angenehme Vorteil stückweise glatter Kurven besteht darin, dass Konkatenationen stückweise glatter Kurven wieder stückweise glatt sind. Jede stückweise glatte Kurve $c : I \to M$ lässt sich glatt parametrisieren, dh, es existiert ein stückweise glatter Homöomorphismus $\phi : I \to I$, sodass $c \circ \phi : I \to M$ glatt ist.

III.3.2. Proposition. *Ist M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert*

$$\begin{aligned} d(x,y) &:= \inf\bigl\{\operatorname{length}(c) \bigm| c \text{ stückweise glatte Kurve von } x \text{ nach } y\bigr\} \\ &= \inf\bigl\{\operatorname{length}(c) \bigm| c \text{ glatte Kurve von } x \text{ nach } y\bigr\}, \qquad x,y \in M, \end{aligned}$$

eine Metrik auf M, die die Topologie von M erzeugt. Diese Metrik besitzt folgende Eigenschaft: Sind $x, y \in M$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $d(x,y) < r_1 + r_2$, dann gilt

$$B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y) \neq \emptyset, \tag{III.41}$$

wobei $B_r(x) := \{z \in M \mid d(x,z) < r\}$ die offenen metrischen Bälle bezeichnen.

Beweis. Da M zusammenhängend ist, können je zwei Punkte $x, y \in M$ mit einer (stückweise) glatten Kurve verbunden werden, also gilt $d(x,y) < \infty$, siehe Aufgabe 55. Aus der Definition folgt auch sofort $d(x,y) \geq 0$, denn $\operatorname{length}(c) \geq 0$ für jede stückweise glatte Kurve c. Die Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$ folgt aus der Reparametrisierungsinvarianz der Länge. Genauer, ist $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$, dann ist $\bar{c} : [-b,-a] \to M$, $\bar{c}(t) := c(-t)$, eine stückweise glatte Kurve von $\bar{c}(-b) = y$ nach $\bar{c}(-a) = x$ und es gilt $\operatorname{length}(\bar{c}) = \operatorname{length}(c)$. Um die Dreiecksungleichung einzusehen, sei $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c_1(a_1) = x$ nach $c_1(b_1) = y$ und $c_2 : [a_2, b_2] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c_2(a_2) = y$ nach $c_2(b_2) = z$. Durch affines Reparametrisieren dürfen wir o.B.d.A. $b_1 = a_2$ annehmen. Die Konkatenation

$$c := c_2 c_1 : [a_1, b_2] \to M, \qquad c(s) := \begin{cases} c_1(s) & \text{falls } s \in [a_1, b_1] \\ c_2(s) & \text{falls } s \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

bildet dann eine stückweise glatte Kurve von $c(a_1) = x$ nach $c(b_2) = z$ mit $\operatorname{length}(c) = \operatorname{length}(c_1) + \operatorname{length}(c_2)$. Daraus erhalten wir sofort die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $x, y, z \in M$.

Sei $x \in M$ und $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $x \in U$ und $u(x) = 0$. Wähle $r > 0$, sodass $D_r^{\text{eukl}}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\} \subseteq u(U)$, wobei $|x|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die auf $u(U)$ induzierte Riemannsche Metrik $(u^{-1})^* g$ bezeichnen wir wieder mit g. Bezüglich dieser Riemannmetrik gilt dann $\operatorname{length}(u^{-1} \circ c) = \operatorname{length}(c)$, für jede stückweise glatte Kurve c in $u(U)$. Wegen der Kompaktheit von $D_r^{\text{eukl}}(0)$ existieren $\kappa > 0$ und $K > 0$, sodass

$$\kappa |X| \leq g(X,X)^{1/2} \leq K|X|,$$

für alle $X \in T_y\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ und $y \in D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$. Ist $y \in D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$, dann liegt die affine Kurve $t \mapsto ty$, $t \in [0,1]$, zur Gänze in $D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$, und wir erhalten

$$\mathrm{length}(c) = \int_0^1 g(c'(t), c'(t))^{1/2} dt \leq K \int_0^1 |c'(t)| dt = K \int_0^1 |y| dt = K|y|.$$

Daraus folgt nun

$$u^{-1}(D_\rho^{\mathrm{eukl}}(0)) \subseteq D_{K\rho}(x), \qquad \text{für alle } 0 < \rho \leq r. \tag{III.42}$$

Ist $c : [a,b] \to D_r^{\mathrm{eukl}}(0)$ eine beliebige stückweise glatte Kurve von $c(a) = 0$ nach $c(b) = y$, so gilt andererseits

$$\kappa|y| = \kappa\Big|\int_a^b c'(t)dt\Big| \leq \kappa \int_a^b |c'(t)| dt \leq \int_a^b g(c'(t), c'(t))^{1/2} dt = \mathrm{length}(c).$$

Dies zeigt

$$B_{\kappa\rho}(x) \subseteq u^{-1}(D_\rho^{\mathrm{eukl}}(0)), \qquad \text{für alle } 0 < \rho \leq r. \tag{III.43}$$

Insbesondere sehen wir daraus, dass $d(x,y) > 0$ für alle $x \neq y \in M$. Folglich definiert d tatsächlich eine Metrik auf M. Aus (III.42) ud (III.43) folgt nun, dass d die Topologie von M induziert.

Für die verbleibende Behauptung seien $x, y \in M$ und $r_1, r_2 > 0$ mit $d(x,y) < r_1 + r_2$. O.B.d.A. sei $r_1 \leq d(x,y)$, andernfalls ist (III.41) trivialerweise erfüllt. Nach Definition der Metrik existiert $\varepsilon > 0$ und eine stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit $\mathrm{length}(c) \leq r_1 + r_2 - \varepsilon$. Aus Stetigkeitsgründen, und weil $l(c) \geq d(x,y) \geq r_1$, existiert $t \in [a,b]$, sodass $r_1 - \varepsilon < \mathrm{length}(c|_{[a,t]}) < r_1$. Für den Punkt $z := c(t)$ gilt daher $d(x,z) \leq \mathrm{length}(c|_{[a,t]}) < r_1$, also $z \in B_{r_1}(x)$. Weiters folgt

$$\mathrm{length}(c|_{[t,b]}) = \mathrm{length}(c) - \mathrm{length}(c|_{[a,b]}) < \mathrm{length}(c) - r_1 + \varepsilon \leq r_2,$$

also $d(z,y) \leq \mathrm{length}(c|_{[t,b]}) < r_2$, und damit auch $z \in B_{r_2}(y)$. Dies zeigt $z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$, folglich ist der Durchschnitt nicht leer. □

III.3.3. Definition (Vollständigkeit)**.** Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit wird *vollständig* genannt, wenn der metrische Raum (M, d) vollständig ist, dh. alle Cauchy Folgen bezüglich d konvergieren in M.

III.3.4. Beispiel. Jede kompakte Riemannmannigfaltigkeit ist vollständig.

III.3.5. Beispiel. Für $\mathbb{R}^n$ mit der flachen standard Riemannschen Metrik $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ gilt $d(x,y) = |y - x|$. Einerseits ist nämlich $d(x,y) \leq |y - x|$, da die affine Kurve $t \mapsto (1-t)x + ty$, $t \in [0,1]$, Länge $|y - x|$ hat. Andererseits haben wir für jede stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ die Abschätzung

$$|y - x| = \Big|\int_a^b c'(t)dt\Big| \leq \int_a^b |c'(t)| dt = \mathrm{length}(c),$$

und somit auch $d(x,y) \geq |y-x|$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^n, g)$ ist daher vollständig. Entfernen wir einen Punkt $* \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir eine nicht vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Auch die induzierte Riemannsche Metrik auf $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ ist nicht vollständig. Beachte, dass aufgrund der Konvexität von B_r die Einschränkung der Standardmetrik auf B_r mit der von der Riemannmetrik auf B_r induzierten Metrik übereinstimmt.

III.3.6. Bemerkung. Betrachte $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der standard Riemannmetrik $g = dx^2 + dy^2$. Für die induzierte Metrik gilt wieder $d(x,y) = |y-x|$, obwohl etwa die beiden Punkte $x = (-1,0)$ und $y = (1,0)$ nicht durch eine Kurve der Länge $d(x,y) = 2$ verbunden werden können, sondern nur mit Kurven der Länge $2+\varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$. Dies zeigt, dass wir uns i.A. keine Distanz-realisierenden Kurven erwarten dürfen.

Für eine Teilmenge $A \subseteq M$ definieren wir ihren *Durchmesser* als

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}.$$

Eine Teilmenge wird beschränkt genannt, falls sie endlichen Durchmesser hat. Beachte, dass jede kompakte Teilmenge abgeschlossen und beschränkt ist.

III.3.7. Proposition (Heine–Borel)**.** *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:*

(a) M ist vollständig.
(b) Jede beschränkte Folge in M besitzt eine konvergente Teilfolge.
(c) Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von M ist kompakt.
(d) Die abgeschlossenen Bälle $D_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) \leq r\}$ sind kompakt, für jedes $x \in M$ und $r \geq 0$.

Beweis. Um (d) $\Rightarrow$ (c) einzusehen, sei $A \subseteq M$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge. Wegen der Beschränktheit von A existiert $x \in M$ und $r > 0$, sodass $A \subseteq D_r(x)$. Nach Voraussetzung ist $D_r(x)$ kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist daher auch A kompakt. Für den Beweis der Implikation (c) $\Rightarrow$ (b) sei x_n eine beschränkte Folge in M, dh. $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bildet eine beschränkte Teilmenge von M. Ihr Abschluss $\bar{B}$ ist dann ebenfalls beschränkt, und nach Voraussetzung daher kompakt. Da kompakte Räume folgenkompakt sind, besitzt x_n eine in $\bar{B}$ konvergente Teilfolge. Um (b) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, sei nun x_n eine Cauchy Folge in M. Da Cauchy Folgen stets beschränkt sind, besitzt x_n nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge. Da Cauchy Folgen höchstens einen Häufungspunkt besitzen, muss x_n also konvergieren. Widmen wir uns schließlich der Implikation (a) $\Rightarrow$ (d). Für fixes $x \in M$, betrachte die Menge

$$R := \big\{r \in [0,\infty) : D_r(x) \text{ ist kompakt}\big\}.$$

Offensichtlich ist $R \neq \emptyset$, denn $0 \in R$. Es genügt nun zu zeigen, dass R sowohl offen als auch abgeschlossen in $[0,\infty)$ ist, denn dann folgt wegen des Zusammenhangs des Intervalls, $R = [0,\infty)$, und somit ist $D_r(x)$ für jedes $r \geq 0$ kompakt.

Wir beginnen damit die Offenheit von R nachzuweisen. Sei dazu $r \in R$, also $D_r(x)$ kompakt. Da M lokal kompakt ist, existieren endlich viele offene Teilmengen U_i von M, $1 \leq i \leq N$, die $D_r(x)$ überdecken, $D_r(x) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N$, und deren Abschlüsse $\bar{U}_i$ kompakt sind. Da $U := U_1 \cup \cdots \cup U_N$ eine Umgebung von $D_r(x)$ bildet, und weil $D_r(x)$ kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass die ε-Umgebung von $D_r(x)$ in U enthalten ist, in Zeichen $\mathcal{U}_\varepsilon(D_r(x)) := \{y \in M \mid d(z, D_r(x)) < \varepsilon\} \subseteq U$. Nach (III.41) gilt aber $B_{r+\varepsilon}(x) = \mathcal{U}_\varepsilon(D_r(x))$. Folglich ist $D_{r+\varepsilon}(x)$ kompakt, denn es liegt abgeschlossen in der kompakten Menge $\bar{U}$. Wir schließen $[0, r+\varepsilon] \subseteq R$, denn offensichtlich gilt: $0 \leq r' \leq r'' \in R \Rightarrow r' \in R$. Dies zeigt, dass r innerer Punkt von R ist, damit ist R also offen.

Um die Abgeschlossenheit von R zu überprüfen, sei $r \in \bar{R}$. Weiters sei y_n eine Folge in $D_r(x)$. Es genügt zu zeigen, dass y_n eine Cauchy-Teilfolge besitzt, denn wegen der Vollständigkeits-Voraussetzung würde diese konvergiert, somit wäre $D_r(x)$ (folgen)kompakt,[13] dh. $r \in R$, und damit R abgeschlossen. Um eine Cauchy-Teilfolge von y_n zu konstruieren sei $\varepsilon > 0$. Da $r \in \bar{R}$, existiert $\tilde{r} \in R$ mit $r < \tilde{r} + \varepsilon/4$. Nach (III.41) existiert eine Folge $\tilde{y}_n \in D_{\tilde{r}}(x)$, sodass $d(\tilde{y}_n, y_n) < \varepsilon/4$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $D_{\tilde{r}}(x)$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\tilde{y}_{n_k}$. Es bezeichne $\tilde{y}_\infty := \lim_{k\to\infty} \tilde{y}_{n_k}$ deren Grenzwert. Durch Verwerfen endlich vieler Folgenglieder dürfen wir o.B.d.A. $d(\tilde{y}_{n_k}, \tilde{y}_\infty) < \varepsilon/4$ annehmen, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt nun $d(y_{n_k}, \tilde{y}_\infty) \leq d(y_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}) + d(\tilde{y}_{n_k}, \tilde{y}_\infty) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, und dann $d(y_{n_k}, y_{n_l}) \leq d(y_{n_k}, \tilde{y}_\infty) + d(\tilde{y}_\infty, y_{n_l}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend sehen wir, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge y'_n von y_n existiert, sodass $d(y'_k, y'_l) < \varepsilon$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert eine Teilfolge y^1_n von y_n mit $d(y^1_k, y^1_l) < 1$, und diese besitzt eine Teilfolge y^2_n mit $d(y^2_k, y^2_l) < 1/2$, und diese besitzt eine Teilfolge y^3_n mit $d(y^3_k, y^3_l) < 1/2$ usw. Induktiv erhalten wir zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge y^m_n von y^{m-1}_n, sodass $d(y^m_k, y^m_l) \leq 1/m$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Die Diagonalfolge y^n_n ist daher eine Cauchy-Teilfolge von y_n. □

III.3.8. Bemerkung. Wir werden weiter unten, im Beweis des Satzes III.3.27, einen anderen Beweis für die nicht triviale Implikation (a) $\Rightarrow$ (d) in Proposition III.3.7 geben, der auf der Lösung der Geodätengleichung, einer gewöhnlichen Differentialgleichung, beruht.

Für jede glatte Kurve $c : I \to M$ definieren wir ihre *Energie* durch

$$E(c) := \frac{1}{2}\int_I |c'(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_I g(c'(t), c'(t)) dt. \tag{III.44}$$

Die Energie von Kurven ist *nicht* invariant unter Reparametrisierungen, selbst eine affine Reparametrisierung, $t \mapsto \lambda t + a$, lässt die Energie i.A. nur dann unverändert, wenn $\lambda = \pm 1$.

[13] Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist kompakt.

III.3.9. Lemma. *Für jede glatte Kurve $c : [a, b] \to M$ gilt*

$$\operatorname{length}(c)^2 \leq 2(b-a)E(c).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, dh. wenn $|c'(t)|$ konstant in t ist.

Beweis. Nach der Cauchy–Schwarz Ungleichung gilt

$$\operatorname{length}(c)^2 = \Big(\int_a^b 1 \cdot |c'(t)| dt\Big)^2 \leq \int_a^b 1^2 dt \int_a^b |c'(t)|^2 dt = 2(b-a)E(c),$$

mit Gleichheit genau dann wenn $|c'(t)|$ konstant ist. □

III.3.10. Lemma. *Es sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit minimaler Energie, dh. für jede weitere glatte Kurve $\bar{c} : [a, b] \to M$ von $\bar{c}(a) = x$ nach $\bar{c}(b) = y$ gilt $E(\bar{c}) \geq E(c)$. Dann erfüllt c die Differentialgleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$, dh. das Vektorfeld $c' := \frac{\partial c}{\partial t}$ über c ist horizontal. Schreiben wir in einer Karte $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, dann bedeuted dies $(c^i)'' + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} (c^j)'(c^k)' = 0$ oder expliziter*

$$(c^i)''(t) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}\big(c^1(t), \dots, c^n(t)\big)\, (c^j)'(t)\, (c^k)'(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{III.45}$$

wobei Γ^i_{jk} die Christoffel Symbole der Karte bezeichnen.

Beweis. Betrachte eine Variation von Kurven die x mit y verbinden, dh. eine glatte Abbildung $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ mit $\tilde{c}(s, a) = x$ und $\tilde{c}(s, b) = y$, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist daher $\tilde{c}_s : [a, b] \to M$, $\tilde{c}_s(t) := \tilde{c}(s, t)$, eine glatte Kurve von x nach y, und $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, a) = 0 = \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, b)$, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Hat $c = \tilde{c}_0$ minimale Energie, dann gilt $E(\tilde{c}_s) \geq E(\tilde{c}_0)$ und daher $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0$, für jede solche Variation. Da ∇ torsionsfrei ist, haben wir $\nabla_{\partial s} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = \nabla_{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}$, zusammen mit $\nabla g = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde{c}_s) &= \tfrac{\partial}{\partial s} \tfrac{1}{2} \int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b g\big(\nabla_{\partial s} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b g\big(\nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t} g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt - \int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt \\
&= -\int_a^b g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s, t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s, t)\big) dt
\end{aligned}$$

Setzen wir $\xi(t) := \frac{\partial\tilde{c}}{\partial s}(0,t)$, so erhalten wir

$$0 = \int_a^b g\big(\xi, \nabla_{\partial t} c'\big)(t)dt$$

Ist c eine Kurve minimaler Energie von x nach y, so muss dies für jede Variation verschwinden, und daher die Gleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$ gelten.

In einer Karte haben wir $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$, dh. $c = \sum_i c^i e_i$, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Es gilt dann $c' = \sum_i^n (c^i)'\partial_i$ und daher

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{c'} c' = \nabla_{c'} \sum_i (c^i)'\partial_i &= \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_i (c^i)'\nabla_{c'}\partial_i \\ &= \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_{i,j} (c^i)'(c^j)'\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_i (c^i)''\partial_i + \sum_{i,j,k} (c^i)'(c^j)'\Gamma^k_{ji}\partial_k. \end{aligned}$$

Für jedes i gilt daher $0 = (c^i)'' + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(c^j)'(c^k)'$. □

III.3.11. Definition (Geodäten)**.** Unter einer Geodäte verstehen wir eine glatte auf einem Intervall definierte Kurve $c : I \to M$, die die Differentialgleichung $\nabla_{\partial_t} c' = 0$ erfüllt. Dies sind genau die kritischen Punkte des Energiefunktionals (III.44).

III.3.12. Lemma. *Jede Geodäte ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Ist c eine Geodäte und $a, \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $t \mapsto c(\lambda t + a)$ eine Geodäte.*

Beweis. Aus $\nabla g = 0$ und der Geodätengleichung $\nabla_{\partial t} c' = 0$ erhalten wir sofort $\frac{\partial}{\partial t}|c'(t)|^2 = 2g\big(\nabla_{\partial t} c'(t), c'(t)\big) = 0$, also ist $|c'(t)|$ konstant in t. Für die zweite Behauptung sei $\tilde{c}(t) := c(\lambda t + a)$, also $\tilde{c}'(t) = \lambda c'(\lambda t + a)$. Da c' parallel über c ist, ist auch das reparametrisierte skalierte Vektorfeld $\lambda c'(\lambda t + a)$ parallel über der entsprechend reparametrisierten Kurve $c(\lambda t + a)$, dh. $\nabla_{\partial_t} \tilde{c}' = 0$, vgl. Satz II.3.11(d). □

III.3.13. Beispiel. Betrachte wieder $\mathbb{R}^n$ mit der flachen Riemannmetrik $g = \sum_i dx^i \otimes dx^i$. In diesem Fall verschwinden die Christoffel Symbole, $\Gamma^k_{ij} = 0$, die Geodätengleichung lautet daher $c'' = 0$. Die Geodäten in $\mathbb{R}^n$ sind daher genau die affinen Kurven $c(t) = tv + a$, wobei $a, v \in \mathbb{R}^n$.

III.3.14. Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten)**.** *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(a) Zu jedem $X \in T_xM$ existiert ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine Geodäte $c : I \to M$ mit $0 \in I$, $c(0) = x$ und $c'(x) = X$.
(b) Sind $c_1 : I_1 \to M$ und $c_2 : I_2 \to M$ zwei Geodäten und $t_0 \in I_1 \cap I_2$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$, dann stimmen diese auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $I_1 \cap I_2$ überein, dh. $c_1|_{I_1\cap I_2} = c_2|_{I_1\cap I_2}$.
(c) Zu jedem $X \in T_xM$ existiert eine maximale Geodäte $c : I \to M$ mit $0 \in I$, $c(0) = x$ und $c'(0) = X$, dh. c kann nicht zu einer Geodäte auf einem echt

größeren Intervall ausgedehnt werden. Diese maximale Geodäte ist eindeutig und wird mit $\mathrm{geo}_X : I_X \to M$ *bezeichnet,* $\mathrm{geo}'_X(0) = X$*,* $X \in TM$*.*

(d) Ist $t \in I_X$*, dann gilt* $\mathrm{geo}_{\mathrm{geo}'_X(t)}(s) = \mathrm{geo}_X(t+s)$ *für alle* $s \in I_{\mathrm{geo}'_X(t)} = I_X - t$*.*

(e) Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$*, dann gilt* $\mathrm{geo}_{\lambda X}(t) = \mathrm{geo}_X(\lambda t)$ *für alle* $t \in I_{\lambda X} = I_X/\lambda$*.*

(f) Für $0_x \in T_xM$ *gilt* $I_{0_x} = \mathbb{R}$ *und* $\mathrm{geo}_{0_x}(t) = x$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*.*

(g) Die Menge $\mathcal{G} := \{(X,t) \mid t \in I_X\}$ *ist offen in* $TM \times \mathbb{R}$*, und* $\mathrm{geo} : \mathcal{G} \to M$*,* $(X,t) \mapsto \mathrm{geo}_X(t)$*, ist eine glatte Abbildung.*

Beweis. Die erste Behauptung (a) folgt aus dem Existenzaussage im Satz von Picard–Lindelöf, denn die Geodätengleichung (III.45) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um Behauptung (b) einzusehen, betrachte die Menge $\{t \in I_1 \cap I_2 \mid c_1(t) = c_2(t) \text{ und } c_1'(t) = c_2'(t)\}$. Nach Voraussetzung ist diese nicht leer, denn $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Menge auch abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$. Aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard–Lindelöf folgt, dass diese Menge auch offen in $I_1 \cap I_2$ ist, folglich muss sie mit $I_1 \cap I_2$ übereinstimmen, denn als Durchschnitt zweier Intervalle ist $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend. Behauptung (c) ist eine formale Konsequenz von (a) & (b).

Nach der zweiten Aussage in Lemma III.3.12 ist die Abbildung $s \mapsto \mathrm{geo}_X(t+s)$ eine auf dem Intervall $I_X - t$ definierte maximale Geodäte. Aus der Eindeutigkeit maximaler Geodäten folgt daher $I_X - t = I_{\mathrm{geo}'_X(t)}$ und $\mathrm{geo}_X(t+s) = \mathrm{geo}_{\mathrm{geo}'_X(t)}(s)$ für alle $s \in I_X - t = I_{\mathrm{geo}'_X(t)}$, denn beide Geodäten haben bei $s = 0$ dieselbe Ableitung, nämlich $\mathrm{geo}'_X(t)$. Dies zeigt Behauptung (d).

Um (e) einzusehen, gehen wir analog zum Beweis von (d) vor. Nach der zweiten Aussage in Lemma III.3.12 ist die Abbildung $t \mapsto \mathrm{geo}_X(\lambda t)$ eine auf dem Intervall I_X/λ definierte maximale Geodäte. Aus der Eindeutigkeit maximaler Geodäten folgt daher $I_X/\lambda = I_{\lambda X}$ und $\mathrm{geo}_X(\lambda t) = \mathrm{geo}_{\lambda X}(t)$ für alle $t \in I_X/\lambda = I_{\lambda X}$, denn beide Geodäten haben bei $t = 0$ die Ableitung λX. Behauptung (f) ist trivial, denn offensichtlich sind die konstanten Kurven Geodäten.

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf hängen die Lösungen der Geodätengleichung (III.45) glatt vom Anfangswert $X \in TM$ ab. Es existiert daher eine offene Umgebung U von $TM \times \{0\}$ in $TM \times \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathcal{G}$ und so, dass $\mathrm{geo}|_U : U \to M$ glatt ist. Für $X \in TM$ betrachte nun die Menge

$$J_X := \left\{ t \in I_X \;\middle|\; \begin{array}{c} (X,t) \text{ liegt im Inneren von } \mathcal{G} \text{ und geo ist glatt} \\ \text{auf einer offenen Umgebung von } (X,t) \end{array} \right\}$$

Offensichtlich genügt es $J_X = I_X$ zu zeigen. Beachte $J_X \neq \emptyset$, denn $0 \in J_X$ da ja $(X,0) \in U \subseteq \mathcal{G}$ und geo auf der offenen Menge U glatt ist. Nach Konstruktion ist J_X auch offen in I_X. Da I_X zusammenhängend ist, genügt es die Abgeschlossenheit von J_X in I_X nachzuweisen. Sei dazu $t \in \bar{J}_X \cap I_X$. Da U offen ist, existiert eine offene Umgebung V von $\mathrm{geo}'_t(X)$ in TM und $\varepsilon > 0$, sodass $V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$. Da $t \in \bar{J}_X$, existiert $t_0 \in J_X$ mit $|t - t_0| < \varepsilon$. Da $\mathrm{geo}_X : I_X \to M$ glatt ist, dürfen wir auch $\mathrm{geo}'_X(t_0) \in V$ annehmen. Nach Konstruktion von J_X existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq TM \times \mathbb{R}$ mit $(X, t_0) \in W \subseteq \mathcal{G}$ und so, dass geo auf W glatt ist.

Betrachte die offene Umgebung $W_0 := \{Y \in TM \mid (Y, t_0) \in W\}$ von X in TM. Durch Verkleinern von W können wir auch erreichen, dass $\mathrm{geo}'_Y(t_0) \in V$, für alle $Y \in W_0$. Wir erhalten eine wohldefinierte glatte Abbildung

$$W_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad (Y, s) \mapsto \mathrm{geo}(\mathrm{geo}'_Y(t_0), s).$$

Nach (d) ist geo daher auf der offenen Menge $W_0 \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ definiert und glatt. Nach Konstruktion liegt (X, t) in dieser Menge, woraus wir nun $t \in J_X$ schließen. Folglich ist J_X abgeschlossen in I_X, und somit (g) gezeigt. $\square$

III.3.15. Bemerkung (Geodätischer Fluss)**.** Auf dem Totalraum von TM betrachte das eindeutige horizontale Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, sodass $T_X\pi \cdot \xi_X = X$, für alle $X \in TM$, wobei $\pi : TM \to M$ die Vektorbündelprojektion bezeichnet. Dieses Vektorfeld wir als *geodätischer Spray* bezeichnet. Die Integralkurven von ξ sind glatte Kurven $\tilde{c} : I \to TM$ für die $\tilde{c}'(t) = \xi(\tilde{c}(t))$ gilt, $t \in I$. Nach Definition von ξ sind dies genau jene horizontalen glatten Kurven $\tilde{c} : I \to TM$, für die $(\pi \circ \tilde{c})'(t) = T_{\tilde{c}(t)}\pi \cdot \tilde{c}'(t) = \tilde{c}(t)$ gilt. Setzen wir $c(t) := \pi(\tilde{c}(t))$, dann bedeutet dies gerade, dass $c'(t) = \tilde{c}(t)$ horizontal über c ist. In anderen Worten, die Integralkurven von ξ entsprechen genau den Ableitungen von Geodäten in M. Wenden wir den Satz in [**3**, Abschnitt 2.11] auf das Vektorfeld ξ an, so erhalten wir erneut einen Beweis von Satz III.3.14. Dies ist der übliche Trick, mit dem die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Der Fluss des geodätischen Sprays ξ wird als *geodätischer Fluss* bezeichnet. Da Geodäten stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, lässt der geodätische Fluss die Sphärenbündel $\{X \in TM : |X| = r\}$ invariant, $r \geq 0$. Für jedes $\lambda \neq 0$ haben wir schließlich einen durch Multiplikation mit λ definierten Diffeomorphismus $\lambda : TM \to TM$, und nach Definition des geodätischen Sprays gilt offenbar $\lambda_*\xi = \lambda\xi$. Diese Symmetrie ist für die in Satz III.3.14(e) formulierte Symmetrie von geo verantwortlich.

III.3.16. Korollar (Exponentialabbildung)**.** *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit der Notation von Satz III.3.14 gilt dann:*

(a) *Die Menge $\mathcal{D} := \{X \in TM \mid 1 \in I_X\} \subseteq TM$ ist eine offene Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM$, die sogenannte* Exponentialabbildung,

$$\exp : \mathcal{D} \to M, \qquad \exp(X) := \mathrm{geo}_X(1),$$

ist eine glatte Abbildung, und es gilt $\exp|_M = \mathrm{id}_M$.

(b) *Für $X \in TM$ gilt $\{t \in \mathbb{R} : tX \in \mathcal{D}\} = I_X$ und $\exp(tX) = \mathrm{geo}_X(t)$, $t \in I_X$.*

(c) *Für jedes $x \in M$ ist $\mathcal{D}_x := \mathcal{D} \cap T_xM$ eine offene Umgebung von $0 \in T_xM$, die Einschränkung der Exponentialbbildung $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M$ ist glatt, und es gilt $\exp_x(0) = x$ sowie $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \exp(tX) = X$ für alle $X \in T_xM$. Bis auf die kanonische Identifikation $T_0\mathcal{D}_x = T_0T_xM = T_xM$ gilt daher $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$.*

(d) *Zu jedem $x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von $0 \in T_xM$ mit $U_x \subseteq \mathcal{D}_x$ und so, dass $\exp_x : U_x \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $x \in M$ ist. (Riemannsche Normalkoordinaten)*

(e) *Es existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq TM$ des Nullschnitts $M \subseteq TM$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, und so, dass die Einschränkung $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ einen Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$ bildet. Dabei bezeichnet $\pi : TM \to M$ die Vektorbündelprojektion.*

Beweis. Behauptung (a) folgt aus Satz III.3.14(g)&(f). Behauptung (b) folgt sofort aus Satz III.3.14(e). Behauptung (c) folgt aus (a)&(b), denn $\frac{\partial}{\partial t}|_0 \exp(tX) = \frac{\partial}{\partial t}|_0 \operatorname{geo}_X(t) = X$. Behauptung (d) folgt aus dem inversen Funktionensatz und (c). Für $x \in M$, und bis auf die kanonischen Identifikationen $T_xTM = T_xM \oplus T_xM$ und $T_{(x,x)}(M \times M) = T_xM \oplus T_xM$, hat die Tangentialabbildung von $(\pi, \exp)$ bei x die Gestalt

$$T_x(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_xM} & 0 \\ * & \mathrm{id}_{T_xM} \end{pmatrix}.$$

Aus dem inversen Funktionensatz folgt daher, dass $(\pi, \exp) : \mathcal{D} \to M \times M$ längs des Nullschnitts $M \subseteq \mathcal{D}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Genauer, existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung V_x von x in M und $\varepsilon_x > 0$, sodass $\tilde{V}_x := \{Y \in T_yM \mid y \in V_x, |Y| < \varepsilon_x\} \subseteq \mathcal{D}$ und so, dass die Einschränkung $(\pi, \exp)|_{\tilde{V}_x}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von (x, x) in $M \times M$ wird. Setzen wir nun $\mathcal{U} := \bigcup_{x \in M} \tilde{V}_x$, dann ist $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung des Nullschnitts, es gilt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, und $(\pi, \exp)|_{\mathcal{U}}$ ist ein lokaler Diffeomorphismus. Nach Konstruktion von $\mathcal{U}$ ist $(\pi, \exp)$ auf $\mathcal{U} \cap T_xM$ injektiv. Daraus folgt sofort, dass $(\pi, \exp)$ auf $\mathcal{U}$ injektiv ist, folglich ist $(\pi, \exp)|_{\mathcal{U}}$ ein Diffeomorphismus auf sein (offenes) Bild. Damit ist auch (e) gezeigt. □

III.3.17. Bemerkung (Riemannsche Normalkoordinaten)**.** Die lokal um $0 \in T_xM$ definierte Exponentialabbildung $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M$ liefert kanonische Koordinaten um jeden Punkt $x \in M$, siehe Korollar III.3.16(c). Wählen wir eine Orthonormalbasis von T_xM und identifizieren damit $T_xM \cong \mathbb{R}^n$, dann liefert die (Umkehrabbildung der) Exponentialabbildung eine Karte $u = (u^1, \dots, u^n) = \exp_x^{-1}$. Diese Karte ist bei x zentriert, dh. $u(x) = 0$. Bezeichnet $g = \sum_{ij} g_{ij} du^i \otimes du^j$ die Kartendarstellung der Metrik, dann gilt

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{III.46}$$

denn $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$. Nach Definition der Exponentialabbildung entsprechen die Geodäten durch x den affin parametrisierten Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Geodätengleichung (III.45) und der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ folgt daraus

$$\Gamma_{ij}^k(x) = 0, \qquad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{III.47}$$

Aus (III.16) erhalten wir daher $\big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\big)(x) = 0$, und durch zyklische Permutation der Indizes auch $\big(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\big)(x) = 0$. Aufsummieren dieser beiden Relationen liefert, unter Verwendung der Symmetrie $g_{ki} = g_{ik}$, nun

$$\tfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(x) = 0, \qquad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{III.48}$$

Aus (III.16) folgt nun auch

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l}(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^l \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}\Big)(x),$$

und mit Hilfe von (III.17) nun

$$R_{kij}^l(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^l \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^l \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial u^k \partial u^j}\Big)(x), \tag{III.49}$$

für alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Es sei nochmals betont, dass die Gleichungen (III.46) bis (III.49) nur im Zentrum x der Riemannschen Normalkoordinaten gelten, dh. in jenem Punkt, der $0 \in \mathbb{R}^n$ entspricht.

III.3.18. Satz (Lemma von Gauß)**.** *Es seien $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ so, dass die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus zwischen dem offenen Ball $B_\varepsilon(0) \subseteq T_xM$ und einer offenen Umgebung von $x \in M$ definiert, vgl. Korollar III.3.16(d). Dann gilt*

(a) Ist $X \in T_xM$ und $|X| = 1$, dann trifft die Geodäte $c : [0, \varepsilon) \to M$, $c(t) := \exp_x(tX)$, die Bilder der Euklidischen Sphären $\exp_x(S_r(0))$, $0 < r < \varepsilon$, orthogonal, $S_r(0) = \{Y \in T_xM : |Y| = r\}$.

(b) Ist $0 < r < \varepsilon$, dann hat jede stückweise glatte Kurve $c : [a, b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) \in \exp_x(S_r(0))$ Länge $\operatorname{length}(c) \geq r$. Gleichheit tritt genau dann ein wenn die Kurve, bis auf monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von der Form $\exp_x(tX)$, $t \in [0, r]$, ist mit $X \in T_xM$, $|X| = 1$.

(c) Jeder Punkt $y \in \exp_x(B_\varepsilon(0))$ lässt sich mit x durch eine, bis auf affine Reparametrisierung eindeutige Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbinden. Bis auf Reparametrisierung, ist dies die eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge von x nach y.

(d) Die Distanzfunktion erfüllt $d(x, \exp_x(X)) = |X|$, $X \in B_\varepsilon(0)$.

(e) Die Exponentialabbildung bildet die Euklidischen Sphären diffeomorph auf die metrischen Sphären ab, dh. $\exp_x(S_r(0)) = S_r(x)$ für $0 < r < \varepsilon$.

(f) Die Exponentialabbildung bildet die Euklidischen Bälle diffeomorph auf die metrischen Bälle ab, dh. $\exp_x(B_r(0)) = B_r(x)$ für $0 < r \leq \varepsilon$.

Beweis. Wir beginnen damit (a) zu zeigen. Sei dazu $s \mapsto X_s$ eine lokal um $s = 0$ definierte glatte Kurve in $S_1(0) \subseteq T_xM$ mit $X_0 = X$. Betrachte nun die Variation $\tilde{c}_s(t) := \tilde{c}(s, t) := \exp_x(tX_s)$, $t \in [0, r]$, $0 < r < \varepsilon$. Jedes $\tilde{c}_s : [0, r] \to M$ ist daher ein Geodäte von $\tilde{c}_s(0) = x$ nach $\tilde{c}_s(r) = \exp_x(rX_s) \in \exp_x(S_r(0))$. Da $|\tilde{c}_s'(t)| = |\tilde{c}_s'(0)| = |X_s| = 1$, haben alle diese Geodäten dieselbe Energie,

$E(\tilde{c}_s) = r/2$. Die Variationsrechnung im Beweis von Lemma III.3.10 liefert daher

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde{c}_s) &= \int_0^r \tfrac{\partial}{\partial t} g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,t), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t)\big) dt - \int_0^r g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,t), \nabla_{\partial t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t)\big) dt \\ &= g\big(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,r), \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,r)\big), \end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t}(s,t) = 0$ da jedes $\tilde{c}_s$ Geodäte ist, und $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(s,0) = 0$ da jedes $\tilde{c}_s$ bei $\tilde{c}_s(0) = x$ startet. Durch Auswerten bei $s = 0$ erhalten wir

$$g\big(\tfrac{\partial}{\partial s}|_0 \exp_x(rX_s), c'(r)\big) = 0.$$

Da dies für jede glatte Kurve X_s in $S_1(0)$ gilt, folgt $c'(r) \perp \exp_x(S_r(0))$.

Um (b) einzusehen sei $0 < \delta < r$. Jede stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ von $c(a) = x$ nach $c(b) \in \exp_x(S_r(0))$ besitzt einen Teilabschnitt $\tilde{c} := c|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$, $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$, der zur Gänze in $\exp_x\big(B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}\big)$ liegt und $\tilde{c}(\tilde{a}) \in \exp_x(S_\delta(0))$ mit $\tilde{c}(\tilde{b}) \in \exp_x(S_r(0))$ verbindet. Es existieren daher stückweise glatte Abbildungen (Polarkoordinaten) $\rho : [\tilde{a},\tilde{b}] \to (0,\varepsilon)$ und $X : [\tilde{a},\tilde{b}] \to S_1(0)$, sodass $\tilde{c}(t) = \exp_x(\rho(t)X(t))$. Beachte $\rho(\tilde{a}) = \delta$ sowie $\rho(\tilde{b}) = r$. Für die Ableitung erhalten wir

$$\tilde{c}'(t) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(s)X(t)\big) + \tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(t)X(s)\big).$$

Nach (a) stehen die beiden Summanden orthogonal aufeinander. Nach dem Satz von Pythagoras, und weil $\big|\frac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x\big(\rho(s)X(t)\big)\big| = |\rho'(t)|$, gilt daher

$$|\tilde{c}'(t)|^2 = |\rho'(t)|^2 + \big|\tfrac{\partial}{\partial s}|_t \exp_x(\rho(t)X(s))|^2.$$

Insbesondere haben wir $|\tilde{c}'(t)| \geq |\rho'(t)|$, und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $X(t)$ konstant in t ist. Es folgt

$$\operatorname{length}(\tilde{c}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{c}'(t)| dt \geq \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\rho'(t)| dt \geq \Big|\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \rho'(t) dt\Big| = \rho(\tilde{b}) - \rho(\tilde{a}) = r - \delta,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $X(t) = \mathrm{const}$ und $\rho' \geq 0$, dh. genau dann wenn $\tilde{c}$ eine monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von $\exp_x(tX)$ ist, $X \in S_1(0)$, $t \in [\delta, r]$. Da dies für jedes $\delta > 0$ gilt, und weil offensichtlich $\operatorname{length}(c) \geq \operatorname{length}(\tilde{c})$, erhalten wir $\operatorname{length}(c) \geq r$, und somit (b).

Die verbleibenden Behauptungen folgen unmittelbar aus (b). □

III.3.19. Bemerkung (Riemannsche Polarkoordinaten)**.** Wir führen auf T_xM Polarkoordinaten ein, dh. $T_xM \setminus \{0\} \cong (0,\infty) \times S^{n-1}$, $tX \leftrightarrow (t,X)$, wobei $S^{n-1} := \{X \in T_xM : |X| = 1\}$ die Einheitssphäre in T_xM bezeichnet. Sind darüber hinaus $(\varphi^2,\dots,\varphi^n)$ (lokal definierte) Winkelkoordinaten auf S^{n-1}, so erhalten wir lokale Koordinaten $(t,\varphi^2,\dots,\varphi^n)$ auf $T_xM \setminus \{0\}$. Zusammen mit der Exponentialabbildung liefert dies eine Karte $(u^1,\dots,u^n) = (t,\varphi^2,\dots,\varphi^n) \circ \exp_x^{-1}$ auf M. Nach Satz III.3.18(a) hat die Riemannsche Metrik in diesen Koordinaten eine Darstellung der Form

$$g = du^1 \otimes du^1 + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}(u^1, \dots, u^n) du^i \otimes du^j.$$

III.3.20. Korollar. *Es existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ des Nullschnitts $M \subseteq TM$, sodass $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ einen Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$ bildet, und die darüberhinaus folgende Eigenschaft besitzt. Für jedes $X \in \mathcal{U}$ gilt $d(\pi(X), \exp(X)) = |X|$, und die Geodäte $\exp(tX)$, $t \in [0, 1]$, ist die eindeutige (stückweise) glatte Kurve minimaler Länge von $\pi(X)$ nach $\exp(X)$, bis auf Reparametrisierung.*

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{U} \subseteq TM$ die Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.16(e), dh. $(\pi, \exp) : \mathcal{U} \to M \times M$ ist ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonale in $M \times M$. Durch Verkleinern von $\mathcal{U}$ können wir erreichen, dass diese Umgebung von der Form $\mathcal{U} = \{X \in TM : |X| < \varepsilon(\pi(X))\}$ ist, für eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0, \infty)$, vgl. Aufgabe 57. Für jedes $x \in M$ ist daher auch $\exp_x : B_{\varepsilon(x)}(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Das Korollar folgt daher aus Satz III.3.18(b)&(d). □

III.3.21. Korollar. *Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq M$ exsitiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft. Für $x \in K$ und $X \in T_xM$ mit $|X| = 1$, ist die Geodäte geo_X zumindest auf dem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ definiert, dh. $I_X \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{U} \subseteq TM$ die Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.20. Da K kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass $\{Y \in T_yM : y \in K, |Y| \leq \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}$. Ist nun $x \in K$ und $X \in T_xM$, $|X| = 1$, dann folgt $\pm\varepsilon X \in \mathcal{U}$, also ist $\mathrm{geo}_X(\pm\varepsilon) = \mathrm{geo}_{\pm\varepsilon X}(1) = \exp(\pm\varepsilon X)$ wohldefiniert, dh. $I_X \supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, vgl. Satz III.3.14(e) □

III.3.22. Korollar. *Geodäten sind lokal Distanz minimierende Kurven, dh. ist $c : I \to M$ eine Geodäte, dann besitzt jeder Punkt in I eine Umgebung $J \subseteq I$, sodass für je zwei Punkte $s, t \in J$, $s < t$, die Geodäte $c|_{[s,t]}$ die bis auf Reparametrisierung eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge $d(c(s), c(t))$ von $c(s)$ nach $c(t)$ darstellt.*

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{U} \subseteq TM$ die offene Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM$ aus Korollar III.3.20. Weiters sei nun $t_0 \in I$. Aus Stetigkeitsgründen existiert eine Umgebung J von t_0, sodass $(t - s)c'(s) \in \mathcal{U}$, für alle $s, t \in J$. Da c Geodäte ist, gilt weiters $c(t) = \exp((t - s)c'(s))$, $t, s \in I$. Nach der in Korollar III.3.20 formulierten Eigenschaft von $\mathcal{U}$, ist also $c|_{[s,t]}$ die eindeutige stückweise glatte Kurve minimaler Länge von $c(s)$ nach $c(t)$. □

III.3.23. Korollar. *Es existiert eine Umgebung U der Diagonale in $M \times M$, sodass sich je zwei Punkte $x, y \in M$ mit $(x, y) \in U$ durch eine, bis auf affine Reparametrisierung eindeutige Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbinden lassen. Bis auf Reparametrisierung ist dies die eindeutige (stückweise) glatte Kurve* *minimaler Länge von x nach y. Diese Geodäte ist von der Form $t \mapsto \exp_x(tX_{x,y})$, $t \in [0,1]$, für ein $X_{x,y} \in T_xM$, das glatt von (x,y) abhängig gewählt werden kann.*

Beweis. Bezeichnet $\mathcal{U} \subseteq TM$ die offene Umgebung des Nullschnitts aus Korollar III.3.20, dann hat $U := (\pi, \exp)(\mathcal{U}) \subseteq M \times M$ offensichtlich die gewüschten Eigenschaften. □

III.3.24. Korollar. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von $c(a) = x$ nach $c(b) = y$ mit minimaler Länge, dh.* $\mathrm{length}(c) = d(x,y)$*, dann kann c glatt nach Bogenlänge parametrisiert werden, und diese Reparametrisierung ist eine (ungebrochene) Geodäte.*

Beweis. Es sei $t \in [a,b]$. Wähle $a \leq \tilde{a} \leq t \leq \tilde{b} \leq b$, sodass $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ eine Umgebung von t in $[a,b]$ bildet und so, dass $(c(\tilde{a}), c(\tilde{b})) \in U$, wobei U die Umgebung der Diagonale in $M \times M$ aus Korollar III.3.23 bezeichnet. Beachte, dass auch das Teilstück $\tilde{c} := c|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ minimale Länge hat, $\mathrm{length}(\tilde{c}) = d(\tilde{c}(\tilde{a}), \tilde{c}(\tilde{b}))$. Aus Korollar III.3.23 folgt daher, dass sich $\tilde{c}$ glatt nach Bogenlänge parametrisieren lässt und in dieser Parametrisierung eine Geodäte ist. Das Korollar folgt nun unmittelbar. □

III.3.25. Beispiel (Geodäten in S^n)**.** Wir betrachten die Einheitssphäre $M = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit der von der flachen standard Riemannmetrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik, vgl. Beispiel III.1.11. Wir wollen nun zeigen, dass die Geodäten Großkreise in S^n parametrisieren, dh. die Bilder der Geodäten sind gerade die Durchschnitte $S^n \cap E \cong S^1$, wobei $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einen 2-dimensionalen linearen Teilraum bezeichnet. Dazu erinnern wir uns, dass die orthogonale Gruppe O_{n+1} auf S^n durch Isometrien wirkt. Insbesondere liefert die Spiegelung an einem 2-dimensionalen linearen Teilraum $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Isometrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(S^n)$ mit Fixpunktmenge $\{x \in S^n : \varphi(x) = x\} = S^n \cap E$. Es sei nun $x \in S^n \cap E$ und $X \in T_xS^n$ tangential an $S^n \cap E$. Jede Isometrie bildet Geodäten auf Geodäten ab, genauer haben wir aufgrund der Eindeutigkeit, $\varphi(\exp(tY)) = \exp(tT_y\varphi \cdot Y)$, $Y \in T_yM$. Da $T_x\varphi \cdot X = X$, folgt $\varphi(\exp(tX)) = \exp(tX)$, die Geodäte $\exp(tX)$ muss daher zur Gänze in der Fixpunktmenge $S^n \cap E$ liegen. Ist $X \neq 0$, dann muss das Bild der Geodäte aus Dimensionsgründen mit $S^n \cap E$ übereinstimmen. Ist $|X| = 1$ und fassen wir $X \in T_xS^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ auf, so gilt

$$\mathrm{geo}_X(t) = \cos(t)x + \sin(t)X, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

denn dies ist eine Bogenlängenparametrisierung von $S^n \cap E$, wobei E den von x und X erzeugten Teilraum bezeichnet. Auf der Sphäre lassen sich daher je zwei Punkte durch eine Geodäte verbinden, diese Geodäte ist aber i.A. nicht eindeutig, $x \in S^n$ lässt sich mit $-x$ durch viele verschiedene Geodäten gleicher (minimaler) Länge verbinden. Beachte auch, dass jede Geodäte in S^n geschlossen (periodisch) ist.

III.3.26. Proposition. *Es sei $x \in M$ und $R > 0$ so, dass die Exponentialabbildung $\exp_x : B_R(0) \to M$ definiert ist, vgl. Korollar III.3.16(c). Dann kann jeder*

Punkt $y \in B_R(x)$ *durch eine (i.A. nicht eindeutige) Geodäte der Länge* $d(x,y)$ *mit* x *verbunden werden. Insbesondere gilt daher* $\exp_x(B_r(0)) = B_r(x)$ *für alle* $0 < r \leq R$ *und* $\exp_x(D_r(0)) = D_r(x)$ *für alle* $0 < r < R$.

Beweis. Setze $r := d(x,y) < R$. Weiters sei $\varepsilon > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_x : B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, vgl. Korollar III.3.16(d). Wähle $0 < \delta < \min\{r, \varepsilon\}$. Da $S_\delta(x) = \exp_x(S_\delta(0))$ kompakt ist, vgl. Satz III.3.18(e), existiert $X \in T_xM$ mit $|X| = 1$ und

$$d(\exp_x(\delta X), y) = d(S_\delta(x), y).$$

Die Geodäte $c : [0,r] \to M$, $c(t) := \exp_x(tX)$, ist wohldefiniert, startet bei $c(0) = x$ und hat Länge $\operatorname{length}(c) = r = d(x,y)$. Da $\delta < r = d(x,y)$, muss jeder stückweise glatte Weg von x nach y die Sphäre $S_\delta(x)$ treffen, und wir erhalten

$$r = d(x,y) = \min_{z \in S_\delta(x)} \big(d(x,z) + d(z,y)\big) = \delta + d(S_\delta(x), y) = \delta + d(c(\delta), y),$$

also $d(c(\delta), y) = r - \delta$. Betrachte nun

$$t' := \sup\big\{t \in [0,r] : d(c(t), y) = r - t\big\} \geq \delta.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt daher auch $d(c(t'), y) = r - t'$. Es genügt nun $t' = r$ zu zeigen, denn dann $d(c(r), y) = r - r = 0$ und somit $c(r) = y$, also wäre c die gesuchte Geodäte.

Wir gehen indirekt vor und nehmen $\delta \leq t' < r$ an. Es sei $\varepsilon' > 0$ so, dass die Einschränkung der Exponentialabbildung $\exp_{c(t')} : B_{\varepsilon'}(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Wähle $0 < \delta' < \min\{r - t', \varepsilon'\}$. Da $S_{\delta'}(c(t')) = \exp_{c(t')}(S_{\delta'}(0))$ kompakt ist, existiert $z' \in S_{\delta'}(c(t'))$ mit $d(z', y) = d(S_{\delta'}(c(t')), y)$. Da $\delta' < r - t' = d(c(t'), y)$, muss jeder stückweise glatte Weg von $c(t')$ nach y die Sphäre $S_{\delta'}(c(t'))$ treffen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} r - t' = d(c(t'), y) &= \min_{s \in S_{\delta'}(c(t'))} \big(d(c(t'), s) + d(s, y)\big) \\ &= \delta' + d(S_{\delta'}(c(t')), y) = \delta' + d(z', y), \end{aligned}$$

also

$$d(z', y) = r - (t' + \delta'). \tag{III.50}$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir daraus $r = d(x,y) \leq d(x,z') + d(z',y) = d(x,z') + r - (t' + \delta')$ und somit

$$d(x, z') \geq t' + \delta'. \tag{III.51}$$

Nach Satz III.3.18(c) existiert eine Geodäte γ von $c(t')$ nach z' mit $\operatorname{length}(\gamma) = d(c(t'), z') = \delta'$. Konkatenation von $c|_{[0,t']}$ mit γ liefert eine stückweise glatte Kurve von x nach z' mit Länge $t' + \delta'$. Kombinieren wir dies mit (III.51), so folgt $d(x, z') = t' + \delta'$. Aus Korollar III.3.24 folgt daher, dass z' auf der Geodäte c liegen muss, $c(t' + \delta') = z'$. Zusammen mit (III.50) folgt $d(c(t' + \delta'), y) = r - (t' + \delta')$, ein Widerspruch zur Definition von t'. Somit muss $t' = r$ gelten, und der Beweis der Proposition ist vollständig. □

III.3.27. Satz (Hopf–Rinow). *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) M ist vollständig, dh. Cauchy Folgen bzgl. d konvergieren.
(b) Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge ist kompakt.
(c) Es existiert $x \in M$, sodass $\exp_x : T_xM \to M$ global definiert ist.
(d) M ist geodätisch vollständig, dh. die Exponentialabbildung $\exp : TM \to M$ ist global definiert.

In diesem Fall können je zwei Punkte $x, y \in M$ durch eine (i.A. nicht eindeutige) Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ verbunden werden.

Beweis. Die Implikation (d) $\Rightarrow$ (c) ist trivial. Um (c) $\Rightarrow$ (b) einzusehen, sei $x \in M$, sodass $\exp_x : T_xM \to M$ global definiert ist. Nach Proposition III.3.26 ist daher $\exp_x : D_r(0) \to D_r(x)$ surjektiv, für jedes $r > 0$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $D_r(0)$ ist $D_r(x)$ also kompakt. Da jede beschränkte Teilmenge in einem solchen Ball $D_r(x)$ enthalten sein muss, sind beschränkte abgeschlossene Teilmengen folglich kompakt. Die elementare Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) wurde bereits in Proposition III.3.7 nachgewiesen. Es bleibt noch (a) $\Rightarrow$ (d) zu zeigen. Wir gehen indirekt vor und nehmen an es existiere $x \in M$ und $X \in T_xM$, sodass die Geodäte $\operatorname{geo}_X : I_X \to M$ nicht global definiert ist, dh. für das maximale Definitionsintervall gilt $I_X \neq \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei $|X| = 1$ und $\sup I_X = r < \infty$. Da Geodäten proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, gilt

$$d\big(\operatorname{geo}_X(s), \operatorname{geo}_X(t)\big) \leq \operatorname{length}\big(\operatorname{geo}_X|_{[s,t]}\big) = |t - s|, \qquad s, t \in I_X,\ s \leq t.$$

Wegen der Vollständigkeitsvoraussetzung (a) existiert daher der Grenzwert $y := \lim_{t\to r} \operatorname{geo}_X(t)$ in M. Nach Korollar III.3.21 existiert eine Umgebung K von y in M und $\varepsilon > 0$, sodass $\operatorname{geo}_Y(\varepsilon)$ definiert ist, für alle $Y \in T_yM$ mit $|Y| = 1$, $y \in K$. Nach Konstruktion existiert $t \in I_X$ mit $t > r - \varepsilon$ und $\operatorname{geo}_X(t) \in K$. Setzen wir $Y := \operatorname{geo}'_X(t)$, dann ist also $\operatorname{geo}_Y(\varepsilon)$ definiert. Nach Satz III.3.14(d) ist daher auch $\operatorname{geo}_X(t+\varepsilon)$ definiert. Da $t+\varepsilon > r$, erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von r. Somit muss $I_X = \mathbb{R}$ gelten, M ist daher geodätisch vollständig. Damit ist die Äquivalenz der vier Aussagen gezeigt. Die letzte Behauptung folgt nun sofort aus Proposition III.3.26. □

III.3.28. Korollar. *Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich je zwei Punkte durch eine (i.A. nicht eindeutige, vgl. Beispiel III.3.25) Geodäte minimaler Länge verbinden.*

III.3.29. Beispiel (Geodäten im Hyperbolischen Raum). Wir versehen $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der pseudo Riemannmetrik $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ und betrachten $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x, x) = -1,\ x^0 > 0\}$ mit der davon induzierten Riemannschen Metrik. In Beispiel III.1.12 haben wir gesehen, dass H^n konstante negative Schnittkrümmung besitzt, $K = -1$. Von Beispiel III.1.12 abweichend, betrachten wir hier nur eine der beiden Zusammenhangskomponenten des Hyperboloids.

Sei nun $x \in H^n$ und $X \in T_xH^n = x^\perp$ mit $|X| = 1$. Bezeichnet E den von x und X erzeugten linearen Teilraum, dann liefert die Spiegelung an E eine Isometrie $\varphi \in \mathrm{Isom}(H^n)$, die x und X festhält. Wie in Beispiel III.3.25 folgt, dass $E \cap H^n = \{y \in H^n : \varphi(y) = y\}$ Bild einer Geodäte ist. Genauer haben wir

$$\mathrm{geo}_X(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)X,$$

denn dies ist eine Bogenlängenparametrisierung von $H^n \cap E$. Insbesondere ist H^n (geodätisch) vollständig, je zwei Punkte in H^n lassen sich daher durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden, vgl. Satz III.3.27. Aus der expliziten Beschreibung der Geodäten sehen wir sogar, dass sich je zwei Punkte in H^n durch eine *eindeutige* Geodäte verbinden lassen, denn zwei solche Punkte liegen in genau einem 2-dimensionalen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir schließen, dass $\exp_x : T_xH^n \to H^n$ eine glatte Bijektion (sogar ein Diffeomorphismus) ist, für jedes $x \in H^n$. Um diese Geodäten explizit anzugeben, seien $x, y \in H^n$ und $X := (g(x,y)^2 - 1)^{-1/2}(g(x,y)x + y) \in T_xH^n = x^\perp$, $|X| = 1$. Die Geodäte $\mathrm{geo}_X(t) = \cosh(t)x + \sinh(t)X$ startet bei $\mathrm{geo}_X(0) = x$ und trifft den Punkt y zu jenem Zeitpunkt $t \geq 0$, für den $\cosh(t) = -g(x,y)$ gilt. Für die Distanz erhalten wir daraus

$$\cosh(d(x,y)) = -g(x,y), \qquad x, y \in H^n. \tag{III.52}$$

Beachte, dass die Gruppe $\mathrm{O}_+(1,n) := \{A \in \mathrm{O}(1,n) : g(Ae_0, e_0) < 0\}$ durch Isometrien auf H^n wirkt, $\mathrm{O}_+(1,n) \subseteq \mathrm{Isom}(H^n)$. Wir wollen nun zeigen, dass dies schon die volle Isometriegruppe des hyperbolischen Raums ist,

$$\mathrm{Isom}(H^n) \cong \mathrm{O}_+(1,n). \tag{III.53}$$

Sei dazu $\psi \in \mathrm{Isom}(H^n)$ beliebig. Da $\mathrm{O}_+(1,n)$ transitiv auf H^n wirkt, existiert $A \in \mathrm{O}_+(1,n)$, sodass die Isometrie $\psi_1 := A^{-1} \circ \psi$ den Punkt e_0 festhält, $\psi_1(e_0) = e_0$. Da $T_{e_0}\psi_1$ eine orthogonale Abbildung ist, existiert $B \in \{1\} \times \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{O}_+(1,n)$, sodass die Isometrie $\psi_2 := B^{-1} \circ \psi_1$ nun $\psi_2(e_0) = e_0$ und $T_{e_0}\psi_2 = \mathrm{id}_{T_{e_0}H^n}$ erfüllt. Daraus folgt, dass ψ_2 Punkte, die auf Geodäten durch e_0 liegen festhält. Somit gilt $\psi_2 = \mathrm{id}_{H^n}$, also $\psi = AB \in \mathrm{O}_+(1,n)$. Dies zeigt (III.53). Für die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien, $\mathrm{Isom}_+(H^n)$, erhalten wir daraus

$$\mathrm{Isom}_+(H^n) \cong \mathrm{SO}_+(1,n). \tag{III.54}$$

Ein analoges Argument zeigt auch $\mathrm{Isom}(S^n) = \mathrm{O}(n+1)$, vgl. Beispiel III.1.11.

III.3.30. Beispiel (Poincaré Scheibenmodell)**.** Wir wollen nun das *Poincaré Scheibenmodell* des hyperbolischen Raums beschreiben. Dazu identifizieren wir den Einheitsball $\mathbb{E}^n := \{u \in \mathbb{R}^n : |u| < 1\}$ durch stereographische Projektion mit dem Hyperboloid H^n, dh. wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{E}^n \to H^n, \qquad f(u) := \frac{1}{1 - |u|^2}\big(1 + |u|^2, 2u\big) = (x^0, x), \tag{III.55}$$

mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : H^n \to \mathbb{E}^n, \qquad f^{-1}(x^0, x) = \frac{1}{1 + x^0} x = u.$$

Ziehen wir die Riemannsche Metrik auf H^n, siehe Beispiel III.3.29, mittels f auf den Einheitsball zurück, so erhalten wir

$$g_{\mathbb{E}^n} := f^* g = \frac{4g_0}{(1 - |u|^2)^2}, \tag{III.56}$$

wobei $g_0 = \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i$ die Einschränkung der Standard Riemannmetrik auf $\mathbb{E}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Um dies einzusehen, beachte

$$dx^0 = d\frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2} = \frac{\sum_i 2u^i du^i (1 - |u|^2) + (1 + |u|^2) \sum_i 2u^i du^i}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{4 \sum_i u^i du^i}{(1 - |u|^2)^2}$$

also

$$dx^0 \otimes dx^0 = \frac{16}{(1 - |u|^2)^4} \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j$$

und

$$dx^j = d\frac{2u^j}{1 - |u|^2} = \frac{2du^j (1 - |u|^2) + 4u^j \sum_i u^i du^i}{(1 - |u|^2)^2}, \qquad 1 \leq j \leq n,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n dx^j \otimes dx^j = \frac{1}{(1 - |u|^2)^4} \Bigg(& 4(1 - |u|^2)^2 \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j \\ & + 16(1 - |u|^2) \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j + 16 \sum_{j=1}^n (u^j)^2 \sum_{i,k=1}^n u^i u^k du^i \otimes du^k \Bigg) \\ = \frac{1}{(1 - |u|^2)^4} & \left(4(1 - |u|^2)^2 \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j + 16 \sum_{i,j=1}^n u^i u^j du^i \otimes du^j \right) \end{aligned}$$

und somit

$$f^* g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_j dx^j \otimes dx^j = \frac{4}{(1 - |u|^2)^2} \sum_{j=1}^n du^j \otimes du^j = \frac{4g_0}{(1 - |u|^2)^2},$$

wie behauptet.

Aus (III.52) und (III.55) erhalten wir für die Hyperbolische Distanz

$$\cosh(d_{\mathbb{E}^n}(u, v)) = 1 + \frac{2|u - v|^2}{(1 - |u|^2)(1 - |v|^2)}, \qquad u, v \in \mathbb{E}^n.$$

Insbesondere daher

$$\cosh(d_{\mathbb{E}^n}(u, 0)) = \frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2}, \qquad u \in \mathbb{E}^n. \tag{III.57}$$

Aus (III.56) folgt für die Volumsform $\mathrm{vol}_{B^n} \in \Omega^n(B^n)$, vgl. Aufgabe 58,

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{E}^n} = \Big(\frac{2}{1-|u|^2}\Big)^n du^1 \wedge \cdots \wedge du^n.$$

Das Volumen der hyperbolischen Bälle $D_r^{\mathbb{E}^n} := \{u \in \mathbb{E}^n : d_{\mathbb{E}^n}(u,0) \leq r\}$ ist

$$\mathrm{Vol}\big(D_r^{\mathbb{E}^n}\big) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \sinh^{n-1}(\rho) d\rho, \tag{III.58}$$

denn nach (III.57) gilt $D_r^{\mathbb{E}^n} = \big\{u \in \mathbb{E}^n : |u| < \frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}\big\}$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\big(D_r^{\mathbb{E}^n}\big) &= \int_{|u|\leq\frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}} \Big(\frac{2}{1-|u|^2}\Big)^n du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\frac{\sinh(r)}{1+\cosh(r)}} \Big(\frac{2}{1-t^2}\Big)^n t^{n-1} dt = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \sinh^{n-1}(\rho) d\rho,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $t = \frac{\sinh(\rho)}{1+\cosh(\rho)}$ verwendet haben, $\frac{2}{1-t^2} = 1 + \cosh(\rho)$, $dt = \frac{d\rho}{1+\cosh(\rho)}$. Das Volumen der hyperbolischen Bälle wächst daher exponentiell mit dem Radius r. Durch Ableiten erhalten wir aus (III.58) auch das Volumen der hyperbolischen Sphären,

$$\mathrm{Vol}\big(S_r^{\mathbb{E}^n}\big) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sinh^{n-1}(r),$$

auch dies wächst exponentiell mit dem Radius.

Die Bilder der Geodäten in $\mathbb{E}^n$ sind Kreise, die den Rand der von $\mathbb{E}^n$ orthogonal treffen, bzw. Geraden durch den Mittelpunkt $0 \in \mathbb{E}^n$. Um dies einzusehen betrachten wir eine Ebene

$$E = \big\{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x^0 \sin\theta = x^1 \cos\theta, x^3 = 0, \dots, x^n = 0\big\}, \tag{III.59}$$

wobei $|\theta| < \pi/4$. Das Bild der Geodäte $f^{-1}(E \cap H^n)$ in $\mathbb{E}^n$ ist daher, vgl. (III.55), durch das Gleichungssysthem

$$\big(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2\big) \sin\theta = 2u^1 \cos\theta, u^3 = 0, \dots, u^n = 0$$

beschrieben. Für $\theta = 0$ liefert dies eine Geraden, und für $\theta \neq 0$ die Gleichung eines Kreises, der den Rand von $\mathbb{E}^n$ in den beiden Punkten $(v^1, \pm v^2, 0, \dots, 0)$ trifft, wobei $v^1 = \tan\theta$ und $v^2 = \pm\sqrt{1-(v^1)^2}$. Die Tangenten in diesen Punkten sind durch

$$u^2 v^2 \sin\theta = u^1(\cos\theta - v^1 \sin\theta), u^3 = 0, \dots, u^n = 0$$

gegeben, gehen also durch den Ursprung, folglich schneidet der Kreis den Rand von $\mathbb{E}^n$ orthogonal. Beachte, dass jede Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ die H^n schneidet durch eine Isometrie in $\{1\} \times \mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{O}(1, n)$ auf eine Ebene der Form (III.59) abgebildet werden kann, und dass der Diffeomorphismus (III.55) $\mathrm{O}(n)$-äquivariant ist, dh. obige Beobachtung bleibt für beliebige Geodäten in $\mathbb{E}^n$ richtig.

III.3.31. Beispiel (Poincaré Halbraummodell)**.** Schließlich wollen wir noch das *Poincaré Halbraummodell* des hyperbolischen Raums beschreiben. Dazu identifizieren wir den Halbraum $\mathbb{H}^n = \{(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n : y^1 > 0\}$ durch Inversion bei $P := (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ mit dem Einheitsball, dh. wir betrachten den Diffeomorphismus

$$h : \mathbb{H}^n \to \mathbb{E}^n, \qquad h(y) := P + \frac{2(y-P)}{|y-P|^2} = u, \tag{III.60}$$

mit Umkehrabbildung

$$h^{-1} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{H}^n, \qquad h^{-1}(u) = P + \frac{2(u-P)}{|u-P|^2} = x.$$

Da

$$|h(y)|^2 = 1 + \frac{4\langle y, P\rangle}{|y-P|^2}, \tag{III.61}$$

gilt $h(y) \in \mathbb{E}^n$ genau dann wenn $y \in \mathbb{H}^n$. Beachte auch

$$\begin{aligned} |h(y) - h(z)|^2 = \frac{4}{|y-P|^2} + \frac{4}{|z-P|^2} - \frac{8\langle y-P, z-P\rangle}{|y-P|^2|z-P|^2} \\ = \frac{4|(y-P)-(z-P)|^2}{|y-P|^2|z-P|^2} = \frac{4|y-z|^2}{|y-P|^2|z-P|^2} \end{aligned}$$

also mit (III.61)

$$\frac{|h(y)-h(z)|^2}{(1-|h(y)|^2)(1-|h(z)|^2)} = \frac{4|y-z|^2}{16\langle y, P\rangle\langle z, P\rangle} = \frac{|y-z|^2}{4y^1z^1}$$

und nach (III.57) daher

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(y,z)) = 1 + \frac{|y-z|^2}{2y^1z^1}, \qquad y, z \in \mathbb{H}^n.$$

Ziehen wir die Riemannsche Metrik $g_{\mathbb{E}^n}$ mit h auf den Halbraum zurück, so erhalten wir

$$g_{\mathbb{H}^n} := h^* g_{\mathbb{E}^n} = \frac{dy^1 \otimes dy^1 + \cdots + dy^n \otimes dy^n}{(y^1)^2} = \frac{g_0}{(y^1)^2},$$

denn $u^1 = -1 + \frac{2(y^1+1)}{|y-P|^2}$, also

$$du^1 = \frac{1}{|y-P|^4}\Big(2|y-P|^2 dy^1 - 4(y^1+1)^2 dy^1 - 4(y^1+1)\sum_{i=2}^n y^i dy^i\Big)$$

und $u^i = \frac{2y^i}{|y-P|^2}$, $2 \le i \le n$, also

$$du^i = \frac{1}{|y-P|^4}\Big(2|y-P|^2 dy^i - 4y^i(y^1+1)dy^1 - 4y^i \sum_{j=2}^n y^j dy^j\Big), \quad 2 \le i \le n,$$

und durch direkte Rechnung

$$h^*g_0 = \frac{4g_0}{|y-P|^4}$$

und daher mittels (III.56) & (III.61)

$$h^*g_{\mathbb{E}^n} = \frac{16g_0}{(1-|h(y)|^2)^2|y-P|^4} = \frac{16g_0}{16\langle y,P\rangle^2} = \frac{g_0}{(y^1)^2}.$$

Da die Inversion bei P Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbildet sehen wir, dass die Bilder von Geodäten in $\mathbb{H}^n$ Kreise oder Geraden bilden die den Rand von $\mathbb{H}^n$ orthogonale treffen.

III.3.32. Beispiel (Hyperbolische Ebene)**.** Wir wollen nun noch den 2-dimensionalen Hyperbolischen Raum besprechen. Das Poincaré Scheibenmodell, siehe Beispiel III.3.30, $\mathbb{E} := \mathbb{E}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit Metrik

$$g_{\mathbb{E}} = \frac{4g_0}{(1-|z|^2)^2},$$

und das Poincaré Halbraummodell $\mathbb{H} := \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ mit Metrik

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{g_0}{\operatorname{Im}(z)^2},$$

siehe Beispiel III.3.31, wobei g_0 wieder die standard Riemannmetrik auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir bezeichnen die Möbiustransformationen mit

$$\psi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\pm 1.$$

Es gilt

$$\psi_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm 1,$$

und jedes solche ψ_A wirkt als orientierungsbewahrende Isometrie auf $\mathbb{H}$. Da H^2 und $\mathbb{H}$ isometrische Riemannmannigfaltigkeiten bilden, vgl. Beispiel III.3.31, erhalten wir mit (III.54) nun leicht

$$\mathrm{SO}_+(1,2) \cong \mathrm{Isom}_+(H^2) \cong \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm 1.$$

Die volle Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ wird von $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H})$ und der orientierungsumkehrenden Isometrie $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$, erzeugt. Ebenso haben wir

$$\psi_A(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{SU}(1,1)/\pm 1,$$

und jedes solche ψ_A wirkt als orientierungsbewahrende Isometrie auf $\mathbb{E}$. Da H^2 und $\mathbb{E}$ isometrische Riemannmannigfaltigkeiten bilden, erhalten wir analog

$$\mathrm{SO}_+(1,2) \cong \mathrm{Isom}_+(H^2) \cong \mathrm{Isom}_+(\mathbb{E}) \cong \mathrm{SU}(1,1)/\pm 1.$$

Die volle Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ wird von $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{E})$ und der orientierungsumkehrenden Isometrie $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \bar{z}$, erzeugt. Beachte auch, dass die Möbiustransformation

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \qquad \psi(z) := \frac{\mathbf{i}z+1}{z+\mathbf{i}},$$

eine Isometrie $\mathbb{H} \cong \mathbb{E}$ liefert, denn $\psi(z) = \overline{h(z)}$, vgl. (III.60).

III.3.33. Bemerkung (Total geodätische Teilmannigfaltigkeiten)**.** Eine Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M wird *total geodätisch* genannt, wenn jede Geodäte von S (bzgl. der von M induzierten Riemannmetrik) auch Geodäte in M ist. Wir erinnern uns an

$$\nabla_X Y = \nabla^S_X Y + \mathrm{II}(X, Y), \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(S), \tag{III.62}$$

wobei $\mathrm{II} \in \Gamma(S^2T^*S \otimes T^\perp S)$ die zweite Fundamentalform von S bezeichnet, siehe Satz III.1.9(c). Ist nun $c : I \to S$ eine Geodäte in S, die gleichzeitig Geodäte in M ist, dann gilt $\nabla^S_{c'} c' = 0 = \nabla_{c'} c'$ und wegen (III.62) daher $\mathrm{II}(c', c') = 0$. Da die zweite Fundamentalform symmetrisch ist, folgt nun, dass S genau dann total geodätisch ist wenn die zweite Fundamentalform von S verschwindet, $\mathrm{II} = 0$. Beispiele: affine Teilräume im flachen $\mathbb{R}^n$ bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten; Durchschnitte linearer Teilräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit S^n bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten der runden Sphäre; Durchschnitte linearer Teilräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit H^n bilden total geodätische Teilmannigfaltigkeiten im hyperbolischen Raum; ist das Bild einer Geodäte eine Teilmannigfaltigkeit, dann ist diese offensichtlich total geodätisch.

III.3.34. Korollar. *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist der Raum der stetigen Abbildungen $C(X, M)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, lokal kontrahierbar. Insbesondere existiert zu $f \in C(X, M)$ ein $\varepsilon > 0$, sodass jede stetige Abbildung $h : X \to M$ mit $\max_{x \in X} d(f(x), h(x)) < \varepsilon$ homotop zu f ist.*

Beweis. Nach Korollar III.3.20 existiert eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0, \infty)$, sodass die offene Umgebung des Nullschnitts $\mathcal{U} := \{\xi \in TM : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\}$ durch $(\pi, \exp)$ diffeomorph auf eine offene Umgebung der Diagonale U abgebildet wird. Ist nun $f \in C(X, M)$, dann bildet

$$\mathcal{C}_f(X, M) := \big\{h \in C(X, M) \bigm| \forall x \in X : (f(x), h(x)) \in U\big\}$$

eine kontrahierbare Umgebung von f, eine entsprechende Kontraktion ist durch

$$\mathcal{C}_f(X, M) \times [0, 1] \to \mathcal{C}_f(X, M), \quad (h, t) \mapsto \exp \circ \big(t((\pi, \exp)^{-1} \circ (f, h))\big),$$

gegeben, dh. $h_t(x) = \exp_{f(x)}(t \exp^{-1}_{f(x)}(h(x)))$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = h$. □

III.3.35. Definition (Geodätisch konvexe Teilmengen)**.** Eine Teilmenge A in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird *geodätisch konvex* genannt, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in A$ genau eine Geodäte minimaler Länge $d(x, y)$ von x nach y existiert und diese zur Gänze in A liegt. Beachte, dass der Durchschnitt geodätisch konvexer Teilmengen offensichtlich wieder geodätisch konvex ist.

III.3.36. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $x \in M$, dann sind die Bälle $B_\rho(x)$, für hinreichend kleine $\rho > 0$, geodätisch konvex.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ wie in Satz III.3.18. Durch Verkleinern von ε dürfen wir annehmen, dass je zwei Punkte in $B_\varepsilon(x)$ durch eine eindeutige Geodäte minimaler Länge verbunden werden können, siehe Korollar III.3.23. Wir wählen eine Orthonormalbasis von T_xM, betrachten die damit assozierten Riemannschen Normalkoordinaten, vgl. Bemerkung III.3.17, und bezeichnen die entsprechenden Christoffel Symbole mit Γ_{ij}^k. Nach (III.47) gilt daher $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$. Durch weiteres Verkleinern von ε können wir also auch erreichen, dass

$$\Biggl(\sum_{k=1}^n\Bigl(\sum_{i,j=1}^n\Gamma_{ij}^k(y)v^iv^j\Bigr)^2\Biggr)^{1/2}\leq |v|^2,\qquad y\in B_\varepsilon(x),\ v=(v^1,\dots,v^n)\in\mathbb{R}^n.$$

Ist c eine Geodäte in $B_\varepsilon(x)$ und bezeichnen $\tilde c = (\tilde c^1,\dots,\tilde c^n)$ die Komponenten von $\tilde c$ in Riemannschen Normalkoordinaten, dann folgt aus der Geodätengleichung $(\tilde c^k)'' = -\sum_{i,j=1}^n\Gamma_{ij}^k(\tilde c^i)'(\tilde c^j)'$, siehe Lemma III.3.10, zusammen mit obiger Abschätzung

$$|\tilde c''(t)|\leq|\tilde c'(t)|^2. \tag{III.63}$$

Setzen wir weiters $\varepsilon\leq 1$ voraus, dann gilt auch, vgl. Satz III.3.18(d),

$$1-|\tilde c(t)|\geq 0. \tag{III.64}$$

Sei nun $0<\rho\leq\varepsilon/3$. Wir werden unten zeigen, dass der Ball $B_\rho(x)$ geodätisch konvex ist. Seien dazu $y,z\in B_\rho(x)$. Nach Konstruktion existiert eine eindeutige Geodäte minmaler Länge, die y mit z verbindet. Da $d(y,z)\leq d(y,x)+d(x,z)<2\rho$, liegt diese zur Gänze in $B_{2\rho}(y)\subseteq B_{3\rho}(x)\subseteq B_\varepsilon(x)$. Wir bezeichnen diese Geodäte mit $c:[a,b]\to B_\varepsilon(x)$. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild von c sogar im Ball $B_\rho(x)$ liegt. Betrachte dazu die glatte Abbildung

$$r:[a,b]\to\mathbb{R},\qquad r(t):=d(x,c(t))^2/2=|\tilde c(t)|^2/2, \tag{III.65}$$

wobei $\tilde c=(\tilde c^1,\dots,\tilde c^n)$ die Komponenten der Geodäte in Riemannschen Normalkoordinaten bezeichnen, vgl. Satz III.3.18(d). Beachte, $r'(t)=\langle\tilde c(t),\tilde c'(t)\rangle$ und

$$r''(t)=|\tilde c'(t)|^2+\langle\tilde c(t),\tilde c''(t)\rangle\geq|\tilde c'(t)|^2-|\tilde c(t)||\tilde c''(t)|\geq|\tilde c'(t)|^2\bigl(1-|\tilde c(t)|\bigr)\geq 0$$

nach Cauchy–Schwarz, (III.63) und (III.64). Somit ist (III.65) eine konvexe Funktion. Für jedes $t\in[a,b]$ gilt daher $r(t)\leq\max\{r(a),r(b)\}<\rho^2/2$, also liegt c zur Gänze im Ball $B_\rho(x)$. □

III.3.37. Satz. *Jede nicht-leere, hinreichend kleine, offene, geodätisch konvexe Teilmenge einer Riemannschen n-Mannigfaltigkeit M ist zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorph. Genauer existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K\subseteq M$ ein $\varepsilon>0$, sodass jede offene, geodätisch konvexe Teilmenge $U\subseteq K$ mit $\operatorname{diam}(U)\leq\varepsilon$ schon diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ sein muss.*

Beweis. Sei also U eine offene, geodätisch konvexe Teilmenge und $x\in U$. Da U offen ist, bildet

$$V:=\bigl\{\xi\in T_xM\bigm|\forall t\in[0,1]:\exp_x(t\xi)\in U\bigr\}$$

eine offene Umgebung von 0 in T_xM. Da U geodätisch konvex ist, liefert die Exponentialabbildung $\exp_x : V \to U$ eine glatte Bijektion. Ist U hinreichend klein, dann ist dies ein Diffeomorphismus, $V \cong U$. Der Satz folgt daher aus Lemma III.3.38 unten. □

III.3.38. Lemma. *Jede sternförmige, offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. O.B.d.A. sei 0 Zentrum von U, dh. für jedes $x \in U$ liegt die affine Strecke von 0 nach x zur Gänze in U. Durch Anwenden des radialen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \cong B^n$, $x \mapsto x(1+|x|^2)^{-1/2}$, dürfen wir weiters $U \subseteq B^n$ annehmen. Mit Hilfe einer Partition der Eins lässt sich leicht eine glatte Funktion $\chi : U \to (0,\infty)$ konstruieren, sodass

$$\chi(x) < d(x, \mathbb{R}^n \setminus U), \qquad x \in U. \tag{III.66}$$

Betrachte nun die glatte Funktion $\lambda : U \to (0,\infty)$, $\lambda(x) := \int_0^1 \frac{dt}{\chi(tx)}$, und definiere eine glatte Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x) := \lambda(x)x. \tag{III.67}$$

Um zu verstehen wie f auf radialen Strahlen wirkt, fixieren wir $\xi \in S^{n-1}$ und setzen $r := \sup\{s \geq 0 \mid s\xi \in U\} \leq 1$. Für $s \in [0,r)$ gilt $\lambda(s\xi) = \int_0^1 \frac{dt}{\chi(ts\xi)} = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}$, also

$$f(s\xi) = \int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}\xi, \qquad s \in [0,r).$$

Beachte, dass $s \mapsto \int_0^s \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)}$ streng monoton wachsend ist, denn $\chi > 0$. Aus (III.66) erhalten wir weiters $\chi(s\xi) \leq r - s$, woraus wir $\int_0^r \frac{d\tau}{\chi(\tau\xi)} \geq \int_0^r \frac{d\tau}{r-\tau} = \infty$ schließen. Dies zeigt, dass f den Strahl $U \cap ([0,\infty)\xi)$ diffeomorph auf den Strahl $[0,\infty)\xi$ abbildet. Folglich ist (III.67) eine glatte Bijektion. Für die Ableitung von f gilt

$$D_xf \cdot X = d\lambda_x(X)x + \lambda(x)X, \qquad x \in U,\ X \in \mathbb{R}^n,$$

woraus wir sehen, dass D_xf invertierbar ist. Nach dem inversen Funktionensatz ist (III.67) daher ein Diffeomorphismus. □

III.3.39. Bemerkung. Nach Satz III.3.36 besitzt jede Riemannsche Mannigfaltigkeit eine offene Überdeckung durch geodätisch konvexe Teilmengen, und diese Überdeckung kann so gewählt werden, dass sie einer vorgegebenen offenen Überdeckung untergeordnet ist. Jede Überdeckung durch offene, geodätisch konvexe Teilmengen ist gut im Sinn von Definition I.3.24. Dies folgt aus Satz III.3.37, denn jeder nicht-leere Durschnitt endlich vieler offener, geodätisch konvexer Teilmengen ist offensichtlich wieder offen und geodätisch konvex. Damit ist also Satz I.3.25 bewiesen.

Als weitere Anwendung von Korollar III.3.16 wollen nun noch die Existenz tubulärer Umgebungen beweisen, vgl. Satz II.1.16 oben.

III.3.40. Satz (Tubuläre Umgebungen)**.** *Es sei $S \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit mit Normalenbündel $T^\perp S = TM|_S/TS$. Dann existiert eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : T^\perp S \cong U$ mit $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}$, wobei wir S mit dem Nullschnitt in $T^\perp S$ identifizieren.*

Beweis. Wir fixieren eine Riemannmetrik auf M und identifizieren $T^\perp S = \{X \in TM|_S : X \perp S\}$. Nach Korollar III.3.16(a) existiert eine offene Umgebung des Nullschnitts $\mathcal{D} \subseteq T^\perp S$, sodass $\varphi := \exp|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to M$ wohldefiniert ist. Offensichtlich gilt $\varphi(x) = x$ für $x \in S$ und somit auch $T_x\varphi \cdot X = X$ für $X \in T_xS$. Aus Korollar III.3.16(c) erhalten wir weiters $T_x\varphi \cdot X = X$, für $x \in S$ und $X \in T_x^\perp S$. Bis auf die Identifikationen $T_xT^\perp S = T_xS \oplus T_x^\perp S = T_xM$ hat die Ableitung von φ bei $x \in S$ daher die Form

$$T_x\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{T_xS} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{T_x^\perp S} \end{pmatrix}.$$

Durch Verkleineren von $\mathcal{D}$ können wir erreichen, dass die Ableitung $T_\xi\varphi$ bei jedem $\xi \in \mathcal{D}$ invertierbar ist. Nach dem inversen Funktionensatz ist $\varphi|_{\mathcal{D}}$ somit ein lokaler Diffeomorphismus. Es bleibt nun zu zeigen, dass durch weiteres Schrumpfen von $\mathcal{D}$ auch Injektivität von $\varphi|_{\mathcal{D}}$ erreicht werden kann, vgl. [**2**, §12] oder [**4**, Chapter 4§5].

Durch weiteres Verkleinern von $\mathcal{D}$ können wir zunächst sicher stellen, dass $d(\pi(\xi), \varphi(\xi)) = |\xi|$, für alle $\xi \in \mathcal{D}$, siehe Korollar III.3.20. Es existiert eine glatte Funktion $\varepsilon : S \to (0, \infty)$, sodass für jedes $x \in S$

$$V_x := \big\{\xi \in T^\perp S : d(\pi(\xi), x) < \varepsilon(x),\ |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\big\} \subseteq \mathcal{D}$$

und $\varphi|_{V_x}$ ein Diffeomorphismus ist.[14] Wir werden nun zeigen, dass φ auf der offenen Umgebung des Nullschnitts $V := \{\xi \in T^\perp S : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))/2\} \subseteq \mathcal{D}$ injektiv ist. Seien dazu $\xi, \eta \in V$ mit $\varphi(\xi) = \varphi(\eta)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(\pi(\xi), \pi(\eta)) &\leq d(\pi(\xi), \varphi(\xi)) + d(\varphi(\eta), \pi(\eta)) \\ &= |\xi| + |\eta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon(\pi(\xi)) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(\pi(\eta)) \leq \max\{\varepsilon(\pi(\xi)), \varepsilon(\pi(\eta))\}. \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $d(\pi(\xi), \pi(\eta)) < \varepsilon(\pi(\eta))$. Dann ist $\xi \in V_{\pi(\eta)}$, und trivialerweise auch $\eta \in V_{\pi(\eta)}$. Da φ auf $V_{\pi(\eta)}$ ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir $\xi = \eta$, also ist φ auf V injektiv. Somit liefert φ einen Diffeomorphismus von V auf die offene Umgebung $U := \varphi(V)$ von S in M. Setzen wir φ noch mit dem radialen Diffeomorphismus

$$T^\perp S \xrightarrow{\cong} V, \qquad \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + (2|\xi|/\varepsilon(\pi(\xi))^2}}\,\xi,$$

zusammen, so erhalten wir den gewünschten Diffeomorphismus $T^\perp S \cong U$. □

[14] Zu jedem $y \in S$ existiert $\rho_y > 0$, sodass $W_y := \{\xi \in T^\perp S : |\xi| < \rho_y,\ d(\pi(\xi), y) < \rho_y\} \subseteq \mathcal{D}$ und $\varphi|_{W_y}$ ein Diffeomorphismus ist. Dies folgt daraus, dass φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, es geht aber auch ein, dass S die Teilraumtopologie von M trägt. Mit Hilfe einer Partition der Eins auf S lässt sich damit die gesuchte Funktion ε konstruieren.