Familie Riemannscher Metriken g_t (Variation der Metrik) mit $g_0 = g$. Setzen wir $\dot{g} = \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2T^*M)$, so erhalten wir mit Hilfe von Proposition III.1.13(a)&(d) und Lemma III.1.6(e),

$$\begin{aligned} \dot{E} &:= \frac{\partial}{\partial t}|_0 E(g_t) = \int_M \dot{r} \operatorname{vol} + r \dot{\operatorname{vol}} \\ &= - \int_M \langle \operatorname{Ric} - \frac{r}{2}g, \dot{g} \rangle \operatorname{vol} + \int_M \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12} \dot{\nabla} - \operatorname{tr}_{23} \dot{\nabla}) \operatorname{vol} = - \int_M \langle G, \dot{g} \rangle \operatorname{vol}, \end{aligned}$$

wobei $G = \operatorname{Ric} - \frac{r}{2}g$ den Einsteintensor von g bezeichnet. Ist g kritisch, so muss \dot{E} , für jede solche Variation der Metrik verschwinden. Insbesondere können wir $g_t := g + tG$ betrachten, und erhalten aus obiger Formel $\int_M \langle G, G \rangle \operatorname{vol} = 0$, also $G = 0$. Wir sehen daher, dass die kritischen Punkte der Einstein–Hilbert Wirkung (III.14) genau die Riemannschen Metriken g mit verschwindendem Einsteintensor sind, $G = 0$. Für $\dim M \neq 2$ ist die Gleichung $G = 0$ zu $\operatorname{Ric} = 0$ äquivalent, denn $\operatorname{tr} G = (1 - \frac{n}{2})r$. Beachte, dass nach dem Satz von Gauß–Bonnet, siehe (III.10), die Wirkung $E(g)$ im 2-dimensionalen Fall unabhängig von g ist. Dies ist mit obiger Rechnung verträglich, denn im 2-dimensionalen Fall gilt ja stets $G = 0$, vgl. Bemerkung III.1.5.

III.1.15. BEISPIEL (Minimalflächen). Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder (geschlossenen) orientierten Teilmannigfaltigkeit S ordnen wir ihr induziertes Volumen zu,

$$V(S) := \int_S \operatorname{vol}_S^g, \quad (\text{III.15})$$

wobei vol_S^g die Volumensform der auf S von g induzierten Riemannschen Metrik g_S bezeichnet. Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Variation der Teilmannigfaltigkeit $S_t := \operatorname{Fl}_t^X(S)$, definiert für hinreichend kleines t . Mit Hilfe von (III.12) und Proposition III.1.13(a) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) &= \frac{\partial}{\partial t}|_0 \int_{S_t} \operatorname{vol}_{S_t}^g = \frac{\partial}{\partial t}|_0 \int_S \operatorname{vol}_S^{(\operatorname{Fl}_t^X)^*g} \\ &= \frac{1}{2} \int_S \operatorname{tr}_S \left(\frac{\partial}{\partial t}|_0 (\operatorname{Fl}_t^X)^*g \right) \operatorname{vol}_S^g = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{tr}_S (L_X g) \operatorname{vol}_S^g = \int_S \operatorname{tr}_S (\nabla X) \operatorname{vol}_S^g. \end{aligned}$$

Zerlegen wir nun X längs S in Tangential- und Normalteil, $X|_S = PX + QX$, dann folgt aus der Weingartengleichung $\operatorname{tr}_S(\nabla X) = \operatorname{tr}_S(\nabla(PX)) + \operatorname{tr}_S(\nabla(QX)) =$

$\operatorname{div}_S(X) - g^\perp(\operatorname{tr} \operatorname{II}, QX)$ und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} |_0 V(S_t) = \int_S \operatorname{div}(PX) \operatorname{vol}_S^g - \int_S g^\perp(\operatorname{tr} \operatorname{II}, QX) \operatorname{vol}_S^g = - \int_S g^\perp(\operatorname{tr} \operatorname{II}, QX) \operatorname{vol}_S^g.$$

Die kritischen Punkte von (III.15) sind daher genau jene Teilmannigfaltigkeiten S , deren *mittlere Krümmung* $H := \operatorname{tr} \operatorname{II} \in \Gamma(T^\perp S)$ verschwindet.

III.1.16. BEMERKUNG (Kartendarstellungen). Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann existieren $g_{ij} \in C^\infty(U)$ mit

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Für jedes $x \in U$ bildet daher $g_{ij}(x)$ eine symmetrische positiv definite Matrix, $g_{ij} = g_{ji}$. Unter den mit der Karte u assoziierten *Christoffel Symbolen* verstehen wir die durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

eindeutig bestimmten lokal definierten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Aus der Formel für die Levi-Civita Konnexion (III.4) erhalten wir sofort

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} \right) \quad (\text{III.16})$$

wobei $g^{kl}(x)$ die zu $g_{ij}(x)$ inverse Matrix bezeichnet, $x \in U$, dh. $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Da die Levi-Civita Konnexion torsionsfrei ist, gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Kartendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors $R_{ijk}^l \in C^\infty(U)$

$$R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k} =: \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \frac{\partial}{\partial u^l},$$

Aus (III.5) erhalten wir sofort

$$R_{kij}^l = \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right) \quad (\text{III.17})$$

was, zusammen mit (III.16) die Berechnung von R erlaubt, wenn die Koordinatendarstellung g_{ij} der Metrik bekannt ist. Beachte, dass die Riemannkrümmung R in nicht linearer Weise von Ableitungen bis zweiter Ordnung der Metrik g abhängt. Mit

$$R_{lkij} := g \left(R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \sum_{m=1}^n R_{kij}^m g_{ml}$$

lassen sich die Symmetrien in Proposition III.1.2 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} R_{lkij} &= -R_{lkji} \\ R_{lkij} &= -R_{klij} \\ R_{lkij} &= R_{ijlk} \\ 0 &= R_{lkij} + R_{lij k} + R_{ljk i} \end{aligned}$$

III.2. Aufgaben zu Kapitel III.

45. AUFGABE. Es sei ∇ eine torsionsfreie Konnexion auf TM . Zeige

$$(d\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i}^{\Lambda^k T^* M} \alpha)(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_k)$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, wobei $\nabla^{\Lambda^k T^* M}$ die induzierte Konnexion auf $\Lambda^k T^* M$ bezeichnet. Daher ist $d\alpha \in \Omega^k(M)$ gerade die Schiefsymmetrisierung von $\nabla\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$.

46. AUFGABE. Ist e_1, \dots, e_n ein lokaler Rahmen, und bezeichnet e^1, \dots, e^n den dualen Korahmen, $e^i(e_j) = \delta_j^i$, dann gilt für jedes $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha.$$

47. AUFGABE. Verifiziere, dass die rechte Seite von (III.9) unabhängig von der Basis X, Y von $\xi \subseteq T_x M$ ist.

48. AUFGABE. Verifiziere (III.13).

49. AUFGABE. Zeige, dass auf S^2 keine Riemannsche Metrik mit $K \leq 0$ existiert. Zeige weiters, dass auf $T^2 = S^1 \times S^1$ keine Riemannsche Metrik mit $K < 0$ und auch keine mit $K > 0$ existiert. *Hinweis:* Verwende die Formel von Gauß–Bonnet, siehe (III.10).

50. AUFGABE. Verifiziere (III.12). *Hinweis:* Verwende

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= (X \cdot g)(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]), \\ [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \text{ sowie } X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

