III. Riemannsche Geometrie

III.1. Levi–Civita Konnexion und Riemannkrümmung. Unter einer *Riemannschen Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Euklidische Metrik auf dem Tangentialbündle, $g \in \Gamma(S^2T^*M)$, vgl. Abschnitt II.5. Eine Riemannsche Metrik spezifiziert also ein positiv definites symmetrisches inneres Produkt auf jedem Tangentialraum T_xM, $x \in M$, und erlaubt es daher Längen und Winkel von Tangentialvektoren zu messen. Unter einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) verstehen wir eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g. Auf einer orientierten Riemannschen n-Mannigfaltigkeit erhalten wir eine kanonische Volumsform, $\mathrm{vol} \in \Omega^n(M)$, in dem wir $\mathrm{vol}(X_1, \dots, X_n) = 1$ für eine (und dann jede) positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM fordern, $x \in M$.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten besitzen eine ausgezeichnete lineare Konnexion, die sogenannte *Levi–Civita Konnexion,* auf ihrem Tangentialbündel. Um die Bedingung, die diese Konnexion charakterisiert zu formulieren benötigen wir den Begriff der Torsion einer linearen Konnexion auf dem Tangentialbündel. Ist ∇ eine lineare Konnexion auf TM, so definiert

$$\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) \tag{III.1}$$

einen Schnitt $\mathrm{Tor}^\nabla \in \Omega^2(M; TM)$, denn der Ausdruck (III.1) ist offensichtlich schiefsymmetrisch und $C^\infty(M)$ linear in X und Y. Dieses Tensorfeld wird als *Torsion* der Konnexion ∇ bezeichnet. Eine lineare Konnexion auf TM wird *torsionsfrei* genannt, wenn der Torsionstensor verschwindet, dh. $\mathrm{Tor}^\nabla(X, Y) = 0$ für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

III.1.1. Proposition (Levi–Civita Konnexion)**.** *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert genau eine torsionsfreie mit g kompatible lineare Konnexion ∇ auf TM, dh.* $\mathrm{Tor} = 0$ *und* $\nabla g = 0$*. Diese Konnexion wird die* Levi–Civita Konnexion *der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) genannt. Sie ist daher durch die Bedingungen*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{III.2}$$

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{III.3}$$

für je drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, eindeutig charakterisiert.

Beweis. Wir schreiben die Bedingung $\nabla g = 0$, siehe (III.3), drei mal an:

$$0 = (\nabla_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$
$$0 = (\nabla_Y g)(Z, X) = Y \cdot g(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X)$$
$$0 = -(\nabla_Z g)(X, Y) = -Z \cdot g(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Da g symmetrisch ist, erhalten wir durch Aufaddieren dieser drei Gleichungen unter Verwendung von (III.2)

$$\begin{aligned}0 &= X\cdot g(Y,Z)+Y\cdot g(Z,X)-Z\cdot g(X,Y)\\&\qquad -g(\nabla_XY+\nabla_YX,Z)-g(\nabla_YZ-\nabla_ZY,X)+g(\nabla_ZX-\nabla_XZ,Y)\\&= X\cdot g(Y,Z)+Y\cdot g(Z,X)-Z\cdot g(X,Y)-2g(\nabla_XY,Z)\\&\qquad +g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}g(\nabla_XY,Z)=\frac{1}{2}\Big(&X\cdot g(Y,Z)+Y\cdot g(Z,X)-Z\cdot g(X,Y)\\&+g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y)\Big).\end{aligned}\tag{III.4}$$

Da g nichtdegeneriert ist, sehen wir daraus bereits, dass es höchstens eine torsionsfreie mit g kompatible Konnexion auf TM geben kann. Um auch die Existenz einzusehen, versuchen wir ∇_XY durch (III.4) zu definieren. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die rechte Seite dieser Gleichung $C^\infty(M)$ linear in Z ist. Wegen der Nichtdegeneriertheit von g definiert (III.4) also eine, offensichtlich bilineare Abbildung $\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, $(X,Y)\mapsto\nabla_XY$. Analoge Rechnungen zeigen, dass ∇_XY auch $C^\infty(M)$ linear in X ist, und die Leibnitz Regel $\nabla_X(fY)=f\nabla_XY+(X\cdot f)Z$ gilt. Zusammenfassend sehen wir also, dass (III.4) eine lineare Konnexion ∇ auf TM definiert. Es bleibt also noch zu zeigen, dass diese Konnexion ∇ tatsächlich torsionsfrei und mit g kompatibel ist. Aus (III.4) erhalten wir sofort

$$g(\nabla_XY,Z)-g(\nabla_YX,Z)=g([X,Y],Z),$$

also $g(\mathrm{Tor}(X,Y),Z)=g(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y],Z)=0$ für jedes $Z\in\mathfrak{X}(M)$, und daher $\mathrm{Tor}(X,Y)=0$. Schließlich folgt aus (III.4) auch

$$g(\nabla_XY,Z)+g(\nabla_XZ,Y)=X\cdot g(Y,Z),$$

also $(\nabla_Xg)(Y,Z)=X\cdot g(Y,Z)-g(\nabla_XY,Z)-g(Y,\nabla_XZ)=0$ für alle $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, und somit $\nabla g=0$. □

Unter dem *Riemannschen Krümmungstensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir die Krümmung, siehe Proposition II.4.2, der Levi–Civita Konnexion, dh.

$$R_{X,Y}Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).\tag{III.5}$$

III.1.2. Proposition. *Der Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt folgende Symmetrien, $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$:*

(a) $R_{X,Y}Z=-R_{Y,X}Z$
(b) $g(R_{X,Y}Z,W)=-g(R_{X,Y}W,Z)$
(c) $g(R_{X,Y}Z,W)=g(R_{Z,W}X,Y)$
(d) $R_{X,Y}Z+R_{Y,Z}X+R_{Z,X}Y=0$ *(algebraische Bianchi Identität)*

(e) $0 = d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R \in \Omega^3(M; \mathrm{end}(TM))$*, dh.*

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z} \tag{III.6}$$

oder äquivalent

$$0 = \sum_{\textit{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z). \tag{III.7}$$

Diese Relation wird zweite oder differentielle Bianchi Identität genannt.

Beweis. Die erste Symmetrie (a) ist offensichtlich. Aus Proposition II.5.6(b) erhalten wir (b), denn $\nabla g = 0$. Die Bianchi Identität $d^{\nabla^{\mathrm{end}(TM)}} R = 0$ haben wir allgemeiner in Proposition II.4.2(a) gezeigt, die Reformulierung (III.6) erhalten wir sofort mittels (II.27). Nach Abschnitt II.3 gilt

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} - R_{Y, \nabla_X Z}$$

und wegen der Torsionsfreiheit, $\nabla_X Z = \nabla_Z X - [Z,X]$, daher

$$\big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{\nabla_X Y, Z} + R_{\nabla_Z X, Y} - R_{[Z,X],Y}.$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefert

$$\sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \big(\nabla_X^{\otimes_1^3 TM} R\big)(Y,Z) = \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} \nabla_X^{\mathrm{end}(TM)} R_{Y,Z} - R_{[X,Y],Z},$$

somit folgt (III.7) aus (III.6). Um (d) einzusehen, verwenden wir die Torsionsfreiheit und schreiben R in folgender Form an:

$$\begin{aligned} R_{X,Y} Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X,Y] - [[X,Y],Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_Z \nabla_Y X - [[X,Y],Z] \end{aligned}$$

Summation über zyklische Permutationen von X, Y, Z liefern nun

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = - \sum_{\text{zykl. } X,Y,Z} [[X,Y],Z] = 0,$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Jacobi Identität verwendet haben. Um (c) einzusehen, schreiben wir (d) viermal an:

$$\begin{aligned} 0 &= g(R_{X,Y} Z, W) + g(R_{Y,Z} X, W) + g(R_{Z,X} Y, W) \\ 0 &= g(R_{Y,Z} W, X) + g(R_{Z,W} Y, X) + g(R_{W,Y} Z, X) \\ 0 &= -g(R_{Z,W} X, Y) - g(R_{W,X} Z, Y) - g(R_{X,Z} W, Y) \\ 0 &= -g(R_{W,X} Y, Z) - g(R_{X,Y} W, Z) - g(R_{Y,W} X, Z) \end{aligned}$$

Aufaddieren liefert, unter Verwendung von (a) und (b),

$$0 = 2g(R_{X,Y} Z, W) - 2g(R_{Z,W} X, Y)$$

und somit (c). □

III.1.3. Satz. *Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) sind äquivalent:*

(a) $R=0$, dh. die Levi–Civita Konnexion ist flach.

(b) Lokal um jeden Punkt existiert eine Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$g = du^1 \otimes du^1 + \cdots + du^n \otimes du^n, \tag{III.8}$$

dh. (M,g) ist lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.

In diesem Fall wird die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) flach genannt.

Beweis. Die Implikation (b)⇒(a) ist trivial, siehe Beispiel III.1.10. Für die umgekehrten Implikation (a)⇒(b) fixieren wir $x \in M$. Nach Satz II.4.6 existiert eine offene Umgebung U von x und ein lokaler Rahmen $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ paralleler Vektorfelder, $\nabla X_i = 0$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $X_1(x), \dots, X_n(x)$ eine Orthonormalbasis von T_xM bilden. Aus $\nabla g = 0$ folgt

$$Y \cdot g(X_i, X_j) = g(\nabla_Y X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_Y X_j) = 0 + 0 = 0,$$

für jedes $Y \in \mathfrak{X}(U)$, also ist $g(X_i, X_j)$ lokal konstant. Durch Verkleinern von U können wir also $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ erreichen, dh. $X_1, \dots, X_n$ bilden einen lokalen Orthonormalrahmen. Aus der Torsionsfreiheit der Levi–Civita Konnexion erhalten wir $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 - 0 = 0$, also kommutieren die Flüsse der Vektorfelder X_i, dh. $\mathrm{Fl}^{X_i}_t \circ \mathrm{Fl}^{X_j}_s = \mathrm{Fl}^{X_j}_s \circ \mathrm{Fl}^{X_i}_t$ für hinreichend kleine s und t. Somit liefert

$$u^{-1}(t_1, \dots, t_n) := (\mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}^{X_n}_{t_n})(x)$$

eine lokal um x definierte Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenvektorfeldern $\frac{\partial}{\partial u^i} = X_i$, vgl. den Beweis von Satz II.4.5. Insbesondere bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ einen lokalen Orthonormalrahmen, folglich ist g durch (III.8) gegeben. □

Unter der *Ricci Krümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit verstehen wir folgende Kontraktion des Riemannschen Krümmungstensors

$$\mathrm{Ric} = -\operatorname{tr}_{24} R, \qquad \mathrm{Ric}(X,Y) := -\sum_{i=1}^n g(R_{X,e_i} Y, e_i), \quad X, Y \in T_xM,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, nach Proposition III.1.2(c) symmetrisch,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X), \qquad X, Y \in T_xM,$$

und definiert daher ein Tensorfeld, $\mathrm{Ric} \in \Gamma(S^2 T^*M)$, vom selben Typ wie die Metrik g. Eine weitere Kontraktion führt zur sogenannten *Skalarkrümmung,* $r \in C^\infty(M)$,

$$r := \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric}, \qquad r(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}(e_i, e_i), \quad x \in M,$$

wobei dies wieder unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. Die sogenannte *Schnittkrümmung* ist eine Abbildung, die jedem zwei dimensionalen Teilraum $\xi \subseteq T_xM$, $x \in M$, die Zahl

$$K(\xi) := -g(R_{X,Y}X, Y)$$

zuordnet, wobei X, Y eine Orthonormalbasis von ξ bildet. Dies ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Orthonormalbasis, für eine beliebige Basis X, Y von ξ erhalten wir, vgl. Aufgabe 47,

$$K(\xi) = -\frac{g(R_{X,Y}X, Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \qquad X, Y \text{ Basis von } \xi \subseteq T_xM. \tag{III.9}$$

Der *Einstein Tensor* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch

$$G := \operatorname{Ric} - \tfrac{r}{2} g \in \Gamma(S^2T^*M)$$

definiert, dh. $G(X,Y) = \operatorname{Ric}(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y)$. Beachte, $G(X,Y) = G(Y,X)$.

III.1.4. Lemma. *Der Riemannsche Krümmungstensor R ist durch die Schnittkrümmung K vollständig bestimmt. Ist die Schnittkrümmung bei einem Punkt $x \in M$ konstant, dh. existiert eine Konstante c_x, sodass $K(\xi) = c_x$ für jede Ebene $\xi \subseteq T_xM$, dann gilt schon*

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -c_x\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big), \quad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

und somit auch $\operatorname{Ric}_x = (n-1)c_x g_x$ *und* $r(x) = n(n-1)c_x$.

Beweis. Da dies ein punktweises Problem ist, fixieren wir $x \in M$. Aufgrund von (III.9) bestimmt die Schnittkrümmung K alle Ausdrücke der Form

$$\rho(X,Y) := g(R_{X,Y}X, Y), \qquad X, Y \in T_xM.$$

Mit Hilfe der Symemtrien (a) bis (d) von R in Proposition III.1.2 erhalten wir durch direkte (langwierige) Rechnung [**7**, Lemma 3.3.3]

$$\begin{aligned}
-6g(R_{X,Y}Z, W) = {} & \rho(X+W, Y+Z) - \rho(X+W, Y) - \rho(X+W, Z) \\
& - \rho(X, Y+Z) - \rho(W, Y+Z) + \rho(X,Z) + \rho(W,Y) \\
& - \rho(Y+W, X+Z) + \rho(Y+W, X) + \rho(Y+W, Z) \\
& + \rho(Y, X+Z) + \rho(W, X+Z) - \rho(Y,Z) - \rho(W,X)
\end{aligned}$$

Folglich ist R durch ρ und daher auch durch K bestimmt. Beachte, dass auch R^0,

$$R^0(X,Y,Z,W) := g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z), \qquad X, Y, Z, W \in T_xM,$$

alle Symmetrien von R besitzt, dh. (a) bis (d) in Proposition III.1.2 gelten auch für R^0. Für $\rho^0(X,Y) := R^0(X,Y,X,Y)$ erhalten wir

$$\rho^0(X,Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2,$$

die mit R^0 assozierte "Schnittkrümmung" ist daher konstant, $K^0 = -1$, siehe (III.9). Daraus folgt nun sofort die zweite Behauptung des Lemmas. □

III.1.5. Bemerkung (Riemannsche Flächen)**.** Für 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist der Krümmungstensor R also völlig durch die Skalarkrümmung r bestimmt. Genauer folgt aus Lemma III.1.4, $r = 2K$, $\mathrm{Ric} = Kg$, $G = 0$ und

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -K\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big).$$

Beachte, dass dieses K mit der Gaußkrümmung übereinstimmt, siehe [**3**, Abschnitt 3.7]. Aus Satz II.5.8 erhalten wir den klassischen Satz von Gauß und Bonnet für geschlossene, orientierbare 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K \operatorname{vol} = \chi(M), \tag{III.10}$$

denn für die Euler Form gilt in diesem Fall $e(TM, g, \nabla) = \frac{1}{2\pi} K \operatorname{vol}$, siehe (II.49).

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $A \in \Gamma(\otimes^{k+1} T^*M)$, so definieren wir die *Divergenz,* $\operatorname{div} A \in \Gamma(\otimes^k T^*M)$, durch $\operatorname{div} A := \operatorname{tr}^g_{12}(\nabla A)$, dh

$$(\operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) := \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k), \quad X_i \in T_xM,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM bezeichnet. Dies ist unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis und erfüllt folgende Rechenregeln.

III.1.6. Lemma. *Für $A, B \in \Gamma(\otimes^{k+1} T^*M)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:*

(a) $\operatorname{div}(A + B) = \operatorname{div} A + \operatorname{div} B$
(b) $\operatorname{div}(fA) = f \operatorname{div} A + \operatorname{tr}^g_{12}(df \otimes A)$
(c) $\operatorname{div}(fg) = df$*.*
(d) $\operatorname{div}(a) \operatorname{vol} = d i_{\sharp a} \operatorname{vol} = L_{\sharp \alpha} \operatorname{vol}$*, für* $a \in \Omega^1(M)$*.*
(e) $\int_M \operatorname{div}(a) \operatorname{vol} = 0$*, für* $a \in \Omega^1_c(M)$*.*

Beweis. Die erste Behauptung (a) ist trivial. Um die zweite Relation einzusehen, sei $X_i \in T_xM$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(fA))(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(fA))(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^n f(\nabla_{e_i} A)(e_i, X_1, \dots, X_k) + (e_i \cdot f) A(e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f \operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^n (df \otimes A)(e_i, e_i, X_1, \dots, X_k) \\
&= (f \operatorname{div} A)(X_1, \dots, X_k) + (\operatorname{tr}^g_{12}(df \otimes A))(X_1, \dots, X_k)
\end{aligned}$$

und somit (b). Aus $\nabla g = 0$ erhalten wir $\operatorname{div}(g) = 0$ und mittels (b) daher $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{tr}^g_{12}(df \otimes g) = df$, also (c). Für (d) verwenden wir Aufgabe 46 sowie $\nabla \operatorname{vol} = 0$, und erhalten

$$L_{\sharp a} \operatorname{vol} = di_{\sharp a} \operatorname{vol} = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{\sharp a} \operatorname{vol}) = \sum_{i=1}^n e^i \wedge (i_{\nabla_{e_i}\sharp a} \operatorname{vol})$$

$$= \sum_{i=1}^n e^i(\nabla_{e_i}\sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\nabla \sharp a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}(\sharp_2 \nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{tr}^g(\nabla a) \operatorname{vol} = \operatorname{div}(a) \operatorname{vol}.$$

Die letzte Behauptung folgt aus (d) und dem Satz von Stokes. □

III.1.7. Proposition (Kontrahierte Bianchi Identität)**.** *Der Einstein Tensor einer Riemannsche Mannigfaltigkeit erfüllt*

$$\operatorname{div} G = 0, \qquad \textit{dh. es gilt} \qquad \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \tfrac{1}{2} dr.$$

Beweis. Es sei $e_1, \dots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen. Die Bianchi Identität (III.7) besagt

$$(\nabla_{e_i} R)(e_j, X) + (\nabla_{e_j} R)(X, e_i) + (\nabla_X R)(e_i, e_j) = 0$$

also

$$g\big((\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_i, e_j\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0$$

und mittels der Symmetrien aus Proposition III.1.2

$$-g\big((\nabla_{e_i} R)(e_i, e_j)X, e_j\big) - g\big((\nabla_{e_j} R)(e_j, e_i)X, e_i\big) + g\big((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_i, e_j\big) = 0.$$

Summation über i und j liefert

$$-\sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_i} R)(e_i, X) - \sum_j (\operatorname{tr}_{24} \nabla_{e_j} R)(e_j, X) + \sum_i (\operatorname{tr}_{24} \nabla_X R)(e_i, e_i) = 0$$

Da $\operatorname{tr}_{24}(\nabla_Y R) = \nabla_Y(\operatorname{tr}_{24} R) = -\nabla_Y \operatorname{Ric}$, erhalten wir

$$\sum_i (\nabla_{e_i} \operatorname{Ric})(e_i, X) + \sum_j (\nabla_{e_j} \operatorname{Ric})(e_j, X) - \sum_i (\nabla_X \operatorname{Ric})(e_i, e_i) = 0,$$

also

$$2(\operatorname{div} \operatorname{Ric})(X) = \operatorname{tr}^g(\nabla_X \operatorname{Ric}) = \nabla_X(\operatorname{tr}^g \operatorname{Ric}) = \nabla_X r = X \cdot r = (dr)(X).$$

Dies zeigt die zweite Gleichung, $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr$. Zusammen mit Lemma III.1.6 folgt nun sofort $\operatorname{div} G = 0$. □

III.1.8. Satz (Schur)**.** *Ist (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche n-Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(a) Existiert eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $G = fg$, dann ist f konstant.

Ist darüberhinaus $n \neq 2$, so gilt weiters:[8]

[8] Beachte jedoch, dass (a) für $n = 2$ trivialerweise erfüllt ist, da in diesem Fall ohnenhin stets $G = 0$ gilt, siehe Bemerkung III.1.5.

(b) *Existiert eine Funktion* $f : M \to \mathbb{R}$ *mit* $\mathrm{Ric} = fg$*, dann ist* f *konstant.*
(c) *Existiert eine Funktion* $f : M \to \mathbb{R}$ *mit* $K_x(\xi) = f(x)$ *für alle Ebenen* $\xi \subseteq T_xM$*, dann ist* f *konstant. In anderen Worten: ist die Schnittkrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.*[9]

Beweis. Ad (a): Aus $G = fg$ erhalten wir durch Kontraktion $\operatorname{tr} G = nf$, insbesondere muss f also glatt sein. Mit der kontrahierten Bianchi Identität in Proposition III.1.7 und Lemma III.1.6(c) folgt nun $0 = \operatorname{div} G = \operatorname{div}(fg) = df$, und somit muss f konstant sein. Ad (b): Aus $\mathrm{Ric} = fg$ folgt $G = (f - \frac{r}{2})g$ und mittels (a) sehen wir, dass $f - \frac{r}{2}$ konstant sein muss. Kontraktion liefert weiters $r = \operatorname{tr}^g \mathrm{Ric} = \operatorname{tr}^g(fg) = nf$. Da $n \neq 2$ vorausgesetzt wurde, impliziert dies, dass auch f konstant ist. Ad (c): Mittels Lemma III.1.4 erhalten wir in diesem Fall $\mathrm{Ric} = (n-1)fg$, die Behauptung folgt daher aus (b). □

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi–Civita Konnexion ∇ und Riemannschen Krümmungstensor R. Weiters bezeichne $S \subseteq M$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Mittels $g|_S \in \Gamma(S^2T^*M|_S)$ erhalten wir eine orthogonale Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$. Die Einschränkung von $g|_S$ auf TS liefert eine Riemannsche Metrik $g_S \in \Gamma(S^2T^*S)$ auf S. Die Einschränkung von $g|_S$ auf $T^\perp S$ liefert eine Euklidische Metrik $g^\perp \in \Gamma(S^2(T^\perp S)^*)$ auf dem Normalenbündel $T^\perp S$. Wir bezeichnen die assozierten Orthogonalprojektionen mit $P : TM|_S \to TS$ und $Q : TM|_S \to T^\perp S$. Betrachte folgende die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\nabla^S_X Y &:= P(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\mathrm{II}(X, Y) &:= Q(\nabla_X Y), && X, Y \in \mathfrak{X}(S),\\
\nabla^\perp_X \xi &:= Q(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)\\
B_X(\xi) &:= -P(\nabla_X \xi), && X \in \mathfrak{X}(S),\ \xi \in \Gamma(T^\perp S)
\end{aligned}$$

Dabei wird II als *zweite Fundamentalform* bezeichnet, und B heißt *Weingartenabbildung.*

III.1.9. Satz. *Für* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ *und* $\xi, \eta \in \Gamma(T^\perp S)$ *gilt:*
(a) ∇^S *ist eine torsionsfreie mit* g_S *kompatible lineare Konnexion auf* TS *und stimmt daher mit der Levi–Civita Konnexion von* (S, g_S) *überein.*
(b) $\nabla^\perp$ *ist eine mit* $g^\perp$ *kompatible lineare Konnexion auf* $T^\perp S$*.*
(c) *Die zweite Fundamentalform* II *bildet ein Tensorfeld auf* S*, genauer haben wir* $\mathrm{II} \in \Gamma(S^2T^*S \otimes T^\perp S)$*, insbesondere also* $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X)$*.*

[9] Auch die ersten beiden Aussagen lassen sich ähnlich interpretieren. Etwa können wir die Ricci Krümmung äquivalent als eine Abbildung auffassen, die jeder Geraden $\xi \subseteq T_xM$ die Zahl $\mathrm{Ric}(X, X)/g(X, X)$ zuordnet, wobei X eine Basis des 1-dimensionalen Teilraums ξ bildet. Dies ist offensichtlich unabhängig vom verwendeten Basisvektor und enthält die volle Information über den Riccitensor, da dieser symmetrisch ist (Polarisieren). Behauptung (b) lässt sich daher auch wie folgt formulieren: ist die Riccikrümmung punktweise konstant, dann ist sie schon global konstant.

(d) *Die Weingartenabbildung B bildet ein Tensorfeld auf S, genauer haben wir $B \in \Gamma(T^*S \otimes (T^\perp S)^* \otimes TS)$, und es gilt die sogenannte* Weingarten Gleichung $g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) = g_S(Y, B_X\xi)$.

(e) *Bezeichnet R^S die Riemannkrümmung von (S, g_S), dann gilt die sogenannte* Gauß Gleichung, *vgl.* [**3**, Abschnitt 3.7],

$$g(R_{X,Y}Z,W) = g_S(R^S_{X,Y}Z,W) \\ + g^\perp\big(\mathrm{II}(X,Z),\mathrm{II}(Y,W)\big) - g^\perp\big(\mathrm{II}(Y,Z),\mathrm{II}(X,W)\big).$$

(f) *Bezeichnet $R^\perp$ die Krümmung der Konnexion $\nabla^\perp$ auf $T^\perp S$, dann gilt*

$$g(R_{X,Y}\xi,\eta) = g^\perp(R^\perp_{X,Y}\xi,\eta) - g_S(B_Y\xi, B_X\eta) + g_S(B_X\xi, B_Y\eta).$$

(g) *Es gilt die Codazzi–Mainardi Gleichung,*

$$g(R_{X,Y}Z,\xi) = g^\perp\big((\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z),\xi\big) - g^\perp\big((\tilde\nabla_Y \mathrm{II})(X,Z),\xi\big)$$

wobei $\tilde\nabla$ die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $S^2T^*S \otimes T^\perp S$ induziert Konnexion bezeichnet, dh. $(\tilde\nabla_X \mathrm{II})(Y,Z) = \nabla^\perp_X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(\nabla^S_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, \nabla^S_X Z)$.

Beweis. Offensichtlich sind alle vier Ausdrücke $C^\infty(M)$ linear in X. Wenden wir auf die Gleichung $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X\cdot f)Y$ die Projektion P and so erhalten wir $\nabla^S_X(fY) = f\nabla^S_X Y + (X\cdot f)Y$, denn $P(Y) = Y$. Anwenden von Q liefert $\mathrm{II}(X, fY) = f\,\mathrm{II}(X,Y)$, denn $Q(Y) = 0$. Analog erhalten wir aus $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X\xi + (X\cdot f)\xi$ durch Anwenden von Q bzw. P die Gleichungen $\nabla^\perp_X(f\xi) = f\nabla^\perp_X\xi + (X\cdot f)\xi$ und $B_X(f\xi) = fB_X(\xi)$, denn $Q(\xi) = \xi$ und $P(\xi) = 0$. Wir schließen daraus, dass ∇^S und $\nabla^\perp$ lineare Konnexionen darstellen, und II und B Tensorfelder sind.

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$. Wenden wir darauf P folgt $\nabla^S_X Y - \nabla^S_Y X - [X,Y] = 0$, denn $P([X,Y]) = [X,Y]$. Somit ist auch ∇^S torsionsfrei. Wenden wir auf die selbe Gleichung Q an, so erhalten wir $\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = 0$, denn $Q([X,Y]) = 0$, also ist $\mathrm{II}(X,Y)$ symmetrisch in X und Y.

Wegen $\nabla g = 0$ gilt $Z\cdot g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ und somit auch $Z\cdot g_S(X,Y) = g_S(\nabla^S_Z X, Y) + g_S(X, \nabla^S_Z Y)$, also ist ∇^S mit g_S verträglich. Analog folgt aus $Z\cdot g(\xi,\eta) = g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta)$, dass $\nabla^\perp$ mit $g^\perp$ kompatibel ist. Schließlich erhalten wir aus $0 = X\cdot g(Y,\xi) = g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)$ auch $0 = g^\perp(\mathrm{II}(X,Y),\xi) - g(Y, B_X\xi)$.

Damit sind (a) bis (d) gezeigt. Darüberhinaus gilt bezüglich der orthogonalen Zerlegung $TM|_S = TS \oplus T^\perp S$,

$$\nabla^{TM|_S} = \nabla^S \oplus \nabla^\perp + \begin{pmatrix} 0 & -B \\ \mathrm{II} & 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir die Matrix als Element in $\Omega^1\big(S;\operatorname{end}(TS\oplus T^\perp S)\big)$ auffassen. Aus Proposition II.4.2(c)&(d) erhalten wir daraus

$$R^{TM|_S}=\begin{pmatrix}R^S&0\\0&R^\perp\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-d^{\nabla''}B\\d^{\nabla'}\mathrm{II}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B\wedge\mathrm{II}&0\\0&\mathrm{II}\wedge B\end{pmatrix}\tag{III.11}$$

wobei ∇' bzw. ∇'' die von ∇^S und $\nabla^\perp$ auf $\hom(TS,T^\perp S)$ bzw. $\hom(T^\perp S,TS)$ induzierten Konnexionen bezeichnen. Die beiden Gleichungen für die Diagonaleinträge liefern zusammen mit der Weingartengleichung (d) sofort (e) und (f). Wegen der Torsionsfreiheit gilt weiters $(d^{\nabla'}\mathrm{II})(X,Y,Z)=(\tilde\nabla_X\mathrm{II})(Y,Z)-(\tilde\nabla_Y\mathrm{II})(X,Z)$, folglich liefert der linke untere Eintrag in (III.11) die Codazzi–Mainardi Gleichung (g). □

Unter einer (lokalen) *Isometrie* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) verstehen wir einen (lokalen) Diffeomorphismus $f\in\operatorname{Diff}(M)$ mit $f^*g=g$. Offensichtlich bildet die Menge aller Isometrien eine Untergruppe von $\operatorname{Diff}(M)$, die wir mit $\operatorname{Isom}(M,g)$ bezeichnen. Für jede Isometrie f gilt $f^*\nabla=\nabla$, denn die zurückgezogene Konnexion $f^*\nabla$ ist mit g kompatibel, $(f^*\nabla)g=(f^*\nabla)(f^*g)=f^*(\nabla g)=f^*0=0$, und torsionsfrei, $\operatorname{Tor}^{f^*\nabla}(f^*X,f^*Y)=(f^*\nabla)_{f^*X}(f^*Y)-(f^*\nabla)_{f^*Y}(f^*X)-[f^*X,f^*Y]=f^*(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y])=f^*\operatorname{Tor}^\nabla(X,Y)=f^*0=0$, und muss daher wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 mit der Levi–Civita Konnexion übereinstimmen, dh. $f^*\nabla=\nabla$. Für die Krümmung folgt $f^*R=R$, $f^*\operatorname{Ric}=\operatorname{Ric}$, $f^*r=r$ und $f^*K=K$, genauer $K(T_xf\cdot\xi)=K(\xi)$, für jede Ebene $\xi\subseteq T_xM$.

Der Fluss eines Vektorfeldes X ist genau dann eine (lokale) Isometrie, wenn $L_Xg=0$ gilt, denn $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Fl}^X_t)^*g=(\mathrm{Fl}^X_t)^*(L_Xg)$. Solche Vektorfelder werden *Killing Vektorfelder,* genannt sie können als *infinitesimale Isometrien* interpretiert werden. Eine einache Rechnung, vgl. Aufgabe 50, zeigt

$$L_Xg=2\operatorname{sym}\nabla X,\quad\text{dh.}\quad(L_Xg)(Y,Z)=g(\nabla_YX,Z)+g(\nabla_ZX,Y).\tag{III.12}$$

Killing Vektorfelder sind daher durch die Gleichung $\operatorname{sym}\nabla X=0$ charakterisiert. Insbesondere ist jedes parallele Vektorfeld $\nabla X=0$ auch ein Killing Vektorfeld.

III.1.10. Beispiel (Euklidische Geometrie, $K=0$)**.** Betrachte den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Riemannschen Metrik

$$g=dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^n\otimes dx^n.$$

Die triviale Konnexion auf $T\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich mit g kompatibel und torsionsfrei. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.1.1 sehen wir daher, dass die Levi–Civita Konnexion von $(\mathbb{R}^n,g)$ mit der trivialen Konnexion übereinstimmt. Insbesondere sind die Koordinatenvektorfelder parallel, dh. $\nabla\frac{\partial}{\partial x^i}=0$, und daher $R=0$. Der flache Euklidische Raum hat daher konstante Schnittkrümmung $K=0$. Beachte, dass jede affine Abbildung $f(x)=Ax+b$ mit $A\in\mathrm{O}_n$ und $b\in\mathbb{R}^n$, eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n,g)$ ist.

Analog sieht man, dass der sogenannte *flache Torus*, $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ mit Riemannscher Metrik $g := \theta^1 \otimes \theta^1 + \cdots + \theta^n \otimes \theta^n$, eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K = 0$ darstellt. Hier ist $\theta^i := p_i^* \theta \in \Omega^1(T^n)$, wobei $p_i : T^n \to S^1$ die Projektion auf die i-te Koordinate und $\theta \in \Omega^1(S^1)$ die standard Winkelform bezeichnen. Beachte, dass die glatte Überlagerung $\mathbb{R}^n \to T^n$ eine lokale Isometrie bildet.

III.1.11. Beispiel (Sphärische Geometrie, $K > 0$)**.** Es sei $r > 0$ und es bezeichne $S := S^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ die Sphäre mit Radius r. Wir versehen S^n_r mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $g = \sum_{i=0}^n dx^i \otimes dx^i$ induzierten Riemannschen Metrik g_S. Betrachte das radiale Vektorfeld $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, $N(x) := x = \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Beachte, dass N normal auf S steht, und $g^\perp(N, N) = r^2$ gilt. Aus $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ folgt $\nabla N = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$, und mit Hilfe der Weingartengleichung, siehe Proposition III.1.9(d), daher $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$. Zusammen mit der Gauß Gleichung aus Proposition III.1.9(e), liefert dies

$$0 = g_S(R^S_{X,Y} X, Y) + \tfrac{1}{r^2} g_S(X, X) g_S(Y, Y) - \tfrac{1}{r^2} g_S(X, Y) g_S(X, Y).$$

Daraus folgt nun, dass S^n_r konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, dass jedes $A \in \mathrm{O}_{n+1}$ eine Isometrie von S^n_r darstellt, dh. $\mathrm{O}_{n+1} \subseteq \mathrm{Isom}(S^n_r)$. Wir werden später sehen, dass jede Isometrie der Sphäre von dieser Form ist, dh. $\mathrm{O}_{n+1} = \mathrm{Isom}(S^n_r)$.

III.1.12. Beispiel (Hyperbolische Geometrie, $K < 0$)**.** Betrachte wieder $\mathbb{R}^{n+1}$, nun aber mit der pseudo Riemannschen Metrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$. Für $r > 0$ bildet das Hyperboloid $S = H^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x, x) = -r^2\}$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit und g induziert eine (positiv definite) Riemannsche Metrik g_S auf H^n_r. Wie im vorangehenden Beispiel folgt $\mathrm{II} = -\frac{1}{r} g_S \otimes N$, jedoch gilt nun $g^\perp(N, N) = -r^2$, denn $g^\perp$ ist negativ definit. Aus der Gauß Gleichung folgt dann wie zuvor, dass H^n_r konstante Schnittkrümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ besitzt. Beachte, $\mathrm{O}(1, n) \subseteq \mathrm{Isom}(H^n_r)$, tatsächlich gilt auch hier wieder Gleichheit.

III.1.13. Proposition (Variationsformeln)**.** *Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Volumsform* vol*, Levi–Civita Konnexion ∇, und assozierten Krümmungstensoren R,* Ric *und r. Weiters sei g_t, $t \in \mathbb{R}$, eine glatte Familie von Riemannmetriken auf M mit $g_0 = g$, und es bezeichne $\dot g := \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2 T^* M)$. Schließlich definieren wir auf $S^2 T^* M$ eine Euklidische Metrik*

$$\langle h, k\rangle := \operatorname{tr}\operatorname{tr}_{13}(h \otimes k) = \sum_{i,j=1}^n h(e_i, e_j) k(e_i, e_j), \qquad h, k \in S^2 T^*_x M,$$

wobei dies unabhängig von der Orthonormalbasis e_i ist. In dieser Situation gelten die folgenden Variationsformeln, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $\dot{\mathrm{vol}} := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \mathrm{vol}^{g_t} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \dot g = \frac{1}{2} \langle g, \dot g\rangle$.

(b) Mit $\dot\nabla := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \nabla^{g_t} \in \Gamma(S^2T^*M \otimes TM)$ *gilt*

$$g(\dot\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big((\nabla_X \dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z \dot g)(X,Y)\Big).$$

und daher auch $\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla = \frac{1}{2} d\operatorname{tr}(\dot g)$ *und* $\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla = \operatorname{div}\dot g - \frac{1}{2} d\operatorname{tr}(\dot g)$.

(c) Mit $\dot R := \frac{\partial}{\partial t}|_0 R^{g_t}$ *gilt* $\dot R_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot\nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y \dot\nabla)(X,Z)$.

(d) Mit $\dot r := \frac{\partial}{\partial t}|_0 r^{g_t}$ *gilt*

$$\dot r = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla) - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla) = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{div}\operatorname{div}\dot g + \Delta\operatorname{tr}(\dot g),$$

wobei wird der Laplace Operator auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ *durch* $\Delta f := -\operatorname{div} df = -\operatorname{tr}\nabla\nabla f$ *definiert ist.*

Beweis. Es sei $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte orthonormale Basis von T_xM bezüglich $g = g_0$, und es bezeichnet $e^1, \dots, e^n \in T_x^*M$ die duale Basis, $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Für beliebiges t gilt dann

$$\operatorname{vol}_x^{g_t} = \sqrt{\det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big)}\, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n. \qquad \text{(III.13)}$$

Zusammen mit $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \det\big(g_t(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}\big(\dot g(e_i,e_j)_{ij}\big) = \operatorname{tr}(\dot g) = \langle g, \dot g\rangle$ folgt nun (a). Ableiten von (III.4) liefert

$$\begin{aligned} g(\dot\nabla_X Y, Z) + \dot g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\Big(X\cdot \dot g(Y,Z) + Y\cdot\dot g(Z,X) - Z\cdot \dot g(X,Y) \\ &\qquad + \dot g([X,Y],Z) - \dot g([Y,Z],X) + \dot g([Z,X],Y)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((\nabla_X\dot g)(Y,Z) + (\nabla_Y \dot g)(Z,X) - (\nabla_Z\dot g)(X,Y) \\ &\qquad + 2\dot g(\nabla_X Y, Z)\Big)\end{aligned}$$

und damit (b). Aus Proposition II.4.2(c) erhalten wir $\dot R = d^\nabla \dot\nabla$, dh.

$$\dot R_{X,Y} Z = (\nabla_X \dot\nabla_Y) Z - (\nabla_Y \dot\nabla_X)Z - \dot\nabla_{[X,Y]} Z.$$

Kombinieren wir dies mit $(\nabla_X\dot\nabla)(Y,Z) = (\nabla_X\dot\nabla_Y)Z - \dot\nabla_{\nabla_X Y} Z$ und $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ so folgt (c). Da $\operatorname{Ric}^{g_t} = -\operatorname{tr}_{24} R^{g_t}$ gilt $\dot{\operatorname{Ric}} = -\operatorname{tr}_{24}\dot R$. Weiters haben wir $r^{g_t} = \operatorname{tr}^{g_t}\operatorname{Ric}^{g_t} = \operatorname{tr}(\sharp_2^{g_t}\operatorname{Ric}^{g_t})$ und somit

$$\dot r = \operatorname{tr}(\dot\sharp_2 \operatorname{Ric}) + \operatorname{tr}(\sharp_2 \dot{\operatorname{Ric}}) = -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle + \operatorname{tr}\dot{\operatorname{Ric}} = -\langle\operatorname{Ric},\dot g\rangle - \operatorname{tr}\operatorname{tr}_{24}\dot R.$$

Kombinieren wir dies mit (c) so erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot r &= -\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle - \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_i}\dot\nabla)(e_j,e_i),e_j\big) + \sum_{i,j=1}^n g\big((\nabla_{e_j}\dot\nabla)(e_i,e_i),e_j\big), \\ &= -\langle \operatorname{Ric},\dot g\rangle - \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{23}\dot\nabla) + \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12}\dot\nabla),\end{aligned}$$

denn die Levi–Civita Konnexion vertauscht mit Kontraktionen. □

III.1.14. Beispiel (Einstein–Hilbert Wirkung)**.** Es sei M eine orientierte (geschlossene) Mannigfaltigkeit. Zu jeder Riemannschen Metrik g auf M betrachte

$$E(g) := \int_M r \operatorname{vol}, \tag{III.14}$$

wobei r und vol die Skalarkrümmung und Volumsform von g bezeichnen. Wir wollen nun die kritischen Punkte dieser Wirkung bestimmen. Dazu betrachten wir eine beliebige glatte 1-parameter Familie Riemannscher Metriken g_t (Variation der Metrik) mit $g_0 = g$. Setzen wir $\dot g = \frac{\partial}{\partial t}|_0 g_t \in \Gamma(S^2T^*M)$, so erhalten wir mit Hilfe von Proposition III.1.13(a)&(d) und Lemma III.1.6(e),

$$\begin{aligned}\dot E := \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 E(g_t) &= \int_M \dot r \operatorname{vol} + r \dot{\operatorname{vol}} \\ &= -\int_M \langle \operatorname{Ric} - \tfrac{r}{2} g, \dot g\rangle \operatorname{vol} + \int_M \operatorname{div}(\operatorname{tr}_{12} \dot\nabla - \operatorname{tr}_{23} \dot\nabla) \operatorname{vol} = -\int_M \langle G, \dot g\rangle \operatorname{vol},\end{aligned}$$

wobei $G = \operatorname{Ric} - \frac{r}{2} g$ den Einsteintensor von g bezeichnet. Ist g kritisch, so muss $\dot E$, für jede solche Variation der Metrik verschwinden. Insbesondere können wir $g_t := g + tG$ betrachten, und erhalten aus obiger Formel $\int_M \langle G, G\rangle \operatorname{vol} = 0$, also $G = 0$. Wir sehen daher, dass die kritischen Punkte der Einstein–Hilbert Wirkung (III.14) genau die Riemannschen Metriken g mit verschwindendem Einsteintensor sind, $G = 0$. Für $\dim M \neq 2$ ist die Gleichung $G = 0$ zu $\operatorname{Ric} = 0$ äquivalent, denn $\operatorname{tr} G = (1 - \frac{n}{2}) r$. Beachte, dass nach dem Satz von Gauß–Bonnet, siehe (III.10), die Wirkung $E(g)$ im 2-dimensionalen Fall unabhängig von g ist. Dies ist mit obiger Rechnung verträglich, denn im 2-dimensionalen Fall gilt ja stets $G = 0$, vgl. Bemerkung III.1.5.

III.1.15. Beispiel (Minimalflächen)**.** Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder (geschlossenen) orientierten Teilmannigfaltigkeit S ordnen wir ihr induziertes Volumen zu,

$$V(S) := \int_S \operatorname{vol}_S^g, \tag{III.15}$$

wobei vol_S^g die Volumsform der auf S von g induzierten Riemannschen Metrik g_S bezeichnet. Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Variation der Teilmannigfaltigkeit $S_t := \operatorname{Fl}_t^X(S)$, definiert für hinreichend kleines t. Mit Hilfe von (III.12) und Proposition III.1.13(a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_{S_t} \operatorname{vol}_{S_t}^g = \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 \int_S \operatorname{vol}_S^{(\operatorname{Fl}_t^X)^* g} \\ &= \frac{1}{2} \int_S \operatorname{tr}_S\big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 (\operatorname{Fl}_t^X)^* g\big) \operatorname{vol}_S^g = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{tr}_S(L_X g) \operatorname{vol}_S^g = \int_S \operatorname{tr}_S(\nabla X) \operatorname{vol}_S^g .\end{aligned}$$

Zerlegen wir nun X längs S in Tangential- und Normalteil, $X|_S = PX + QX$, dann folgt aus der Weingartengleichung $\operatorname{tr}_S(\nabla X) = \operatorname{tr}_S(\nabla(PX)) + \operatorname{tr}_S(\nabla(QX)) =$

$\operatorname{div}_S(X) - g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)$ und somit

$$\tfrac{\partial}{\partial t}|_0 V(S_t) = \int_S \operatorname{div}(PX)\operatorname{vol}_S^g - \int_S g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)\operatorname{vol}_S^g = -\int_S g^\perp(\operatorname{tr}\mathrm{II}, QX)\operatorname{vol}_S^g.$$

Die kritischen Punkte von (III.15) sind daher genau jene Teilmannigfaltigkeiten S, deren *mittlere Krümmung* $H := \operatorname{tr}\mathrm{II} \in \Gamma(T^\perp S)$ verschwindet.

III.1.16. Bemerkung (Kartendarstellungen)**.** Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann existieren $g_{ij} \in C^\infty(U)$ mit

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Für jedes $x \in U$ bildet daher $g_{ij}(x)$ eine symmetrische positiv definite Matrix, $g_{ij} = g_{ji}$. Unter den mit der Karte u assozierten *Christoffel Symbolen* verstehen wir die durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \tfrac{\partial}{\partial u^j} =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial u^k}$$

eindeutig bestimmten lokal definierten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Aus der Formel für die Levi–Civita Konnexion (III.4) erhalten wir sofort

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial u^j} g_{li} - \tfrac{\partial}{\partial u^l} g_{ij}\Big) \qquad \text{(III.16)}$$

wobei $g^{kl}(x)$ die zu $g_{ij}(x)$ inverse Matrix bezeichnet, $x \in U$, dh. $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Da die Levi–Civita Konexion torsionsfrei ist, gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Kartendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors $R_{ijk}^l \in C^\infty(U)$

$$R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k} =: \sum_{l=1}^n R_{kij}^l \tfrac{\partial}{\partial u^l},$$

Aus (III.5) erhalten wir sofort

$$R_{kij}^l = \tfrac{\partial}{\partial u^i}\Gamma_{jk}^l - \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \Big(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l\Big) \qquad \text{(III.17)}$$

was, zusammen mit (III.16) die Berechung von R erlaubt, wenn die Koordinatendarstellung g_{ij} der Metrik bekannt ist. Beachte, dass die Riemannkrümmung R in nicht linearer Weise von Ableitungen bis zweiter Ordnung der Metrik g abhängt. Mit

$$R_{lkij} := g\big(R_{\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}} \tfrac{\partial}{\partial u^k}, \tfrac{\partial}{\partial u^l}\big) = \sum_{m=1}^n R_{kij}^m g_{ml}$$

lassen sich die Symmetrien in Proposition III.1.2 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} R_{lkij} &= -R_{lkji} \\ R_{lkij} &= -R_{klij} \\ R_{lkij} &= R_{ijlk} \\ 0 &= R_{lkij} + R_{lijk} + R_{ljki} \end{aligned}$$

III.2. Hodge Theorie. Es sei M eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Riemannsche Metrik induziert Euklidische Metriken auf den Vektorbündeln $\Lambda^q T^*M$, die wie folgt charakterisiert werden können. Ist $e_1, \dots, e_n \in T_xM$ eine Orthonormalbasis von T_xM, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ die duale Basis von T_x^*M, dann bilden $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$, eine Orthonormalbasis von $\Lambda^q T_x^*M$. Wir werden dieses innere Produkt auf $\Lambda^q T_x^*M$ im folgenden mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen. Für $\alpha, \beta \in \Omega^q(M)$ erhalten wir daher $\langle \alpha, \beta \rangle \in C^\infty(M)$.

Unter dem *Hodge Sternoperator* verstehen wir den durch folgende Bedingung eindeutig charakterisierten Vektorbündelisomorphismus

$$\star : \Lambda^q T^*M \to \Lambda^{n-q} T^*M, \qquad \alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol}. \tag{III.18}$$

Dies ist tatsächlich wohldefiniert, denn $\Lambda^q T_x^*M \times \Lambda^{n-q} T_x^*M \xrightarrow{\wedge} \Lambda^n T_x^*M \cong \mathbb{R}$, ist eine nicht-degenerierte bilineare Paarung. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von T_xM, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ die duale (orthonormale) Basis von T_x^*M, dann erhalten wir aus (III.18) und $\operatorname{vol}_x = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$, sofort

$$\star\, e^1 \wedge \cdots \wedge e^q = e^{q+1} \wedge \cdots \wedge e^n, \tag{III.19}$$

insbesondere also $\star f = f \operatorname{vol}$ für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Aus (III.19) folgt weiters

$$\star^2 = (-1)^{q(n-q)} : \Lambda^q T^*M \to \Lambda^q T^*M, \qquad \star\star\,\alpha = (-1)^{|\alpha|(n-|\alpha|)}\alpha. \tag{III.20}$$

Auf $\Omega_c^q(M)$ definieren wir ein inneres Produkt

$$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol} = \int_M \alpha \wedge \star\beta, \qquad \alpha, \beta \in \Omega_c^q(M). \tag{III.21}$$

Dies ist offensichlich bilinear und symmetrisch, es gilt aber auch $\langle\!\langle \alpha, \alpha \rangle\!\rangle \geq 0$ sowie $\langle\!\langle \alpha, \alpha \rangle\!\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. Dadurch wird $\Omega_c^q(M)$ also zu einem reellen (nicht vollständigen) PräHilbertraum.

Unter der sogenannten *Koableitung* verstehen wir den Operator

$$\delta := (-1)^q \star^{-1} d\star : \Omega^q(M) \to \Omega^{q-1}(M), \qquad \delta\alpha = (-1)^{|\alpha|} \star^{-1} d \star \alpha. \tag{III.22}$$

Die Vorzeichenkonvention ist durch folgendes Lemma motiviert.

III.2.1. Lemma. *Die Koableitung ist formal adjungiert zum deRham Differential, dh. es gilt $\langle\!\langle d\alpha, \beta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha, \delta\beta \rangle\!\rangle$, für alle $\alpha \in \Omega_c^{q-1}(M)$ und $\beta \in \Omega^q(M)$.*

Beweis. Mit Hilfe der Leibnizregel und des Satzes von Stokes erhalten wir aus (III.21) und (III.22) sofort

$$\begin{aligned}\langle\!\langle d\alpha, \beta\rangle\!\rangle = \int_M d\alpha \wedge \star\beta = \int_M d(\alpha \wedge \star\beta) + (-1)^q \alpha \wedge d \star \beta \\ = (-1)^q \int_M \alpha \wedge \star\star^{-1} d \star \beta = \int_M \alpha \wedge \star\delta\beta = \langle\!\langle \alpha, \delta\beta\rangle\!\rangle,\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Aus der Definition der Koableitung (III.22) und $d^2 = 0$, erhalten wir weiters

$$\delta^2 = 0, \quad \text{dh.} \quad \delta\delta\alpha = 0. \tag{III.23}$$

Unter dem *Hodge–Laplace Operator* auch *Laplace–Beltrami* oder *deRham–Laplace Operator*, verstehen wir

$$\Delta := d\delta + \delta d = (d + \delta)^2 : \Omega^q(M) \to \Omega^q(M). \tag{III.24}$$

Aus Lemma III.2.1 sehen wir, dass Δ formal selbstadjungiert ist, dh. es gilt

$$\langle\!\langle \Delta\alpha, \beta\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha, \Delta\beta\rangle\!\rangle, \qquad \alpha \in \Omega^q_c(M),\ \beta \in \Omega^q(M). \tag{III.25}$$

Darüber hinaus ist Δ positiv semidefinit, dh. es gilt

$$\langle\!\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\!\rangle \geq 0, \qquad \alpha \in \Omega^q_c(M),$$

denn aus Lemma III.2.1 folgt sofort $\langle\!\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\!\rangle = \langle\!\langle d\alpha, d\alpha\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \delta\alpha, \delta\alpha\rangle\!\rangle$. Aus dieser Gleichung erhalten wir auch

$$\ker \Delta = \ker(d + \delta) = \ker d \cap \ker \delta. \tag{III.26}$$

Beachte weiters die Relationen

$$d\Delta = \Delta d, \quad \delta\Delta = \Delta\delta \quad \text{und} \quad \star\,\Delta = \Delta\,\star\,. \tag{III.27}$$

Weitere Details zu diesen Betrachtungen finden sich etwa in [**6**, Kapitel 12].

III.2.2. Satz (Hodge Zerlegung)**.** *Ist M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so haben wir eine orthogonale Zerlegung*

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \Delta.$$

Beweis. Beachte zunächst, dass die Inklusion $\ker \Delta \to \ker d$, siehe (III.26), eine injektive lineare Abbildung $\ker \Delta \to H^*(M)$ induziert, denn nach (III.26) und Lemma III.2.1 gilt $\ker \Delta \cap \operatorname{img} d \subseteq \ker \delta \cap \operatorname{img} d \subseteq \ker \delta \cap (\ker \delta)^\perp = 0$. Wir sehen daher, dass $\ker \Delta$ endlich dimensional ist, denn nach Korollar I.3.26 ist $H^*(M)$ endlich dimensional. Daraus erhalten wir eine orthogonale Zerlegung

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus (\ker \Delta)^\perp,$$

denn mit Hilfe einer Orthonormalbasis $\beta_1, \dots, \beta_N$ von $\ker \Delta$ lässt sich jede Form $\alpha \in \Omega^*(M)$ als

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \langle\!\langle \alpha, \beta_i \rangle\!\rangle \beta_i + \Big(\alpha - \sum_{i=1}^N \langle\!\langle \alpha, \beta_i \rangle\!\rangle \beta_i \Big)$$

schreiben, wobei der erste Summand in $\ker \Delta$, und der zweite in $(\ker \Delta)^\perp$ liegt. Aus (III.25) folgt weiters $\ker \Delta = (\operatorname{img} \Delta)^\perp$. Könnten wir daraus $(\ker \Delta)^\perp = \operatorname{img} \Delta$ schließen, so wäre der Beweis vollständig. Dieser Schritt lässt sich tatsächlich durführen, erfordert jedoch einige nicht-triviale analytische Überlegungen. Details finden sich etwa in [**12**, Theorem 5.5], [**7**, Section 2.2] oder [**11**]. Die oben erwähnte Analysis zeigt auch, dass $\ker \Delta$ endlich dimensional ist, ohne auf Korollar I.3.26 zurückzugreifen. □

III.2.3. Korollar (Hodge Zerlegung)**.** *Ist M eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so haben wir eine orthogonale Zerlegungen*

$$\Omega^*(M) = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta. \tag{III.28}$$

Darüber hinaus gilt:

(a) $\operatorname{img} \Delta = \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta$
(b) $\ker d = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d$
(c) $\ker \delta = \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \delta$

Beweis. Aus Lemma III.2.1 folgt $\operatorname{img} d \perp \ker \delta$ und $\ker d \perp \operatorname{img} \delta$. Da $\operatorname{img} d \subseteq \ker d$ erhalten insbesondere $\operatorname{img} d \perp \operatorname{img} \delta$. Zusammen mit (III.26) folgt weiters $\ker \Delta \perp \operatorname{img} d$ und $\ker \Delta \perp \operatorname{img} \delta$. Alle Summen im Korollar sind daher orthogonal und somit auch direkt.

Aus $\operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta \perp \ker \Delta$ und Satz III.2.2 folgt $\operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta \subseteq \operatorname{img} \Delta$ und somit (a), denn die umgekehrte Inklusion $\operatorname{img} \Delta \subseteq \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} \delta$ ist offensichtlich. Zusammen mit Satz III.2.2 erhalten wir nun auch die Zerlegung (III.28). Aus $\ker d \perp \operatorname{img} \delta$ und (III.28) folgt $\ker d \subseteq \ker \Delta \oplus \operatorname{img} d$ und somit (b), denn die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich. Analog erhalten wir aus $\ker \delta \perp \operatorname{img} d$ und (III.28) nun $\ker \delta \subseteq \ker \Delta \oplus \operatorname{img} \delta$ und daher (c). □

Eine Differentialform $\alpha \in \Omega^q(M)$ wird *harmonisch* genannt, falls $\Delta \alpha = 0$. Nach (III.26) ist dies zu $d\alpha = 0 = \delta \alpha$ äquivalent. Aus Korollar III.2.3(b) erhalten wir sofort folgendes Resultat.

III.2.4. Korollar. *Auf einer geschlossenen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt jede deRham Kohomologieklasse einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten, dh.* $H^*(M) = \ker \Delta = \ker(d + \delta) = \ker d \cap \ker \delta$.

III.2.5. Bemerkung. Aus Korollar III.2.4 erhalten wir einen neuen Beweis der Poincaré Dualität für geschlossene orientierte Mannigfaltigkeiten. Nach (III.27) induziert der Hodge Sternoperator nämlich einen Isomorphismus $\star : \ker \Delta \cong \ker \Delta$, und liefert daher Isomorphismen $H^q(M) \cong H^{n-q}(M)$.

III.2.6. Lemma. *Ist e_j ein lokaler Orthonormalrahmen von TM, dann gilt*

$$\delta\alpha = -\sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M).$$

Beweis. Wir erinnern uns zunächst an die Formel, siehe Aufgabe 46,

$$d\alpha = \sum_j e^j \wedge \nabla_{e_j}\alpha, \qquad \alpha \in \Omega^q(M), \tag{III.29}$$

wobei e^j den zu e_j dualen lokalen Orthonormalrahmen von T^*M bezeichnet. Weiters gilt

$$\nabla\star = 0, \quad \text{dh.} \quad \nabla_X(\star\alpha) = \star\nabla_X\alpha, \quad \alpha \in \Omega^q(M),\ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{III.30}$$

Dies lässt sich durch Ableiten der definierenden Gleichung $\beta \wedge \star\alpha = \langle\beta,\alpha\rangle \operatorname{vol}$, vgl. (III.18), verifizieren. Daraus folgt nämlich unter Verwendung von $\nabla_X \operatorname{vol} = 0$,

$$\begin{aligned}\nabla_X\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge \nabla_X(\star\alpha) &= \nabla_X\big(\beta \wedge \star\alpha\big) = \nabla_X\big(\langle\beta,\alpha\rangle \operatorname{vol}\big)\\ &= \langle\nabla_X\beta,\alpha\rangle \operatorname{vol} + \langle\beta,\nabla_X\alpha\rangle \operatorname{vol} = \nabla_X\beta \wedge \star\alpha + \beta \wedge \star\nabla_X\alpha,\end{aligned}$$

also $\beta \wedge \nabla_X(\star\alpha) = \beta \wedge \star\nabla_X\alpha$ für alle β, und somit (III.30). Schließlich haben wir

$$\sigma \wedge \star\alpha = (-1)^{q-1} \star i_{\sharp\sigma}\alpha, \qquad \sigma \in \Omega^1(M),\ \alpha \in \Omega^q(M). \tag{III.31}$$

Diese letzte Relation lässt sich leicht aus (III.19) herleiten. Aus (III.29), (III.30) und (III.31) erhalten wir nun

$$d \star \alpha = \sum_j e^j \wedge \nabla_{e_j}(\star\alpha) = \sum_j e^j \wedge \star\nabla_{e_j}\alpha = (-1)^{q-1} \star \sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha,$$

und somit $\delta\alpha = (-1)^q \star^{-1} d \star \alpha = -\sum_j i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha$, wie behauptet. □

Wir wollen im verbleibenden Teil dieses Abschnitts noch die sogenannte *Bochner Methode* an einem Spezialfall, siehe Satz III.2.9 unten, besprechen. Bochners Argument basiert auf der sogenannten Weitzenböck Formel, die den Laplace–Beltrami Operator Δ mit dem Konnexions Laplace $\nabla^*\nabla$ in Zusammenhang bringt, vgl. Proposition III.2.8 unten.

Wir beginnen damit den Konnexions Laplace zu definieren. Sei dazu E ein Euklidisches Vektorbündel mit kompatibler Konnexion über einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Wir werden die Metriken auf TM, E und die davon induzierte Euklidische Metrik auf $T^*M \otimes E$ alle mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen.[10] Auf den Schnitten von E definieren wir analog zu (III.21) ein inneres Produkt,

$$\langle\!\langle s,t \rangle\!\rangle := \int_M \langle s,t\rangle \operatorname{vol}, \qquad s,t \in \Gamma_c(E).$$

[10] Die induzierte Euklidische Metrik auf $T^*M \otimes E$ kann wie folgt charakterisiert werden. Ist e^i eine Orthonormalbasis von T_x^*M und f_j eine Orthonormalbasis von E_x, dann bildet $e^i \otimes f_j$ eine Orthonormalbasis von $T_x^*M \otimes E_x$. Für zerlegbare Tensoren gilt daher $\langle\omega_1 \otimes s_1, \omega_2 \otimes s_2\rangle = \langle\omega_1,\omega_2\rangle\langle s_1,s_2\rangle$, wobei $\omega_i \in T_x^*M$ und $s_i \in E_x$, $x \in M$.

Da auch $T^*M \otimes E$ ein Euklidisches Vektorbündel ist, liefert dieselbe Konstruktion ein inneres Produkt auf $\Gamma_c(T^*M \otimes E)$.

Betrachte nun den Operator

$$\nabla^* \colon \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E), \qquad \nabla^*\alpha := -\operatorname{tr}_{12} \nabla\alpha.$$

Dabei bezeichnet ∇ die von der Konnexion auf E und der Levi–Civita Konnexion induzierte Konnexion auf $T^*M \otimes E$, dh. $\nabla\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$, und tr_{12} steht für die Kontraktion der ersten beiden Faktoren unter Verwendung der Riemannmetrik. Ist e_i ein lokaler Orthonormalrahmen von TM, dann gilt

$$\nabla^*\alpha = \sum_i \alpha(\nabla_{e_i} e_i) - \nabla_{e_i}(\alpha(e_i)), \tag{III.32}$$

denn $\nabla^*\alpha = -\sum_i(\nabla_{e_i}\alpha)(e_i) = \sum_i \alpha(\nabla_{e_i}e_i) - \nabla_{e_i}(\alpha(e_i))$. Das Vorzeichen in der Definition von ∇^* ist durch folgendes Lemma motiviert.

III.2.7. Lemma. *Der Operator $\nabla^* \colon \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$ ist formal adjungiert zu $\nabla \colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$, dh. es gilt $\langle\!\langle \nabla s, \alpha \rangle\!\rangle = \langle\!\langle s, \nabla^*\alpha \rangle\!\rangle$, für alle $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ und $s \in \Gamma_c(E)$.*

Beweis. Es sei e_i ein lokaler Orthonormalrahmen von TM und es bezeichne e^i den dualen lokalen Orthonormalrahmen von T^*M. Dann gilt $\nabla s = \sum_i e^i \otimes \nabla_{e_i} s$, $\alpha = \sum_j e^j \otimes \alpha(e_j)$ und daher

$$\langle \nabla s, \alpha \rangle = \sum_{i,j} \big\langle e^i \otimes \nabla_{e_i} s, e^j \otimes \alpha(e_j) \big\rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} s, \alpha(e_i) \rangle.$$

Aus (III.32) erhalten wir weiters

$$\langle s, \nabla^*\alpha \rangle = \sum_i \langle s, \alpha(\nabla_{e_i} e_i) \rangle - \langle s, \nabla_{e_i}(\alpha(e_i)) \rangle.$$

Da die Metrik auf E parallel ist, gilt $e_i \cdot \langle s, \alpha(e_i) \rangle = \langle \nabla_{e_i} s, \alpha(e_i) \rangle + \langle s, \nabla_{e_i}(\alpha(e_i)) \rangle$, und wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \langle \nabla s, \alpha \rangle - \langle s, \nabla^*\alpha \rangle &= \sum_i e_i \cdot \langle s, \alpha(e_i) \rangle - \langle s, \alpha(\nabla_{e_i} e_i) \rangle \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) = \operatorname{tr}_{12} \nabla\omega = \operatorname{div}\omega, \end{aligned}$$

wobei die 1-Form $\omega \in \Omega^1_c(M)$ durch $\omega(X) := \langle s, \alpha(X) \rangle$ definiert ist, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mittels Lemma III.1.6(e) folgt nun durch Integration $\langle\!\langle \nabla s, \alpha \rangle\!\rangle = \langle\!\langle s, \nabla^*\alpha \rangle\!\rangle$. □

Die Komposition von $\nabla \colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ mit $\nabla^* \colon \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$ liefert einen Operator

$$\nabla^*\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E), \qquad \nabla^*\nabla s = -\operatorname{tr}_{12} \nabla\nabla s,$$

der als *Konnexions Laplace* bezeichnet wird. Aus Lemma III.2.7 erhalten wir

$$\langle\!\langle \nabla^*\nabla s, t \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \nabla s, \nabla t \rangle\!\rangle = \langle\!\langle s, \nabla^*\nabla t \rangle\!\rangle, \qquad s \in \Gamma(E),\ t \in \Gamma_c(E), \tag{III.33}$$

also ist $\nabla^*\nabla$ formal selbstadjungiert. Ist e_i ein lokaler Orthonormalrahmen, dann folgt aus (III.32)

$$\nabla^*\nabla s = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} s + \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s, \qquad s \in \Gamma(E). \tag{III.34}$$

Der Konnexions Laplace auf $E = \Lambda^q T^* M$ unterscheidet sich vom Laplace–Beltrami Operator nur durch einen Krümmungsterm. Genauer, gilt die sogenannte *Weitzenböck Formel,* siehe etwa [**7**, Theorem 3.3.3], [**11**, equation (3.16)] oder [**12**, Corollary 8.3].

III.2.8. Proposition (Weitzenböck Formel)**.** *Für jedes $\alpha \in \Omega^1(M)$ gilt*

$$\Delta\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \mathrm{Ric}(\sharp\alpha, -).$$

Allgemeiner gilt für $\alpha \in \Omega^q(M)$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j,k,l} \langle R_{e_i,e_j} e_k, e_l\rangle\, e^i \wedge i_{e_j}(e^l \wedge i_{e_k}\alpha) \\ &= \nabla^*\nabla\alpha + \sum_{i,j,k,l} \langle R_{e_i,e_j} e_k, e_l\rangle\, e^i \wedge e^l \wedge i_{e_j} i_{e_k}\alpha + \sum_{i,k} \mathrm{Ric}(e_i, e_k) e^i \wedge i_{e_k}\alpha,\end{aligned} \tag{III.35}$$

wobei e_i einen lokalen Orthonormalrahmen von TM bezeichnet.

Beweis. Aus Aufgabe 46 und Lemma III.2.6 erhalten wir

$$\begin{aligned} d\delta\alpha &= -\sum_{i,j} e^i \wedge \nabla_{e_i}(i_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha) \\ &= -\sum_{i,j} e^i \wedge i_{\nabla_{e_i} e_j}\nabla_{e_j}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha \\ &= \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{\nabla_{e_i} e_j}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha \end{aligned} \tag{III.36}$$

sowie

$$\begin{aligned} \delta d\alpha &= -\sum_{i,j} i_{e_j}\nabla_{e_j}(e^i \wedge \nabla_{e_i}\alpha) \\ &= -\sum_{i,j} i_{e_j}\big((\nabla_{e_j} e^i) \wedge \nabla_{e_i}\alpha\big) - \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha\big) \\ &= \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{\nabla_{e_j} e_i}\alpha\big) - \sum_{i,j} i_{e_j}\big(e^i \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha\big) \\ &= \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{\nabla_{e_j} e_i}\alpha - \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\alpha + \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha \end{aligned} \tag{III.37}$$

Aus (III.36), (III.37) und (III.34) folgt nun

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= d\delta\alpha + \delta d\alpha \\ &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j}\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\alpha - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\alpha - \nabla_{\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i}\alpha\big) \\ &= \nabla^*\nabla\alpha - \sum_{i,j} e^i \wedge i_{e_j} R^{\Lambda^q T^*M}_{e_i,e_j}(\alpha), \qquad \text{(III.38)}\end{aligned}$$

wobei $R^{\Lambda^q T^*M}$ die Krümmung der Konnexion auf $\Lambda^q T^*M$ bezeichnet. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^q(M)$ und $\beta \in \Omega^p(M)$ gilt $\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X\beta$ und daher $R^{\Lambda^{p+q}T^*M}_{X,Y}(\alpha\wedge\beta) = R^{\Lambda^q T^*M}_{X,Y}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge R^{\Lambda^p T^*M}_{X,Y}(\beta)$, dh. die Krümmung wirkt als Derivation. Daraus folgt nun

$$R^{\Lambda^q T^*M}_{X,Y}(\alpha) = \sum_{k,l} \langle R_{X,Y}e_k, e_l\rangle e^l \wedge i_{e_k}\alpha, \qquad \text{(III.39)}$$

denn auch die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Derivation, und beide Seiten stimmen auf 1-Formen überein. Um die letzte Behauptung einzusehen, bemerken wir, dass $\nabla\sharp = 0$, dh. $\nabla_X(\sharp\omega) = \sharp\nabla_X\omega$, somit $R_{X,Y}(\sharp\omega) = \sharp R^{T^*M}_{X,Y}(\omega)$, für $\omega \in \Omega^1(M)$, und daher $R^{T^*M}_{X,Y}(\omega) = R^{T^*M}_{X,Y}\big(\sum_k e^k i_{e_k}\omega\big) = \sum_k \flat R_{X,Y}(e_k) i_{e_k}\omega = \sum_{k,l}\langle R_{X,Y}e_k, e_l\rangle e^l \wedge i_{e_k}\omega$. Kombinieren wir (III.38) mit (III.39) so erhalten wir (III.35). Die verbleibenden Aussagen der Proposition sind nun offensichtlich. □

III.2.9. Satz (Bochner)**.** *Es sei M eine zusammenhängende geschlossene orientierte Riemannsche n-Mannigfaltigkeit und* $\mathrm{Ric} \geq 0$.[11] *Dann ist jede harmonische 1-Form parallel und $b_1(M) \leq n$. Existiert darüber hinaus ein Punkt $x \in M$ mit* $\mathrm{Ric}_x > 0$,[12] *dann sind alle harmonischen 1-Formen trivial und $b_1(M) = 0$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, dh. $\Delta\alpha = 0$. Aus der Weitzenböck Formel in Proposition III.2.8 und (III.33) erhalten wir

$$0 = \langle\!\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \nabla\alpha, \nabla\alpha\rangle\!\rangle + \int_M \mathrm{Ric}(\sharp\alpha, \sharp\alpha)\,\mathrm{vol}.$$

Zusammen mit der Annahme $\mathrm{Ric} \geq 0$ folgt $\nabla\alpha \equiv 0$ und $\mathrm{Ric}(\sharp\alpha,\sharp\alpha) \equiv 0$. Insbesondere sind alle harmonischen 1-Formen parallel. Beachte, dass parallele Schnitte lokal konstante Länge haben, denn $X \cdot |\alpha|^2 = 2\langle\nabla_X\alpha, \alpha\rangle$. Wegen des Zusammenhangs von M folgt daraus, dass die Auswertung paralleler 1-Formen bei einem Punkt $x \in M$,

$$\{\alpha \in \Omega^1(M) : \nabla\alpha = 0\} \to T^*_x M, \quad \alpha \mapsto \alpha_x,$$

eine injektive lineare Abbildung ist. Somit hat der Vektorraum der parallelen 1-Formen höchstens Dimension n. Nach dem zuvor gezeigten, hat also auch der Vektorraum der harmonischen 1-Formen höchstens Dimension n. Aus Korollar III.2.4

[11] d.h. $\mathrm{Ric}_x(X,X) \geq 0$, für alle $x \in M$ und alle $X \in T_xM$.

[12] d.h. $\mathrm{Ric}_x(X,X) > 0$, für alle $0 \neq X \in T_xM$.

schließen wir nun $b_1(M) \leq n$. Existiert ein Punkt $x \in M$ mit $\mathrm{Ric}_x > 0$ und ist α harmonisch, dann folgt aus $\mathrm{Ric}(\sharp\alpha, \sharp\alpha) \equiv 0$ nun $\alpha_x = 0$ und damit $\alpha \equiv 0$. In diesem Fall gibt es daher keine nicht-trivialen harmonischen 1-Formen und aus Korollar III.2.4 erhalten wir $b_1(M) = 0$. $\square$

III.2.10. Beispiel. Aus Satz III.2.9 folgt etwa, dass auf dem Torus T^n keine Riemannsche Metrik mit $\mathrm{Ric} > 0$ existiert, denn $b_1(T^n) = n \neq 0$. Etwas allgemeiner folgt, dass es auch auf $S^1 \times M$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Ricci Krümmung geben kann.

III.3. Geodäten und Vollständigkeit. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir werden die Riemannsche Metrik oft mit $\langle X, Y\rangle := g(X, Y)$ bezeichnen, $X, Y \in T_xM$, und schreiben $|X| := \langle X, X\rangle^{1/2}$, $X \in T_xM$, für die assozierte Norm auf T_xM. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I = [a, b]$, $a < b$, und $c : I \to M$ eine glatte Kurve, so wird

$$\mathrm{length}(c) := \int_I |c'(t)|dt = \int_a^b |c'(t)|dt = \int_a^b g(c'(t), c'(t))^{1/2}dt$$

die *Länge von* c genannt. Hierbei bezeichnet $c' : I \to TM$, $c'(t) := \frac{\partial}{\partial t}c(t)$, die Ableitung von c. Die Länge von Kurven ist reparametrisierungsinvariant.

III.3.1. Lemma. *Es sei $\phi : J \to I$ ein, möglicherweise orentierungsumkehrender glatter Homöomorphismus kompakter Intervalle, $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Für jede glatte Kurve $c : I \to M$ ist dann auch $c \circ \phi : J \to M$ eine glatte Kurve, und es gilt*

$$\mathrm{length}(c \circ \phi) = \mathrm{length}(c).$$

Beweis. Aus der Kettenregel erhalten wir $(c \circ \phi)'(t) = c'(\phi(t))\phi'(t)$, folglich $|(c \circ \phi)'(t)| = |c'(\phi(t))||\phi'(t)|$ und somit

$$\mathrm{length}(c \circ \phi) = \int_J |(c \circ \phi)'(t)|dt = \int_J |c'(\phi(t))||\phi'(t)|dt = \int_I |c'(s)|ds = \mathrm{length}(c),$$

nach der Substitutionsformel für eindimensionale Integrale. $\square$

Es wird sich als hilfreich erweisen den Begriff der Länge auf eine etwas größere Klasse von Kurven auszudehnen. Unter einer *stückweise glatten* Kurve in M verstehen wir eine stetige Abbildung $c : [a, b] \to M$, für die eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ existiert, sodass die Einschränkung $c|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to M$ glatt ist, für jedes $1 \leq i \leq N$. In dieser Situation definieren wir

$$\mathrm{length}(c) := \sum_{i=1}^N \mathrm{length}\big(c|_{[t_{i-1}, t_i]}\big) = \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} |c'(t)|dt. \tag{III.40}$$

Es ist leicht einzusehen, dass dies unabhängig von der Unterteilung t_i ist, und im Fall glatter Kurven mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt, siehe Aufgabe 52. Die Länge stückweise glatter Kurven ist invariant unter Reparametrisierungen mit stückweise glatten Homöomorphismen zwischen Intervallen. Der