III.4. Überlagerungen. In diesem Abschnitt wiederholen wir zuerst die Grundlagen der Überlagerungstheorie topologischer Räume, siehe etwa [**5**, Kapitel IX], [**14**, Chapter 1.3], [**18**, Kapitel II.6], [**16**, Kapitel III.6], [**17**, Chapter 2] oder [**15**, Chapter 3]. Anschließend zeigen wir, dass jede endlich präsentierbare Gruppe als Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden glatten orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit vorgegebener Dimension $n \geq 4$ realisiert werden kann, siehe Satz III.4.34 unten. Die Überlagerungstheorie glatter Mannigfaltigkeiten ist daher sehr reichhaltig. Im letzten Teil dieses Abschnitts widmen wir uns Riemannschen Überlagerungen. Unter anderem werden wir sehen, dass die Exponentialabbildung einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit eine Überlagerung ist, wenn sie in jedem Punkt invertierbare Ableitung hat, siehe Korollar III.4.40 unten. In diesem Fall ist die universelle Überlagerung daher zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorph, eine starke Einschränkung an die Topologie solcher Mannigfaltigkeiten. Im nächsten Abschnitt werden wir dies auf Mannigfaltigkeiten mit nicht positiver Schnittkrümmung anwenden.

Eine Überlagerung ist eine surjektive stetige Abildung $p : \tilde{X} \to X$ mit folgender Eigenschaft. Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x, ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$, sodass $\mathrm{pr}_1 \circ \phi = p|_{p^{-1}(U)}$, wobei $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ die kanonische Projektion bezeichnet.[15] In dieser Situation werden X und $\tilde{X}$ als *Basis* und *Totalraum* der Überlagerung bezeichnet, p wird *Überlagerungsabbildung* oder *Projektion* genannt. Für $x \in X$ wird der diskrete Raum $F_x := p^{-1}(x)$ als Faser über x bezeichnet. Die Kardinalität der Faser F_x ist lokal konstant in x, für zusammenhängendes X ist sie daher konstant. Besteht jede Faser aus k Elementen, dann sprechen wir von einer *k-blättrigen Überlagerung.* Zwei Überlagerungen $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ und $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ von X werden isomorph genannt, falls ein Homöomorphismus $\psi : \tilde{X}_1 \xrightarrow{\cong} \tilde{X}_2$ mit $p_2 \circ \psi = p_1$ existiert. Unter einer Decktransformation einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, verstehen wir einen Homöomorphismus $\phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $p \circ \phi = p$. Die Menge der Decktransformationen bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die als Symmetriegruppe der Überlagerung verstanden werden kann und mit $\mathrm{Deck}(p)$ oder $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ bezeichnet wird.

III.4.1. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f, g : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p \circ f = p \circ g$. Dann ist die Menge $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ offen und abgeschlossen in Y. Insbesondere ist die Fixpunktmenge einer Decktransformation stets offen und abgeschlossen. Für zusammenhängendes $\tilde{X}$ wirkt die Gruppe der Deckransformationen daher frei, und sogar strikt diskontinuierlich[16] auf $\tilde{X}$.*

[15] Überlagerungen sind daher lokal triviale Faserbündel mit diskreten Fasern.

[16] Eine Gruppenwirkung $G \times Y \to Y$ auf einem topologischen Raum Y wird strikt diskontinuierlich genannt, falls jeder Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $gU \cap U = \emptyset$, für alle $1 \neq g \in G$. Strikt diskontinuierliche Wirkungen müssen insbesondere frei sein, die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht.

Beweis. Die Offenheit von $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ folgt daraus, dass Überlagerungsabbildungen lokal injektiv sind. Da Punkte einer Faser durch offene Mengen getrennt werden können ist diese Menge auch abgeschlossen. Sei nun $\tilde{X}$ zusammenhängend, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $\tilde{x}$ auf der p injektiv ist. Weiters sei $\phi \in \operatorname{Deck}(\tilde{X})$ mit $\phi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Dann existiert $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\phi(\tilde{y}) \in \tilde{U}$ und $p(\tilde{y}) = p(\phi(\tilde{y}))$, also $\phi(\tilde{y}) = \tilde{y}$ wegen der Injektivität von $p|_{\tilde{U}}$. Da die Menge der Fixpunkte von ϕ offen und abgeschlossen ist, folgt $\phi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Dies zeigt, dass $\operatorname{Deck}(\tilde{X})$ strikt diskontinuierlich auf $\tilde{X}$ wirkt. □

III.4.2. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine surjektive stetige Abbildung mit folgender Eigenschaft: zu jedem Punkt $x \in X$ existiere eine offene Umgebung U von x und paarweise disjunkte offene Umgebungen $U_{\tilde{x}}$ von $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$, sodass $p|_{U_{\tilde{x}}} : U_{\tilde{x}} \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Dann ist p eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. Es seien x, U und $U_{\tilde{x}}$ wie in der Formulierung des Lemmas. Wir versehen $F := p^{-1}(x)$ mit der diskreten Topologie und betrachte die Abbildung

$$\phi : U \times F \to p^{-1}(U) \subseteq \tilde{X}, \qquad \phi(y, \tilde{x}) := (p|_{U_{\tilde{x}}})^{-1}(y).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass ϕ ein Homöomorphismus ist, der die kanonische Projektion $U \times F \to U$ mit $p|_{p^{-1}(U)}$ identifiziert. Da dies für jedes $x \in X$ gilt, ist p eine Überlagerung. □

III.4.3. Beispiel. Ist X ein topologischer Raum und F diskret, dann bildet die kanonische Projektion $X \times F \to X$ eine Überlagerung. Jede zu einer solchen Überlagerung isomorphe Überlagerung wird als *triviale Überlagerung* bezeichnet.

III.4.4. Beispiel. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $A \subseteq X$, dann ist auch $p : p^{-1}(A) \to A$ eine Überlagerung, sie wird mit $\tilde{X}|_A$ bezeichnet.

III.4.5. Beispiel. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \tilde{Y} \to Y$ zwei Überlagerungen, dann ist auch $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. Mittels Induktion folgt, dass endliche Produkte von Überlagerungen wieder Überlagerungen sind. Für unendlich viele Faktoren bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe etwa [**17**, Example 2.2.9].

III.4.6. Bemerkung. Die Komposition zweier Überlagerungen ist i.A. keine Überlagerung, siehe etwa [**17**, Example 2.2.8].

III.4.7. Beispiel. Ist $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$ eine Gruppe von Homöomorphismen, die auf X strikt diskontinuierlich wirkt, dann bildet die kanonische Projektion auf den Orbitraum, $p : X \to X/G$, eine Überlagerung, vgl. Lemma III.4.2. Die Blätterzahl dieser Überlagerung stimmt mit der Ordnung von G überein, denn G wirkt frei und transitiv auf jeder Faser. Offensichtlich ist jedes Element von G eine Decktransformation, $G \subseteq \operatorname{Deck}(X \to X/G)$. Für zusammenhängendes X gilt sogar $G = \operatorname{Deck}(X \to X/G)$. Dies folgt aus Lemma III.4.1, da G transitiv auf den Fasern wirkt.

III.4.8. Beispiel. Die kanonische Projektion $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(S^n \to \mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

III.4.9. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) := e^{\mathbf{i}t}$, ist eine ∞-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}$.

III.4.10. Beispiel. Die Abbildung $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := e^z$, ist eine ∞-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}$.

III.4.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p : S^1 \to S^1$, $p(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_n$.

III.4.12. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_n$.

III.4.13. Satz (Homotopieliftungseigenschaft)**.** *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Y \times I \to X$ stetig und $\tilde{h} : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p(\tilde{h}(y)) = H(y, 0)$ für alle $y \in Y$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbidlung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$, sodass $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{h}(y)$ für alle $y \in Y$.*

Beweis. Zu jedem Punkt $y \in Y$ existiert eine offene Umgebung V von y und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, sodass für jedes $i = 1, \dots, N$, das Bild $H(V \times [t_{i-1}, t_i])$ in einer offenen Teilmenge $U_i \subseteq X$ liegt, über der die Überlagerung trivial ist, $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times F_i$. Durch Verkleinern von V können wir auch erreichen, dass $\tilde{h}(V) \subseteq U_1 \times \{f_1\}$, für ein $f_1 \in F_1$. Die Abbildung $H|_{V \times [t_0, t_1]}$ lässt sich dann leicht zu einer Abbildung $\tilde{H} : V \times [t_0, t_1] \to \tilde{X}$ liften, sodass $\tilde{H}_{t_0} = \tilde{h}|_V$. Durch Verkleinern von V können wir auch $\tilde{H}_{t_1}(V) \subseteq U_2 \times \{f_2\}$ erreichen, $f_2 \in F_2$, und dann die Abbildung $H|_{V \times [t_1, t_2]}$ zu einer Abbildung $\tilde{H} : V \times [t_1, t_2] \to \tilde{X}$ liften, sodass diese mit dem schon konstruierten Teil von $\tilde{H}$ auf $V \times \{t_1\}$ übereinstimmt. Induktiv fortfahrend erhalten wir eine stetige Abbildung $\tilde{H} : V \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}|_V$.

Ist $\tilde{G} : W \times I \to \tilde{X}$ eine weitere stetige Abbildung mit $p \circ \tilde{G} = H|_{W \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_W$, dann müssen G und H auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $(V \cap W) \times I$ übereinstimmen, denn für fixes $y \in V \cap W$ ist die Menge $\{t \in I \mid \tilde{G}(y, t) = \tilde{H}(y, t)\}$ offen und abgeschlossen, siehe Lemma III.4.1, und enthält 0. Die lokal konstruierten Lifts von H fügen sich daher zu einer global definierten stetigen Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ mit den gewünschten Eigenschaften zusammen. $\square$

III.4.14. Korollar (Liften von Wegen)**.** *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\gamma : I \to X$ ein Weg und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = \gamma(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Beweis. Die folgt aus Satz III.4.13 mit $Y = \{*\}$. $\square$

Zwei Wege $\alpha, \beta : I \to X$ werden *homotop relativ Endpunkten* genannt, falls eine Homotopie $H : I \times I \to X$ existiert, sodass $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$,

$H(0,t) = \text{const} = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(1,t) = \text{const} = \alpha(1) = \beta(1)$, für alle $s, t \in I$. Jede solche Homotopie wird eine *Homotopie relativ Endpunkten von α nach β* genannt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in X, die Äquivalenzklassen werden als *Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten* bezeichnet.

III.4.15. Korollar. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege die homotop relativ Endpunkten sind, und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \to \tilde{X}$ Lifts, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, $p \circ \tilde{\beta} = \beta$, zum gleichen Anfangspunkt, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Dann sind auch $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop relativ Endpunkten und haben daher gleiche Endpunkte, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H : I \times I \to X$ mit $H(s,0) = \alpha(s)$, $H(s,1) = \beta(s)$, $H(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$, für alle $s, t \in I$. Nach Satz III.4.13 lässt sich H zu einer Homotopie $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ liften, $p \circ \tilde{H} = H$, sodass $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$. Die Wege $t \mapsto \tilde{H}(0,t)$ bzw. $t \mapsto \tilde{H}(1,t)$ sind Lifts der konstanten Wege $\alpha(0) = \beta(0)$ bzw. $\alpha(1) = \beta(1)$, und daher selbst konstant. Somit ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar III.4.14 folgt $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}(s)$, denn beide Seiten sind Lifts von β zum Anfangswert $\tilde{H}(0,1) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{\beta}$. □

Ist $x_0 \in X$ ein Basispunkt, dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten, die bei x_0 starten und enden. Solche Wege werden auch *Schleifen bei x_0* genannt. Die *Konkatenation* von Wegen definiert eine, i.A. nicht abelsche Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$. Das neutrale Element wird durch den konstanten Weg x_0 repräsentiert, das Inverse durch den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird als *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* von X beim Basispunkt x_0 bezeichent. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, und diese Zuordnung ist funktoriell, dh. $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Ist σ ein Weg in X von $\sigma(0) = x_0$ nach $\sigma(1) = x_1$, dann definiert Konjugation mit σ einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, $[\alpha] \leftrightarrow [\sigma^{-1}\alpha\sigma]$.[17] Für wegzusammenhängendes X wird die Fundamentalgruppe daher oft als $\pi_1(X)$ notiert.

III.4.16. Proposition (Einfacher Zusammenhang)**.** *Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dann sind äquivalent:*

(a) Zu $x, y \in X$ gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen von x nach y.
(b) Für alle $x_0 \in X$ gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$.
(c) Es existiert $x_0 \in X$ mit $\pi_1(X, x_0) = 0$.
(d) Jede Schleife $\gamma : S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

[17] Dieser Isomorphismus ist jedoch nicht kanonisch, er hängt i.A. von der Wahl (der Homotopieklasse) von σ ab.

(e) *Jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$ ausdehnen, $F|_{S^1} = f$.*

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum der diese äquivalenten Eigenschaften besitzt wird einfach zusammenhängend *genannt.*

Beweis. Sind $x, y, z \in X$ und ist σ ein Weg von y nach z, dann definiert die Konkatenation mit σ eine Bijektion $\mathcal{P}_{x,y}(X) \cong \mathcal{P}_{x,z}(X)$, wobei $\mathcal{P}_{x,y}(X)$ die Menge der Homotopieklassen von Wegen relativ Endpunkten von x mit y bezeichnet. Analog liefert jeder Weg von x nach y eine Bijektion $\mathcal{P}_{y,z}(X) \cong \mathcal{P}_{x,z}(X)$. Daraus erhalten wir sofort die Äquivalenzen (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$(c). Die Wahl eines Homöomorphismus $I/\{0,1\} \cong S^1$ erlaubt es stetige Abbildungen $I \to X$, die beide Randpunkte auf x_0 abbilden mit stetigen Abbildungen $S^1 \to X$ zu identifizieren, die einen Basispunkt $* \in S^1$ auf x_0 abbilden. Dies ist mit Homotopien verträglich und liefert eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X, x_0) \cong [(S^1, *), (X, x_0)] \to [S^1, X]$. Im wegzusammenhängenden Fall induziert diese Abbildung eine Bijektion zwischen den Konjugationsklassen von $\pi_1(X, x_0)$ und der Menge der (freien) Homotopieklassen $[S^1, X]$, siehe [**18**, Satz 5.1.12] oder [**14**, Section 1.1, Exercise 6]. Daraus folgt nun die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$(d), denn eine Gruppe ist genau dann trivial, wenn sie nur eine Konjugationsklasse besitzt. Die Äquivalenz (d) $\Leftrightarrow$(e) ist offensichtlich, denn jede Homotopie $H : S^1 \times I \to X$ von $H_0 = f$ nach $H_1 = \mathrm{const}$ faktorisiert zu einer stetigen Abbildung $D^2 \cong (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\}) \to X$, deren Einschränkung auf $S^1 \subseteq D^2$ mit f übereinstimmt. □

III.4.17. Korollar. *Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung,*[18] *dann ist der induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ injektiv.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar III.4.15. □

Das Bild des injektiven Homomorphismus p_* in Korollar III.4.17, dh. die Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$, wird als *charakteristische Untergruppe* der punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bezeichnet. Ein Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ liegt genau dann in der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, wenn seine Repräsentanten zu *Schleifen* bei $\tilde{x}_0$ liften.

III.4.18. Lemma. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$. Existiert ein Weg $\tilde{\sigma} : I \to \tilde{X}$ von $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{x}_0$ nach $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_1$, dann sind die entsprechenden charakteristischen Untergruppen konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$,*

$$p_*(\pi_1(X, \tilde{x}_1)) = [\sigma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[\sigma],$$

wobei $\sigma := p \circ \tilde{\sigma} : I \to X$ und $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$.

[18] Unter einer *punktierten Überlagerung* verstehen wir eine Überlagerung mit Basispunkten, $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, wobei $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Zwei punktierte Überlagerungen $p(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ werden isomorph genannt, wenn ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ existiert, $q \circ \phi = p$, $\phi(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Beweis. Dies folgt daraus, dass Konjugation mit $\tilde\sigma$ einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\cong\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)$, $[\alpha]\leftrightarrow[\tilde\sigma^{-1}\alpha\tilde\sigma]$, definiert. □

III.4.19. Korollar. *Ist $p:\tilde X\to X$ eine Überlagerung und $x_0\in X$, dann wirkt $\pi_1(X,x_0)$ in natürlicher Weise von rechts auf der Faser $F_{x_0}=p^{-1}(x_0)$. Für wegzusammenhängendes $\tilde X$ ist diese Wirkung transitiv. Die Isotropiegruppe eines Punktes $\tilde x_0\in F_{x_0}$ stimmt mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$ überein. Im zusammenhängenden Fall stimmt der Index der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$ in $\pi_1(X,x_0)$ also mit der Blätterzahl der Überlagerung überein.*

Beweis. Es sei $\tilde x\in F_{x_0}$ und $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$, wobei $\alpha:I\to X$ eine Schleife bei x_0 bezeichnet. Weiters sei $\tilde\alpha:I\to\tilde X$ der eindeutige Lift von α, $p\circ\tilde\alpha=\alpha$, mit Anfangswert $\tilde\alpha(0)=\tilde x$, siehe Korollar III.4.14. Nach Korollar III.4.15 ist der Endpunkt $\tilde\alpha(1)\in F_{x_0}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten α. Diese Konstruktion definiert daher eine Abbildung

$$F_{x_0}\times\pi_1(X,x_0)\to F_{x_0},\qquad(\tilde x,[\alpha])\mapsto\tilde\alpha(1).$$

Ohne Mühe lässt sich verifizieren, dass wir so eine Rechtswirkung von $\pi_1(X,x_0)$ auf F_{x_0} erhalten. Die verbleibenden Behauptungen sind nun offensichtlich. □

III.4.20. Korollar (Liftungskriterium)**.** *Es sei $p:(\tilde X,\tilde x_0)\to(X,x_0)$ eine punktierte Überlagerung, $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ stetig, Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.*[19] *Dann sind äquivalent:*

(a) $f_*(\pi_1(Y,y_0))\subseteq p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$.
(b) Es existiert ein (eindeutiger) stetiger Lift $\tilde f:(Y,y_0)\to(\tilde X,\tilde x_0)$, $p\circ\tilde f=f$.

Beweis. Die Implikation (b) ⇒ (a) folgt aus $f_*=(p\circ\tilde f)_*=p_*\circ\tilde f_*$. Für die umgekehrte Implikation (a) ⇒ (b) sei $y\in Y$ beliebig. Wegen das Wegzusammenhangs von Y existiert ein Weg $\alpha:I\to Y$ von $\alpha(0)=y_0$ nach $\alpha(1)=y$. Es ist dann $\beta:=f\circ\alpha:I\to X$ ein Weg in X der bei $\beta(0)=x_0$ startet. Nach Korollar III.4.14 existiert ein Lift $\tilde\beta:I\to\tilde X$, $p\circ\tilde\beta=\beta$, mit $\tilde\beta(0)=\tilde x_0$. Wir definieren $\tilde f(y):=\tilde\beta(1)$. Wegen (a) und Korollar III.4.15 ist dies wohldefiniert, dh. unabhängig von der Wahl des Weges α. Weiters gilt nach Konstruktion $p\circ\tilde f=f$. Die Stetigkeit von $\tilde f$ folgt aus dem lokalen Wegzusammenhang von Y. Nach Lemma III.4.1 ist $\tilde f$ eindeutig. □

III.4.21. Korollar. *Zwei wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende punktierte Überlagerungen eines punktierten Raums sind genau dann isomorph, wenn sie die gleichen charakteristischen Untergruppen haben.*

Beweis. Offensichtlich müssen isomorphe punktierte Überlagerungen gleiche charakteristische Untergruppen haben. Um zu sehen, dass diese Bedingung auch

[19] D.h. jeder Punkt in Y besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen. Beachte, dass Mannigfaltigkeiten stets lokal wegzusammenhängend sind.

hinreichend ist, seien $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ zwei wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende punktierte Überlagerungen mit $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Wenden wir Korollar III.4.20 auf die Abbildung $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ an, so erhalten wir eine stetige Abbildung $\psi_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ mit $p_2 \circ \psi_1 = p_1$. Analog erhalten wir eine stetige Abbildung $\psi_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ mit $p_1 \circ \psi_2 = p_2$. Die Komposition $\psi_2 \circ \psi_1 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ fixiert $\tilde{x}_1$ und erfüllt $p_1 \circ \psi_2 \circ \psi_1 = p_1$, aus Lemma III.4.1 folgt daher $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_1}$. Analog erhalten wir $\psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$. Also sind ψ_1 und ψ_2 zueinander inverse Homöomorphismen. □

III.4.22. Korollar. *Jede Überlagerung eines einfach zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raums ist trivial. Jede zusammenhängende Überlagerung eines einfach zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raums ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei also X einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Nach Korollar III.4.21 ist jede zusammenhängende Überlagerung von X zu der trivialen einblättrigen Überlagerung $\mathrm{id}_X : X \to X$ isomorph. Wenden wir dies auf die Zusammenhangskomponenten einer beliebigen Überlagerung von X an, so sehen wir, dass diese trivial sein muss. □

III.4.23. Korollar. *Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung, dann induziert p Gruppenisomorphismen $\pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X, x_0)$, für jedes $k \geq 2$.*[20]

Beweis. Es seien $\tilde{f}, \tilde{g} : (S^k, *) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ zwei stetige Abbildungen, sodass $p \circ \tilde{f} \simeq p \circ \tilde{g}$ relativ Basispunkt. Es existiert daher eine Homotopie $H : S^k \times I \to X$ von $H_0 = p \circ \tilde{f}$ nach $H_1 = p \circ \tilde{g}$ mit $H(*, t) = \mathrm{const} = x_0$. Nach Satz III.4.13 lässt sich H zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : S^k \times I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ liften. Da $t \mapsto \tilde{H}(*, t)$ Lift des konstanten Weges x_0 ist, folgt $\tilde{H}(*, t) = \mathrm{const} = \tilde{f}(*) = \tilde{x}_0$. Wir schließen $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$, denn beide Seiten sind Lifts von $p \circ \tilde{g}$, die den Basispunkt $* \in S^k$ auf $\tilde{x}_0$ abbilden, vgl. Lemma III.4.1. Somit sind auch $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop relativ Basispunkt. Dies zeigt, dass der induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_k(X, x_0)$ injektiv ist. Nach Korollar III.4.20 ist er auch surjektiv, denn S^k ist einfach zusammenhängend für jedes $k \geq 2$.[21] □

III.4.24. Korollar. *Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Überlagerung, dann sind äquivalent.*

[20] Dabei bezeichnet $\pi_k(X, x_0) := [(S^k, *), (X, x_0)]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $(S^k, *) \to (X, x_0)$ relativ Basispunkt, $* \in S^k$. Für $k \geq 2$ lässt sich $\pi_k(X, x_0)$ in natürlicher Weise zu einer abelschen Gruppe machen, die als k-te Homotopiegruppe von X beim Basispunkt x_0 bezeichnet wird. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert Gruppenhomomorphismen $f_* : \pi_k(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$, und diese Zuordnung ist funktoriell, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_k(X, x_0)}$. Mehr dazu findet sich etwa in [**14**, Section 4.1] oder [**17**].

[21] Dies folgt aus dem Satz von Seifert van Kampen, siehe etwa [**14**, Section 1.2]. Für $k \geq 2$ ist jede Schleife in S^k ist homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in $S^k \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^k$. Mit $\mathbb{R}^k$ ist daher auch S^k einfach zusammenhängend.

(a) Für ein (jedes) $x_0 \in X$ wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde{X})$ *transitiv auf der Faser F_{x_0}.*
(b) Für ein (jedes) $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ist $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$.

In diesem Fall wird die Überlagerung normal *genannt, p induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X}/\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong X$ und wir erhalten einen Gruppenisomorphismus*

$$\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong \frac{\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))}{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))},$$

für jedes $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Dabei entspricht einer Klasse $[\alpha]$, die von einer Schleife α bei $p(\tilde{x}_0)$ repräsentiert wird die eindeutige Decktransformation, die $\tilde{x}_0$ auf $\tilde{\alpha}(1)$ abbildet, wobei $\tilde{\alpha}$ den Lift von α zum Anfangswert $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ bezeichnet.

Beweis. Wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde{X})$ transitiv auf der Faser F_{x_0}, dann wirkt sie auch transitiv auf jeder anderen Faser F_{y_0}. Seien dazu $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in F_{y_0}$ und $\sigma : I :\to X$ ein Weg von $\sigma(0) = y_0$ nach $\sigma(1) = x_0$. Bezeichnen $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : I \to \tilde{X}$ die Lifts von σ zu den Anfangswerten $\tilde{\sigma}_1(0) = \tilde{y}_1$ und $\tilde{\sigma}_2(0) = \tilde{y}_2$, so erhalten wir zwei Punkte $\tilde{x}_1 := \tilde{\sigma}_1(1) \in F_{x_0}$ und $\tilde{x}_2 := \tilde{\sigma}_2(1) \in F_{x_0}$ in der Faser über x_0. Nach Voraussetzung existiert eine Decktransformation ϕ mit $\phi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Es folgt $\phi \circ \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$, denn beide Seiten sind Lifts des Weges σ zum selben Endpunkt. Insbesondere erhalten wir $\phi(\tilde{y}_1) = \phi(\tilde{\sigma}_1(0)) = (\phi \circ \tilde{\sigma}_1)(0) = \tilde{\sigma}_2(0) = \tilde{y}_2$, also wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde{X})$ auch auf F_{y_0} transitiv.

Für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) sei $a = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ ein Element, das von der Schleife $\alpha : I \to X$ bei x_0 repräsentiert wird. Weiters bezeichne $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ einen beliebigen Lift von α, dh. $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, und $\tilde{x}_0 := \alpha(0)$ sowie $\tilde{x}_1 := \tilde{\alpha}(1)$ dessen Werte bei den Randpunkten. Aus Lemma III.4.18 erhalten wir $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = a^{-1} p_*(\tilde{X}, \tilde{x}_0) a$. Nach Voraussetzung existiert eine Decktransformation ϕ mit $\phi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, und dies impliziert $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (p \circ \phi)_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\big(\phi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$. Zusammen erhalten wir $a^{-1} p_*(\tilde{X}, \tilde{x}_0) a = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, also bildet $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ einen Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$.

Für die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) seien nun $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_x$. Nach Lemma III.4.18 existiert $a \in \pi_1(X, x)$ mit $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = a^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) a$. Nach Voraussetzung ist $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ Normalteiler in $\pi_1(X, x)$, also $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Nach Korollar III.4.21 existiert daher eine Decktransformation, die $\tilde{x}_0$ auf $\tilde{x}_1$ abbildet. $\square$

III.4.25. Beispiel. Es sei $G \subseteq \operatorname{Homeo}(X)$ eine Gruppe von Homöomorphismen die auf einem einfach zusammenhängenden lokal wegzusammenhängenden Raum X strikt diskontinuierlich wirkt. Dann ist die kanonische Projektion auf den Orbitraum $p : X \to X/G$ eine Überlagerung mit $G = \operatorname{Deck}(X \to X/G) \cong \pi_1(X/G)$, siehe Beispiel III.4.7 und Korollar III.4.24. Damit erhalten wir $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, siehe Beispiel III.4.9, und $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$, siehe Beispiel III.4.8.

III.4.26. Satz. *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semi lokal einfach zusammenhängender*[22] *punktierter Raum. Dann existiert zu jeder Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe G.*

Beweis. Als die der Überlagerung zugrundeliegende Menge $\tilde{X}$ betrachten wir die Menge der Wege $\sigma : I \to X$ die bei $\sigma(0) = x_0$ starten, modulo der Äquivalenzrelation die zwei solche Wege $\sigma_1, \sigma_2 : I \to X$ identifiziert wenn sie gleiche Endpunkte besitzen und die Schleife $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ ein Element in der Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert. Die Evaluation beim Endpunkt liefert eine surjektive Abbildung $p : \tilde{X} \to X$, $[\sigma] \mapsto \sigma(1)$, denn nach Voraussetzung ist X wegzusammenhängend. Der konstante Weg x_0 repräsentiert ein Element $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, das durch p auf x_0 abgebildet wird.

Wir definieren nun eine Topologie auf $\tilde{X}$ indem wir Umgebungsbasen der Punkte angeben. Ist $[\sigma] \in \tilde{X}$, $\sigma : I \to X$, und $U \subseteq X$ offen mit $\sigma(1) \in U$, dann bezeichne $\mathcal{N}(U, [\sigma]) \subseteq \tilde{X}$ die Teilmenge, deren Elemente durch Wege der Form $\sigma\tau$ repräsentierbar sind, wobei τ ein Weg in U ist, der bei $\sigma(1)$ startet. Beachte $\mathcal{N}(U \cap V, [\sigma]) \subseteq \mathcal{N}(U, [\sigma]) \cap \mathcal{N}(V, [\sigma])$. Erklären wir diese Teilmengen $\mathcal{N}(U, \sigma)$ zu einer Umgebungsbasis von $[\sigma] \in \tilde{X}$, so erhalten wir eine Topologie auf $\tilde{X}$ bezüglich der p offensichtlich stetig ist. Mit dieser Topologie wird p tatsächlich zu einer Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe G, weitere Details dazu finden sich etwa in [**5**, Kapitel IX.6] oder [**14**, Chapter 1.3]. □

III.4.27. Korollar (Klassifikation punktierter Überlagerungen)**.** *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Dann kann die Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen von (X, x_0) in natürlicher Weise mit der Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ identifiziert werden. Dabei wird einer punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ ihre charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ zugeordnet.*

Beweis. Dies folgt aus Satz III.4.26 und Korollar III.4.21. □

Für unpunktierte, nicht notwendigerweise zusammenhängende Überlagerungen haben wir folgende Klassifikation, siehe [**14**, Chapter 1.3].

III.4.28. Korollar. *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Ordnen wir einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser F_{x_0} zu, so erhalten wir eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X und der Menge der Äquivalenzklassen von Rechtswirkungen der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

[22] dh. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass der von der Inklusion $\iota : U \to X$ induzierte Homomorphismus $\iota_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist. Beachte, dass Mannigfaltigkeite stets semi lokal einfach zusammenhängend sind.

III.4.29. Korollar (Universelle Überlagerung). *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit einfach zusammenhängenden $\tilde{X}$. Diese wird als* universelle Überlagerung von (X, x_0) *bezeichnet. Die Gruppe der Decktransformationen wirkt transitiv auf den Fasern, die Projektion induziert einen Homöomorphismus $\tilde{X} / \operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong X$ und wir haben einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar III.4.27, die universelle Überlagerung entspricht der trivialen Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$. Aus Korollar III.4.17 folgt, dass diese Überlagerung einfach zusammenhängend ist. Die verbleibenden Behauptungen folgen aus Korollar III.4.24. $\square$

III.4.30. Korollar. *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Weiters seien $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ zwei zusammenhängende Überlagerungen mit $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung punktierter Räume $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \pi = p$, und diese ist eine Überlagerungsabbildung.*

Beweis. Beachte zunächst, dass mit X auch $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi lokal einfach zusammenhängend sind. Die Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Abbildung $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \pi = p$ folgt daher aus Korollar III.4.20. Um zu zeigen, dass π eine Überlagerung bildet, betrachten wir die Untergruppe $G := q_*^{-1}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$ von $\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$. Nach Satz III.4.26 existiert eine zusammenhängende Überlagerung $r : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $r_*(\pi_1(\tilde{Z}, \tilde{z}_0)) = G$. Nach Korollar III.4.20 lässt sich π zu einer stetigen Abbildung $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ liften, $r \circ \phi = \pi$. Ebenso lässt sich $q \circ r$ zu einer stetigen Abbildung $\psi : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, $p \circ \psi = q \circ r$. Nach Konstruktion gilt $p \circ \psi \circ \phi = p$ und $\psi(\phi(\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_0$, woraus wir $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ schließen, siehe Lemma III.4.1. Analog erhalten wir aus $q \circ r \circ \phi \circ \psi = q \circ r$ zunächst $r \circ \phi \circ \psi = r$ und dann $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{Z}}$. Somit sind ϕ und ψ zueinander inverse Homöomorphismen. Da $r : \tilde{Z} \to \tilde{Y}$ Überlagerung ist, muss also auch $\pi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ eine Überlagerungsabbildung sein. $\square$

III.4.31. Korollar. *Ist X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender Raum, dann wird jede zusammenhängende Überlagerung $q : \tilde{Y} \to X$ von der universellen Überlagerung $\tilde{X} \to X$ überlagert, und ist daher von der Form $\tilde{Y} \cong \tilde{X}/\Gamma$, für eine Untergruppe $\pi_1(\tilde{Y}) \cong \Gamma \subseteq \operatorname{Deck}(\tilde{X})$.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar III.4.30 und Korollar III.4.29. $\square$

Unter einer *glatten Überlagerung* verstehen wir eine Überlagerungsabbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten $p : \tilde{M} \to M$, sodass p ein lokaler Diffeomorphismus ist. In diesem Fall existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U, ein diskreter Raum F (0-dimensionale Mannigfaltigkeit) und ein Diffeomorphismus $p^{-1}(U) \cong U \times F$, der p mit der kanonischen Projektion $U \times F \to U$ identifiziert.[23] Eine Abbildung $\tilde{f} : N \to \tilde{M}$ ist genau dann glatt, wenn $p \circ \tilde{f} : N \to M$ glatt ist. Insbesondere ist jede Decktransformation einer glatten Überlagerung ein Diffeomorphismus, dh. $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \mathrm{Diff}(\tilde{M})$.

III.4.32. Beispiel. Ist $\tilde{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $G \subseteq \mathrm{Diff}(\tilde{M})$ eine Gruppe von Diffeomorphismen, die auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkt, dann existiert auf dem Orbitraum $M := \tilde{M}/G$ genau eine glatte Struktur, die die kanonische Projektion $p : \tilde{M} \to M$ zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Dadurch wird p zu einer glatten Überlagerung, vgl. Beispiel III.4.7. Ist $\tilde{M}$ zusammenhängend, dann gilt $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) = G$. Ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend, dann auch $\pi_1(M) \cong G$, vgl. Beispiel III.4.25.

Da Mannigfaltigkeiten lokal kontrahierbar sind, sind sie auch lokal wegzusammenhängend und (semi) lokal einfach zusammenhängend. Die oben entwickelte Überlagerungstheorie lässt sich daher ohne Einschränkungen auf glatte Überlagerungen anwenden. Insbesondere besitzt jede zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit eine bis auf Isomorphie eindeutige universelle Überlagerung.

III.4.33. Proposition. *Ist $p : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung einer glatten Mannigfaltigkeit M, dann besitzt $\tilde{M}$ genau eine glatte Struktur, die p zu einer glatten Überlagerung macht.*

Beweis. Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ offen, sodass $p : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist, dann bildet $\tilde{\varphi} := \varphi \circ p : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von $\tilde{M}$. Ist $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Karte von M, $\tilde{V} \subseteq \tilde{M}$ offen, sodass $p : \tilde{V} \to V$ ein Homöomorphismus ist, und $\tilde{\psi} := \psi \circ p : \tilde{V} \to \mathbb{R}^n$ die entsprechende Karte für $\tilde{M}$, dann gilt für die Kartenwechselabbildung offensichtlich $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$. Die oben konstruierten Karten bilden daher einen glatten Atlas für $\tilde{M}$. Dadurch wird $\tilde{M}$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit und p zu einer glatten Überlagerung. $\square$

Das folgende Resultat zeigt, dass auch die Überlagerungstheorie glatter Mannigfaltigkeiten sehr reichhaltig ist.

III.4.34. Satz. *Ist Γ eine endlich präsentierbare Gruppe[24] und $n \geq 4$, dann existiert eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte (Riemannsche) n-Mannigfaltigkeit M mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \Gamma$.*[25]

[23] Glatte Überlagerungen sind daher glatte Faserbündel mit diskreten Fasern.

[24] dh. durch endlich viele Erzeuger und endlich viele Relationen beschreibbar

[25] Für $n \leq 3$ bleibt dies nicht richtig, in diesen Dimensionen gibt es starke Einschränkungen an die Gruppen die als Fundamentalgruppen auftreten können.

Beweis. Es sei M eine n-Mannigfaltigkeit, $0 \leq k < n$ und $S \subseteq M$ eine zu S^k diffeomorphe Teilmannigfaltigkeit mit trivialem Normalenbündel $T^\perp S \cong S \times \mathbb{R}^{n-k}$. Nach Satz III.3.40 existiert daher eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \cong S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, der S mit $S^k \times \{0\}$ identifiziert. Betrachten wir die offene Teilmenge $V := M \setminus S$ von M, dann gilt

$$M = V \cup U,$$

und mittels Polarkoordinaten erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} V \cap U = U \setminus S &\cong S^k \times \big(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}\big) \\ &\cong S^k \times (0, \infty) \times S^{n-k-1} \cong \big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1} \end{aligned} \tag{III.68}$$

Wir versehen

$$M_S := \Big(V \sqcup \big(\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)\Big)\Big/\!\sim$$

mit der Quotiententopology, wobei Punkte in $V \cap U$ via (III.68) mit den entsprechenden Punkten in $\big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1}$ identifiziert werden. Es lässt sich leicht verifizieren, dass der Qutient M_S Hausdorffsch ist.[26] Beachte, dass wir kanonische stetige Abbildungen

$$V \to M_S \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1} \to M_S \tag{III.70}$$

haben, die beide Homöomorphismen auf ihr offenes Bild sind. Da (III.68) ein Diffeomorphismus ist, gibt es auf M_S genau eine glatte Struktur, die die beiden Abbildungen (III.70) zu offenen Einbettungen macht. Dies erlaubt die Mannigfaltigkeit V als offene Teilmenge in M_S aufzufassen. Bezeichnen wir das (offene) Bild der zweiten Abbildung in (III.70) mit $W \subseteq M_S$, dann gilt

$$M_S = V \cup W, \qquad W \cong \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}, \tag{III.71}$$

sowie

$$V \cap W = V \cap U \cong S^k \times (0, \infty) \times S^{n-k-1}. \tag{III.72}$$

Wir sagen die glatte n-Mannigfaltigkeit M_S entsteht aus M durch *Chirurgie längs* S.[27] Durch geschickte Wahl von S werden wir nun Mannigfaltigkeiten mit immer komplizierteren Fundamentalgruppen konstruieren.

---

[26] Um eine andere hilfreiche Darstellung von M_S zu beschreiben betrachten wir die Mannigfaltigkeit mit Rand $M_\partial := M \setminus \varphi^{-1}(S^k \times B^{n-k})$. Die Trivialisierung φ induziert einen Diffeomorphismus der Ränder,

$$\partial M_\partial \cong S^k \times S^{n-k-1} = \partial\big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big). \tag{III.69}$$

Die Inklusion $M_\partial \sqcup \big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big) \to V \sqcup \big(\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)$ induziert einen kanonischen Homöomorphismus

$$M_S = \Big(M_\partial \sqcup \big(D^{k+1} \times S^{n-k-1}\big)\Big)\Big/\!\sim,$$

wobei Randpunkte von M_∂ via (III.69) mit den entsprechenden Randpunkten in $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ identifiziert werden.

[27] Obwohl sich dies nicht in unserer Notation M_S widerspiegelt, hängt der Homöomorphietyp von M_S auch von der Wahl der Trivialisierung des Normalenbündels von S ab.

Wir beginnen damit folgende Behauptungen zu verfizieren:

(a) Ist M geschlossen, dann ist auch M_S geschlossen.
(b) Ist M orientierbar, dann ist auch M_S orientierbar, wobei im Fall $k = 0$ möglicherweise die Trivialisierung des Normalenbündels $T^\perp S \cong S \times \mathbb{R}^{n-k}$ geändert werden muss.
(c) Ist $0 \leq k \leq n-2$ und trifft S jede Zusammenhangskomponente[28] von M, dann ist auch M_S zusammenhängend.
(d) Ist $0 = k \leq n-3$ und hat $M = M_1 \sqcup M_2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, die beide von $S^0 \cong S \subseteq M$ getroffen werden, dann ist M_S zusammenhängend und $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$.[29]
(e) Ist M zusammenhängend und $0 = k \leq n-3$, dann gilt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M) * \mathbb{Z}$.

Behauptung (a) folgt leicht aus der alternativen Beschreibung von M_S in einer Fußnote oben, denn als Quotient eines kompakten Raums ist M_S selbst wieder kompakt. Mit Hilfe der offenen Einbettungen (III.70) sehen wir, dass M_S randlos ist, denn $M_S = V \cup W$.

Um (b) einzusehen sei nun M orientiert. Für $k \geq 1$ lässt sich die induzierte Orientierung von $V \cap W$ zu einer Orientierung von W fortsetzen, denn $V \cap W$ sitzt in W wie $\big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1}$ in $\mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ und $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ ist in diesem Fall zusammenhängend. Ist $k = 0$, dann können wir durch Modifikation der Trivialisierung des Normalenbündels über einem der beiden Punkte von $S \cong S^0$ erreichen, dass sich die induzierte Orientierung von $V \cap W$ über W fortsetzen lässt.

Um (c) zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass aufgrund der Voraussetzung $k \leq n-2$ die Mannigfaltigkeit $W \cong \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ zusammenhängend ist. Es genügt daher zu zeigen, dass jeder Punkt in $V \subseteq M_S$ mit einem Punkt in $V \cap W$ verbunden werden kann. Dafür wiederum genügt es zu zeigen, dass jeder Punkt in $V = M \setminus S$ durch einen Weg in V mit einem Punkt in $V \cap U = U \setminus S$ verbunden werden kann. Nach Voraussetzung lässt sich jeder Punkt in $x \in M \setminus S$ durch einen Weg $\sigma : I \to M$ mit einem Punkt in S verbinden, dh. $\sigma(0) = x$ und $\sigma(1) \in S$. Setzen wir $t_0 := \min\{t \in I : \sigma(t) \in S\} > 0$, dann bildet die Einschräkung $\sigma|_{[0,t_0]}$ einen Weg in M, sodass $\sigma(t_0) \in S$ und $\sigma(t) \in M \setminus S$ für alle $0 \leq t < t_0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist daher $\sigma|_{[0,t_0-\varepsilon]}$ ein Weg in $M \setminus S$, der $x = \sigma(0)$ mit einem Punkt $\sigma(t_0 - \varepsilon) \in U \setminus S$ verbindet. Damit ist (c) gezeigt.

In der Situation von (d) besteht V aus zwei Zusammenhangskomponenten $V = V_1 \sqcup V_2$, wobei $V_i = V \cap M_i$. Beachte auch $U = U_1 \sqcup U_2$ mit $U_i := U \cap M_i \cong \mathbb{R}^n$. Aus dem Seifert van Kampen Satz folgt, dass die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(V_i) \cong \pi_1(V_i \cup W)$ induziert, denn $W \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ und $V_i \cap W = V_i \cap U \cong$

[28] Für zusammenhängendes M ist diese Bedingung immer erfüllt. Hat M zwei Zusammenhangskomponenten und ist $k = 0$, dann wird diese Bedingung aber auch erfüllt sein, wenn die beiden Punkte von $S \cong S^0$ in unterschiedliche Komponenten abgebildet werden.

[29] In diesem Fall wird M_S die zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 genannt und mit $M_1 \sharp M_2 := M_S$ bezeichnet.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind beide einfach zusammenhängend.[30] Wenden wir den Seifert van Kampen Satz[31] auf die Zerlegung $M_S = (V_1 \cup W) \cup (V_2 \cup W)$ so erhalten wir $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(V_1 \cup W) * \pi_1(V_2 \cup W)$, denn $(V_1 \cup W) \cap (V_2 \cup W) = W \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ ist einfach zusammenhängend. Wenden wir den Seifert van Kampen Satz auf $M_i = V_i \cup U_i$ an, so sehen wir, dass auch die Inklusion $V_i \subseteq M_i$ einen Isomorphismus $\pi_1(V_i) \cong \pi_1(M_i)$ induziert, denn $U_i \cong \mathbb{R}^n$ und $V_i \cap U_i \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind beide einfach zusammehängend. Insgesamt folgt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$, also (d). Wir werden (e) nicht benötigen und überlassen den Beweis dem Leser.

Betrachte nun die geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit $M = S^1 \times S^{n-1}$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, $n \geq 3$. Aus (a) – (d) folgt, dass $M \sharp \cdots \sharp M$ eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M \sharp \cdots \sharp M) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ ist. Wir erhalten somit:

(f) Ist $n \geq 3$, dann lässt sich jede freie Gruppe endlichen Rangs als Fundamentalgruppe einer geschlossenen zusammenhängenden orientierbaren glatten n-Mannigfaltigkeit realisieren.

Um nun auch Relationen in der Fundamentalgruppe zu erzwingen, müssen wir uns mit dem Fall $k = 1$ beschäftigen. Wir zeigen zunächst:

(g) Ist M zusammenhängend und $0 \leq k \leq n-3$, dann induziert die kanonische Inklusion $V \subseteq M$ einen Isomorphismus $\pi_1(V) \cong \pi_1(M)$.
(h) Ist M zusammenhängend und $1 \leq k \leq n-3$, dann induziert die kanonische Inklusion $V \subseteq M_S$ einen surjektiven Homomorphismus $\pi_1(V) \to \pi_1(M_S)$, dessen Kern mit dem Normalteiler übereinstimmt, der vom Bild des von der Inklusion $V \cap W \to V$ induzierten Homomorphismus $\pi_1(V \cap W) \to \pi_1(V)$ erzeugt wird. Ist $2 \leq k \leq n-3$, dann induziert die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(V) \cong \pi_1(M_S)$ und zusammen mit (g) folgt $\pi_1(M_S) \cong \pi_1(M)$.

Um (g) zu zeigen sei zunächst $k \geq 1$. Bezüglich jedes Basispunkts in $V \cap U$ haben wir folgendes kommutatives Diagramm, in dem alle unbeschrifteten Pfeile

[30] Die Inklusion $V_i \subseteq V_i \cup W$ ist sogar eine Homotopieäquivalenz.

[31] Der Seifert van Kampen Satz, siehe etwa [**14**, Section 1.2], besagt folgendes: Ist $X = O_1 \cup O_2$ ein topologischer Raum, $O_1, O_2 \subseteq X$ offen, sodass O_1, O_2 und $O_1 \cap O_2$ alle wegzusammenhängend sind, dann bilden die von den kanonischen Inklusionen induzierten Homomorphismen ein pushout Diagramm,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(O_1 \cap O_2) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"] & \pi_1(O_1) \arrow[d, "j_1"] \\ \pi_1(O_2) \arrow[r, "j_2"] & \pi_1(X), \end{tikzcd}$$

dh. ist G eine beliebige Gruppe und sind $\varphi_1 : \pi_1(O_1) \to G$ und $\varphi_2 : \pi_1(O_2) \to G$ zwei Homomorphismen mit $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$, dann existiert genau ein Homomorphismus $\psi : \pi_1(X) \to G$ mit $\psi \circ j_1 = \varphi_1$ und $\psi \circ j_2 = \varphi_2$. Es gilt daher $\pi_1(X) \cong \big(\pi_1(O_1) * \pi_1(O_2)\big)/N$, wobei N den von Elementen der Form $\iota_1(a)\iota_2(a)^{-1}$, $a \in \pi_1(O_1 \cap O_2)$, erzeugten Normalteiler in $\pi_1(O_1) * \pi_1(O_2)$ bezeichnet.

von Inklusionen induziert werden:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\big(S^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0)\big) \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(V \cap U) \arrow[l, "\varphi_*"', "\cong"] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(V) \arrow[d] & \\
\pi_1\big(S^k \times \mathbb{R}^{n-k}\big) & \pi_1(U) \arrow[l, "\varphi_*"', "\cong"] \arrow[r] & \pi_1(M) \arrow[r, equal] & \pi_1(V) \underset{\pi_1(V\cap U)}{*} \pi_1(U)
\end{tikzcd}$$

Beachte, dass U, V und $V \cap U$ alle zusammenhängend sind, denn $k \geq 1$. Aus dem Seifert van Kampen Satz folgt daher, dass auch der rechte vertikale Pfeil ein Isomorphismus ist.[32] Im Fall $k = 0$ genügt es zu beobachten, dass für jede zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M, $n \geq 3$, die Inklusion $M \setminus \{x\} \subseteq M$ einen Isomorphismus induziert. Wieder folgt dies aus dem Seifert van Kampen Satz, indem wir eine offene Umgebung $U \cong \mathbb{R}^n$ von x wählen, $M = (M \setminus \{x\}) \cup U$, denn $U \cap (M \setminus \{x\}) = U \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.

Behauptung (h) folgt sofort aus dem Seifert van Kampen Satz, denn $W \cong \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ ist einfach zusammenhängend und $V \cap W \cong \big(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}\big) \times S^{n-k-1}$ zusammenhängend bzw. einfach zusammenhägend wenn $k \geq 2$.

Sei nun M eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit und $a \in \pi_1(M, x_0)$. Ist $n \geq 3$, dann existiert eine Einbettung $S^1 \cong S \subseteq M$, sodass der induzierte Homomorphismus $\pi_1(S, *) \to \pi_1(M, x_0)$ einen Erzeuger von $\pi_1(S, *) \cong \pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ auf a abbildet.[33] Da M und S beide orientierbar sind, ist auch das Normalenbündel $T^\perp S \cong TM|_S/TS$ orientierbar, vgl. Aufgabe 36. Somit ist das Normalenbündel von S trivialisierbar, denn jedes orientierbare Vektorbündel über S^1 ist trivialisierbar, vgl. Aufgabe 60. Wir können daher obige Konstruktion mit $k = 1$ anwenden und erhalten eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit M_S, siehe (a), (b) und (c). Beachte, dass die Inklusion $S \subseteq U \cong S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ homotop zu einer Abbildung $\iota : S \to V \cap U \cong S^1 \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ ist und diese einen Isomorphismus $\pi_1(S, *) \cong \pi_1(V \cap U, x_1)$ induziert, $x_1 := \iota(*) \in V \cap U$. Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S, *) \arrow[r, "\iota_*", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1(V \cap U, x_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_1(V \cap W, x_1) \arrow[d] \\
\pi_1(M, x_0) \arrow[r, "\cong"] & \pi_1(M, x_1) & \pi_1(V, x_1) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

wobei der linke untere horizontale Pfeil durch Konjugation mit jenem Weg gegeben ist, den wir aus der Homotopie zwischen der kanonischen Inklusion $S \to M$

[32] Dies lässt sich auch mit einem Transversalitätsargument anschaulich erklären.

[33] Jedes stetige $\alpha : (S^1, *) \to (M, x_0)$ kann in endlich viele Abschnitte zerlegt werden, die jeweils Bild in einer zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorphen offenen Teilmenge von M haben. Damit lässt sich nun leicht eine zu α homotope glatte Abbildung $(S^1, *) \to (M, x_0)$ konstruieren. Da $n \geq 3$ kann diese auch injektiv und immersiv gewählt werden. Nach Satz I.7.8 ist dies die gesuchte Einbettung.

und $\iota : S \to V \cap U \subseteq M$ durch Auswerten bei $*$ erhalten. Aus (g) und (h) erhalten wir somit:

(i) Ist M eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit, $n \geq 4$, und $a \in \pi_1(M)$, dann existiert eine geschlossene zusammenhängende orientierbare glatte n-Mannigfaltigkeit M' mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M') \cong \pi_1(M)/N$, wobei N den von a in $\pi_1(M)$ erzeugten Normalteiler bezeichnet.

Der Satz folgt nun sofort aus (f) und (i). □

III.4.35. Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung von Satz III.4.34, kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten haben stets endlich präsentierbare Fundamentalgruppen.

Unter einer *Riemannschen Überlagerung* verstehen wir eine glatte Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, sodass $p^*g = \tilde{g}$, wobei g und $\tilde{g}$ die Riemannmetriken auf M und $\tilde{M}$ bezeichnen. In diesem Fall ist jede Decktransformation eine Isometrie, dh. $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$.

III.4.36. Beispiel. Ist $\tilde{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$ eine Gruppe von Isometrien, die auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkt, dann existiert auf dem Orbitraum $M := \tilde{M}/\Gamma$ genau eine Riemannsche Metrik, die die kanonische Projektion $p : \tilde{M} \to M$ zu einer Riemannschen Überlagerung macht. Ist $\tilde{M}$ zusammenhängend, dann gilt $\mathrm{Deck}(\tilde{M}) = \Gamma$. Ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend, dann auch $\pi_1(M) \cong \Gamma$, siehe Beispiel III.4.32.

III.4.37. Beispiel. Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, dann existiert auf $\tilde{M}$ genau eine glatte Struktur, die p zu einer glatten Überlagerung macht, siehe Proposition III.4.33. Versehen wir $\tilde{M}$ mit der Riemannmetrik $\tilde{g} := p^*g$, so wird p zu einer Riemannschen Überlagerung. Insbesondere kann die universelle Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ in eindeutiger Weise zu einer Riemannschen Überlagerung gemacht werden. Somit sehen wir, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit von der Form $M \cong \tilde{M}/\Gamma$ ist, wobei $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend ist und $\pi_1(M) \cong \Gamma \subseteq \mathrm{Isom}(\tilde{M})$ eine auf $\tilde{M}$ strikt diskontinuierlich wirkende Untergruppe bezeichnet, vgl. und Beispiel III.4.36.

III.4.38. Proposition. *Es sei $p : \tilde{M} \to M$ eine Riemansche Überlagerung. Dann ist M vollständig, genau dann wenn $\tilde{M}$ vollständig ist.*

Beweis. Eine Kurve γ in $\tilde{M}$ ist genau dann Geodäte, wenn die Kurve $p \circ \gamma$ Geodäte in M ist, denn Geodäte zu sein ist eine lokale Eigenschaft. Die Proposition folgt daher aus Korollar III.4.14 und Satz III.3.27. □

III.4.39. Proposition. *Jede lokale Riemannsche Isometrie*[34] *zwischen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist eine Riemannsche Überlagerung.*

[34]Eine glatte Abbildung $f : (M, g) \to (N, h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird lokale Riemannsche Isometrie genannt, falls $T_x f$ eine (invertierbare) lineare Isometrie ist,

Beweis. Nach dem inversen Funktionensatz ist p ein lokaler Diffeomorphismus. Da Geodäte zu sein eine lokale Eigenschaft ist, erhalten wir für je zwei Punkte $\tilde{x} \in \tilde{M}$ und $x \in M$ mit $p(\tilde{x}) = x$, ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} T_{\tilde{x}}\tilde{M} \arrow[r, "\exp_{\tilde{x}}"] \arrow[d, "T_{\tilde{x}}p"', "\cong"] & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ T_xM \arrow[r, "\exp_x"] & M \end{tikzcd}$$

Nach Satz III.3.27 ist der untere horizontale Pfeil surjektiv, also muss auch p surjektiv sein. Beachte, dass die Exponentialabbildungen wegen der Vollständigkeitsvoraussetzung global definiert sind.

Wir fixieren nun $x \in M$ und wählen $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_x : B_\varepsilon(0) \xrightarrow{\cong} U \subseteq M$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, siehe Korollar III.3.16(d). Für $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ setzen wir $U_{\tilde{x}} := \exp_{\tilde{x}}(B_\varepsilon(0))$. Aus der Kommutativität des Diagramms, und weil p ein lokaler Diffeomorphismus ist, schließen wir, dass $U_{\tilde{x}}$ offen in $\tilde{M}$ ist und $p : U_{\tilde{x}} \to U$ ein Diffeomorphismus sein muss.

Wir wollen nun verifizieren, dass die Umgebungen $U_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, paarweise disjunkt sind. Seien dazu $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ mit $U_{\tilde{x}_1} \cap U_{\tilde{x}_2} \neq \emptyset$. Es existieren daher $\tilde{\xi}_i \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_{\tilde{x}_i}\tilde{M}$, $i = 1, 2$, mit $\exp_{\tilde{x}_1}(\tilde{\xi}_1) = \exp_{\tilde{x}_2}(\tilde{\xi}_2)$. Aus der Kommutativität des Diagramms oben, und weil $\exp_x : B_\varepsilon(0) \to U$ injektiv ist, folgt $T_{\tilde{x}_1}p \cdot \tilde{\xi}_1 = T_{\tilde{x}_2}p \cdot \tilde{\xi}_2$, und somit $p\big(\exp_{\tilde{x}_1}(t\tilde{\xi}_1)\big) = p\big(\exp_{\tilde{x}_2}(t\tilde{\xi}_2)\big)$, für alle $t \in [0, 1]$. Da p lokaler Diffeomorphismus ist folgt, dass die Menge $\{t \in [0, 1] : \exp_{\tilde{x}_1}(t\tilde{\xi}_1) = \exp_{\tilde{x}_2}(t\tilde{\xi}_2)\}$ offen und abgeschlossen in $[0, 1]$ ist. Da sie 1 enthält, muss sie also auch 0 enthalten, dh. $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. Dies zeigt, dass die Mengen $U_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, paarweise disjunkt sind.

Schließlich zeigen wir noch $p^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$. Die Inklusion $\supseteq$ ist trivial, für die umgekehrte Inklusion sei nun $\tilde{y} \in p^{-1}(U)$. Es existiert daher $\xi \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_xM$ mit $\exp_x(\xi) = p(\tilde{y})$. Es bezeichne $\tilde{c}$ die Geodäte in $\tilde{M}$ mit $\tilde{c}(1) = \tilde{y}$ und $T_{\tilde{y}}p \cdot \tilde{c}'(1) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=1} \exp_x(t\xi)$. Beachte, dass $\tilde{c}$ aufgrund der Vollständigkeit von $\tilde{M}$ für alle Zeiten definiert ist. Weiters gilt $(p \circ \tilde{c})(t) = \exp_x(t\xi)$ für alle t, denn beide Seiten Stellen Geodäten in M dar und haben bei $t = 1$ gleiche Werte und Ableitungen. Wir schließen daraus $\tilde{x} := \tilde{c}(0) \in p^{-1}(x)$, und $\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{x}}(t\tilde{\xi})$ für alle t, wobei $\tilde{\xi} := \tilde{c}'(0) = (T_{\tilde{x}}p)^{-1}\xi \in B_\varepsilon(0) \subseteq T_{\tilde{x}}\tilde{M}$. Wir erhalten $\tilde{y} = \tilde{c}(1) \in U_{\tilde{x}}$. Damit sind alle Voraussetzungen in Lemma III.4.2 erfüllt und p daher eine Überlagerung. □

III.4.40. Korollar. *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit und $x \in M$ so, dass das Differential der Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ bei jedem Punkt $\xi \in T_xM$ invertierbar ist. Dann ist $\exp_x : T_xM \to M$ eine*

für jedes $x \in M$. Nach dem inversen Funktionensatz ist jedes solche f ein lokaler Diffeomorphismus, und es gilt $f^*h = g$.

(die universelle) Überlagerungsabbildung. Insbesondere ist die universelle Überlagerung von M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, es existiert genau eine Geodäte in jeder Homotopieklasse von Wegen relativ Endpukten und $\pi_k(M) = 0$, für alle $k \geq 2$. Ist darüber hinaus M einfach zusammenhängend, dann ist die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus, $M \cong \mathbb{R}^n$ und je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch genau eine Geodäte verbinden.

Beweis. Es bezeichne g die Riemannmetrik auf M. Nach Voraussetzung ist dann $\bar{g} := \exp_x^* g$ eine Riemannmetrik auf T_xM und $\exp_x : (T_xM, \bar{g}) \to (M, g)$ eine lokale Riemannsche Isometrie. Nach Satz III.3.27 ist T_xM mit dieser Riemannschen Metrik vollständig, denn die Geodäten durch $0 \in T_xM$ sind affin parametrisierte Geraden und daher für alle Zeiten definiert. Nach Proposition III.4.39 ist $\exp_x : T_xM \to M$ daher eine Überlagerung. Da jeder Punkt in T_xM durch eine eindeutige Geodäte mit $0 \in T_xM$ verbunden werden kann, sehen wir, dass in jeder Homotopieklasse relativ Endpunkten von Wegen in M genau eine Geodäte existiert.[35] Die verbleibenden Behauptungen folgen nun aus Korollar III.4.23 und Korollar III.4.22. □

III.4.41. Korollar. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und α eine Homotopieklasse von Wegen relativ Endpunkten in M. Dann existiert eine, i.A. nicht eindeutige, minimale Geodäte γ in α, dh.* $\operatorname{length}(\gamma) \leq \operatorname{length}(c)$, *für jede stückweise glatte Kurve c in α.*

Beweis. Es bezeichne $p : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung von M, $x \in M$ den Anfangspunkt und y den Endpunkt von α. Weiters sei $\tilde{x} \in F_x$ beliebig, und $\tilde{y} \in F_y$ jener Punkt den wir durch Liften von α als Endpunkt erhalten, vgl. Korollar III.4.15. Durch Komposition mit p erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der Wege von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$, und α, siehe Proposition III.4.16. Eine Weg $\tilde{c}$ in $\tilde{M}$ ist genau dann stückweise glatt, wenn $p \circ \tilde{c}$ stückweise glatt ist und in diesem Fall gilt $\operatorname{length}(p \circ \tilde{c}) = \operatorname{length}(\tilde{c})$. Auch ist $\tilde{c}$ genau dann Geodäte in $\tilde{M}$, wenn $p \circ \tilde{c}$ Geodäte in M ist. Das Korollar folgt daher aus Satz III.3.27 angewandt auf $\tilde{M}$. □

III.4.42. Korollar. *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha \in [S^1, M]$ eine (freie) Homotopieklasse. Dann existiert eine, i.A. nicht eindeutige, minimale geschlossene Geodäte $\gamma : S^1 \to M$ in α, dh.* $\operatorname{length}(\gamma) \leq \operatorname{length}(c)$ *für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $c : S^1 \to M$ in α.*

Beweis. Es sei $c_n : S^1 \to M$ eine minimierende Folge stückweise glatter geschlossener Kurven in α, dh. für jede stückweise glatte Kurve $c : S^1 \to M$ in α existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{length}(c_n) \leq \operatorname{length}(c)$, für alle $n \geq n_0$. Wegen der Kompaktheit von M, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge, auch erreichen, dass der Grenzwert $x_0 := \lim_{n\to\infty} c_n(*)$ in M existiert, wobei $* \in S^1$

[35] Beachte an dieser Stelle, dass $\exp_y : T_yM \to M$ für jeden Punkt $y \in M$ die Voraussetzung des Satzes erfüllt. Dies folgt sofort aus Korollar III.5.23 unten.

einen Basispunkt bezeichnet. Durch kleine Modifikation von c_n dürfen wir also o.B.d.A. auch $c_n(*) = x_0$ annehmen, für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnen $\bar{c}_n : [0,1] \to M$ die geschlossenen Kurven $\bar{c}_n(t) := c_n(e^{2\pi \mathbf{i} t})$, $\bar{c}_n(0) = x_0 = \bar{c}_n(1)$, dann können wir nach Korollar III.4.41 o.B.d.A. annehmen, dass jedes $\bar{c}_n$ Geodäte ist. Da die Folge c_n minimierend ist, existiert insbesondere eine Konstante $C \geq 0$, sodass $|\bar{c}_n'(0)| = \operatorname{length}(\bar{c}_n) = \operatorname{length}(c_n) \leq C$. Durch Übergang zu einer Teilfolge, können wir also auch erreichen, dass der Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} \bar{c}_n'(0) \in T_{x_0}M$ existiert. Es bezeichne $\bar{c} : [0,1] \to M$, $\bar{c}(t) := \exp_{x_0}(t\xi)$. Aus der Stetigkeit der Exponentialabbildung folgt, dass die Kurven $\bar{c}_n$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Geodäte $\bar{c}$ konvergieren. Insbesondere erhalten wir $\bar{c}(0) = x_0 = \bar{c}(1)$, es existiert daher eine stetige Kurve $c : S^1 \to M$, sodass $\bar{c}(t) = c(e^{2\pi \mathbf{i} t})$. Nach Korollar III.3.34 liegt auch c in der Homotopieklasse α. Da $\lim_{n\to\infty} \operatorname{length}(c_n) = \lim_{n\to\infty} |\bar{c}_n'(0)| = |\bar{c}'(0)| = \operatorname{length}(c)$, ist c eine Kurve minimaler Länge in α. Nach Korollar III.3.24 ist c auch bei $1 \in S^1$ glatt und daher eine geschlossene Geodäte. $\square$

III.5. Variationsformeln, Indexform und Jacobifelder. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der zweiten Ableitung des Energiefunktionals beschäftigen. Als erste Anwendungen werden wir Resultate von Synge, siehe Satz III.5.5, Myers, siehe Satz III.5.11, und Mangoldt–Hadamard–Cartan, siehe Satz III.5.24, besprechen. Wir folgen in weiten Teilen der Darstellung in [**7**, Chapter 4], siehe aber auch [**19**].

Es sei $c : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt. Für $|s| < \varepsilon$ betrachte die Kurve $c_s : [a,b] \to M$, $c_s(t) := c(t,s)$ und setze

$$L(s) := \operatorname{length}(c_s) = \int_a^b \left|\tfrac{\partial c_s}{\partial t}\right| dt$$

sowie

$$E(s) := E(c_s) = \frac{1}{2}\int_a^b \left|\tfrac{\partial c_s}{\partial t}\right|^2 dt.$$

III.5.1. Lemma (Variationsformeln erster Ordnung)**.** *In dieser Situation gilt:*

$$E'(s) = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt$$

$$L'(s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t} \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt = \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt$$

Ist c_0 nach Bogenlänge parametrisiert, dh. $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \mathrm{const} = \tau$, dann gilt weiters

$$L'(0) = \frac{1}{\tau}\left\{ \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \right\}\Bigg|_{s=0}$$

Beweis. Da die Levi–Civita Konnexion torsionsfrei ist, haben wir $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}$, denn die Koordinatenvektorfelder ∂_t und ∂_s kommutieren. Die Formel für

$E'(s)$ haben wir bereits im Beweis von Lemma III.3.10 hergeleitet:

$$\begin{aligned}E'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}\int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt.\end{aligned}$$

Bei der Ableitung der Länge gehen wir analog vor:

$$\begin{aligned}L'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{1/2} dt = \int_a^b \frac{2\langle \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{2\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^{1/2}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt = \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.\end{aligned}$$

Im Fall $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \text{const} = \tau$ verwenden wir den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung um die Formel für $L'(0)$ herzuleiten. □

III.5.2. Lemma (Variationsformeln zweiter Ordnung)**.** *In dieser Situation gilt*

$$\begin{aligned}E''(s) &= \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt \\ &= \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt,\end{aligned}$$

und

$$L''(s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}\big|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.$$

Ist c_0 eine Geodäte, dh. $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c_0}{\partial t} = 0$, und daher $|\frac{\partial c_0}{\partial t}| = \text{const} = \tau$, dann gilt weiters

$$E''(0) = \left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt - \int_a^b \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}$$

und

$$L''(0) = \frac{1}{\tau}\left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}c^\perp\big|^2 dt - \int_a^b \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, c^\perp)c^\perp, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}$$

wobei $c^\perp := \frac{\partial c}{\partial s} - \langle \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$, die Orthogonalprojektion von $\frac{\partial c}{\partial s}$ längs $\frac{\partial c}{\partial t}$.

Beweis. Aus Lemma III.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
E''(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\
&= \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt \\
&= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 dt \\
&= \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt,
\end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t}$ und $R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t}$. Die Formel für $E''(0)$ folgt sofort. Bei der Länge gehen wir analog vor, aus Lemma III.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
L''(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-1/2} dt \\
&= \int_a^b \Big(\big\langle \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big)\big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-1/2} \\
&\qquad - \big\langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\big\langle \tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle^{-3/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + |\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} - \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|^3} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + |\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}|^2 - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle^2 |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt \\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle - \langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle + \big|\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}\big|^2}{|\frac{\partial c}{\partial t}|} dt.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir

$$|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}|^2 - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle^2 |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2} = \big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^2$$

verwendet, was aus der orthogonalen Zerlegung

$$\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} = \Big(\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}\Big) + \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}$$

und dem Satz von Pythagoras folgt. Ist c_0 Geodäte, dann folgt, bei $s = 0$,

$$\nabla_{\partial t}c^{\perp} = \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} - \langle \nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\rangle |\tfrac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t},$$

und somit:

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \frac{1}{\tau}\left\{\int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 dt\right\}\Bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\tau}\left\{\int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 dt\right\}\Bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\tau}\left\{\big\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} c^\perp\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial s})\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}
\end{aligned}$$

Schließlich gilt $\langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s})\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle = \big\langle R(\frac{\partial c}{\partial t}, c^\perp)c^\perp, \frac{\partial c}{\partial t}\big\rangle$, denn $\langle R(X,Y)Z,W\rangle$ ist schiefsymmetrisch in (X,Y) und schiefsymmetrisch in (Z,W). □

Als erste Anwendung der Variationsformeln zeigen wir, dass im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung (auch lange) Geodäten lokal minimierend sind.

III.5.3. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$ und $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft. Jede Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ von $\gamma(a) = c(a)$ nach $\gamma(b) = c(b)$, die hinreichend nahe bei c liegt, dh. $d(\gamma(t), c(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$, erfüllt $E(\gamma) \geq E(c)$ und* $\operatorname{length}(\gamma) \geq \operatorname{length}(c)$.

Beweis. Es bezeichne $U \subseteq M \times M$ eine offene Umgebung der Digonale wie in Korollar III.3.23. Da das Bild von c kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, sodass

$$\big\{(x,y) \in M \times M \;\big|\; d(x,y) < \varepsilon,\; x \in c([a,b])\big\} \subseteq U.$$

Ist nun $\gamma : [a,b] \to M$ und $d(c(t), \gamma(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt nach Konstruktion $(c(t), \gamma(t)) \in U$, für alle $t \in [a,b]$. Nach Korollar III.3.23 ist daher

$$\tilde c : [a,b] \times [0,1] \to M, \qquad \tilde c(t,s) := \exp_{c(t)}\big(s \exp_{c(t)}^{-1}(\gamma(t))\big),$$

wohldefiniert und glatt. Beachte weiters $\tilde c_0 = c$, $\tilde c_1 = \gamma$ sowie $\nabla_{\partial_s}\frac{\partial \tilde c}{\partial s} = 0$. Gilt darüberhinaus $c(a) = \gamma(a)$ und $c(b) = \gamma(b)$, dann haben wir auch $\tilde c(a,s) = c(a)$ und $\tilde c(b,s) = c(b)$, für alle $s \in [0,1]$. Setzen wir $E(s) := E(\tilde c_s)$, dann gilt $E'(0) = 0$, denn $\tilde c_0 = c$ ist eine Geodäte, vgl. Lemma III.5.1. Aus Lemma III.5.2 folgt

$$E''(s) = \int_a^b \underbrace{\big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle}_{=0} - \underbrace{\big\langle R(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s})\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\big|\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big|^2}_{\geq 0} dt \geq 0, \quad s \in [0,1],$$

denn nach Voraussetzung gilt $K \leq 0$. Wir erhalten somit $E(1) \geq E(0)$, also $E(\gamma) \geq E(c)$.

Analog lässt sich die Länge behandeln. Setzen wir $L(s) := \mathrm{length}(\tilde c_s)$, dann gilt $L'(0)=0$, vgl. Lemma III.5.1. Aus Lemma III.5.2 und $K\leq 0$ erhalten wir

$$L''(s) = \int_a^b \underbrace{\frac{\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\frac{\partial\tilde c}{\partial s},\frac{\partial\tilde c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\langle R(\frac{\partial\tilde c}{\partial t},\frac{\partial\tilde c}{\partial s})\frac{\partial\tilde c}{\partial s},\frac{\partial\tilde c}{\partial t}\rangle}{|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|}}_{\leq 0}$$
$$+ \underbrace{\frac{\big|\nabla_{\partial_t}\frac{\partial\tilde c}{\partial s} - \langle\nabla_{\partial_t}\frac{\partial\tilde c}{\partial s},\frac{\partial\tilde c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial\tilde c}{\partial t}\big|^2}{|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|}}_{\geq 0} dt,$$

also $L''(s)\geq 0$, für alle $s\in[0,1]$. Wieder erhalten wir $L(1)\geq L(0)$, also $\mathrm{length}(\gamma)\geq \mathrm{length}(c)$. $\square$

III.5.4. Bemerkung. Ohne der Voraussetzung $K\leq 0$ bleibt Satz III.5.3 nicht richtig, betrachte etwa die runde Sphäre $M=S^2$.

Als weitere Anwendung beweisen wir folgenden Satz von Synge, siehe etwa [**19**, Chapter 6.5] oder [**7**, Theorem 4.1.2].

III.5.5. Satz (Synge)**.** *Es sei M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung $K>0$. Dann gilt:*

(a) Ist M gerade dimensional und orientierbar, dann ist M einfach zusammenhängend.
(b) Ist M ungerade dimensional, dann ist M orientierbar.

Beweis. Um (a) zu zeigen, gehen wir indirekt vor und nehmen an M wäre nicht einfach zusammenhängend. Nach Proposition III.4.16 existiert daher eine nicht triviale Homotopieklasse in $[S^1,M]$, und diese lässt sich durch eine minimale geschlossene Geodäte $c: S^1\to M$ repräsentieren, siehe Korollar III.4.42. Fixiere $t_0\in S^1$ und bezeichne den Paralleltransport längs c mit $P: T_{c(t_0)}M\to T_{c(t_0)}M$. Dies ist eine orthogonale Abbildung die den von $c'(t_0)$ aufgespannten Teilraum festhält. Bezeichnet $V\subseteq T_{c(t_0)}M$ das orthogonale Komplement von $c'(t_0)$, so schränkt sich P zu einer orthogonalen Abbildung $P: V\to V$ ein. Da M gerade dimensional vorausgesetzt wurde, und weil $c'(t_0)\neq 0$, hat V ungerade Dimension. Da M orientierbar ist gilt weiters $\det(P: V\to V) = \det(P: T_{c(t_0)}M\to T_{c(t_0}M) = 1$. Daraus schließen wir, dass ein Fixpunkt $0\neq v\in V$ existiert, $Pv=v$. Es existiert daher ein nicht triviales paralleles Vektorfeld $0\neq X\in\Gamma(c^*TM)$ längs c, $\nabla_{\partial_t}X=0$, das orthogonal auf c steht, dh. $\langle X(t),c'(t)\rangle=0$, für alle $t\in S^1$. Wir betrachten nun die Variation $\tilde c: S^1\times\mathbb{R}\to M$, $\tilde c(t,s) := \exp_{c(t)}(sX(t))$. Nach Konstruktion gilt $\tilde c(t,0)=c(t)$ und $\frac{\partial\tilde c}{\partial s}(t,0)=X(t)$, für alle $t\in S^1$. Setzen wir $L(s) := \mathrm{length}(\tilde c_s) = \int_{S^1}|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|dt$ so gilt $L'(0)=0$, siehe Lemma III.5.1, und nach Lemma III.5.2 auch

$$L''(0) = \frac{1}{\tau}\int_{S^1}\big|\underbrace{\nabla_{\partial_t}X}_{=0}\big|^2 - \underbrace{\big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t},X)X,\tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle}_{>0} dt < 0,$$

und somit $\mathrm{length}(\tilde{c}_s) < \mathrm{length}(c)$, für s nahe 0. Da dies der Minimalität von c widerspricht, muss M also einfach zusammenhängend sein.

Um (b) einzusehen gehen, nehmen wir indirekt an M, wäre nicht orientierbar. In diesem Fall existiert eine glatte Kruve $c : S^1 \to M$, sodass der Paralleltransport $P : T_{c(t_0)}M \to T_{c(T_0)}M$ orientierungsumkehrend ist. Nach Korollar III.4.42 dürfen wir c als minimale geschlossene Geodäte annehmen. In diesem Fall ist das orthogonale Komplement von $c'(t_0)$ in $T_{c(t_0)}M$ gerade dimensional und $P : V \to V$ orientierungsumkehrend, und besitzt daher einen Fixpunkt $0 \neq v \in V$, $P(v) = v$. Wie oben erhalten wir daraus ein paralleles Vektorfeld $0 \neq X \in \Gamma(c^*TM)$, $\nabla_{\partial_t} c = 0$, das orthogonal of c steht, dh. $\langle X(t), c'(t)\rangle = 0$, für alle $t \in S^1$. Genau wie im Beweis von (a) erhalten wir zusammen mit $K > 0$ daraus einen Widerspruch. Also muss M orientierbar sein. $\square$

III.5.6. Bemerkung (Hopf Vermutung)**.** Nach Satz III.5.5(a) kann es auf $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung geben, denn diese Mannigfaltigkeit ist gerade dimensional und orientierbar, aber nicht einfach zusammenhängend. Eine Vermutung von Heinz Hopf besagt, dass auch $S^2 \times S^2$ keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung besitzt. Beachte, dass die Produktmetrik auf $S^2 \times S^2$ nur $K \geq 0$ erfüllt, obwohl $\mathrm{Ric} > 0$.

III.5.7. Definition (Indexform)**.** Sind X und Y zwei Vektorfelder längs einer Geodäte $c : [a, b] \to M$, so setzen wir

$$I_c(X, Y) := \int_a^b \big\langle \nabla_{\partial_t} X, \nabla_{\partial_t} Y \big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt$$

Dies definiert eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum der Vektorfelder längs c, dh. dem Vektorraum der Schnitte $\Gamma(c^*TM)$. Diese symmetrische Bilinearform wird *Indexform* von c genannt.

III.5.8. Lemma. *Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte und $\tilde{c} : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\tilde{c}_0 = c$, $\tilde{c}_s(a) = c(a)$ und $\tilde{c}_s(b) = c(b)$, für alle $|s| < \varepsilon$. Bezeichnet $X(t) := \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t, 0)$, dann gilt $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0 = \frac{\partial}{\partial s}|_0 L(\tilde{c}_s)$ und*

$$\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 E(\tilde{c}_s) = I_c(X, X) \quad \textit{sowie} \quad \tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 L(\tilde{c}_s) = \tfrac{1}{\tau} I_c(X^\perp, X^\perp),$$

wobei $\tau = |\frac{\partial c}{\partial t}| = \mathrm{const}$ und $X^\perp := X - \langle X, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle |\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2} \frac{\partial c}{\partial t}$.

Beweis. Aus Lemma III.5.1 folgt $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde{c}_s) = 0 = \frac{\partial}{\partial s}|_0 L(\tilde{c}_s)$. Nach Lemma III.5.2 gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 E(\tilde{c}_s) &= \bigg\{ \big\langle \nabla_{\partial_s} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \big\rangle \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}) \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde{c}}{\partial t}\big\rangle dt \bigg\} \bigg|_{s=0} \\ &= \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt = I_c(X, X),\end{aligned}$$

und analog

$$\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 L(\tilde c_s) = \frac{1}{\tau}\left\{\left\langle \nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial\tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \left|\nabla_{\partial_t} c^\perp\right|^2 - \left\langle R(\tfrac{\partial\tilde c}{\partial t}, c^\perp)c^\perp, \tfrac{\partial c}{\partial t}\right\rangle dt\right\}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_a^b \left|\nabla_{\partial_t} X^\perp\right|^2 - \left\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X^\perp)X^\perp, \tfrac{\partial c}{\partial t}\right\rangle dt = \tfrac{1}{\tau} I_c(X^\perp, X^\perp),$$

wobei $c^\perp := \frac{\partial\tilde c}{\partial s} - \langle\frac{\partial\tilde c}{\partial s}, \frac{\partial\tilde c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial\tilde c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial\tilde c}{\partial t}$. □

III.5.9. Bemerkung. Ist X ein Vektorfelder längs einer nicht konstanten Geodäte $c : [a,b] \to M$, und bezeichnen $X = X^\| + X^\perp$ die orthogonale Zerlegung mit $X^\| := \langle X, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$ und $X^\perp := X - X^\|$, dann gilt

$$I_c(X^\|, X^\|) = \int_a^b \left|\nabla_{\partial_t} X^\|\right|^2 dt \geq 0,$$

und

$$I_c(X,X) = I_c(X^\perp, X^\perp) + I_c(X^\|, X^\|) \geq I_c(X^\perp, X^\perp),$$

denn $R(\frac{\partial c}{\partial t}, X^\|) = 0$ und $\nabla_{\partial_t} X^\| = \langle \nabla_{\partial_t} X, \frac{\partial c}{\partial t}\rangle|\frac{\partial c}{\partial t}|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$, also $I_c(X^\|, X^\perp) = 0$.

III.5.10. Lemma. *Es sei $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte und X ein Vektorfeld längs c, sodass $X(a) = 0 = X(b)$ und $I_c(X,X) < 0$. Dann existiert eine Variation $\tilde c : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, sodass $\tilde c_0 = c$, $\tilde c(a,s) = c(a)$, $\tilde c(b,s) = c(b)$, $E(\tilde c_s) < E(c)$ und $L(\tilde c_s) < L(c)$, für alle $0 < |s| < \varepsilon$.*

Beweis. Die Variation $\tilde c(t,s) := \exp_{c(t)}(sX(t))$ erfüllt offensichtlich $\tilde c_0 = c$, $\tilde c(a,s) = c(a)$, $\tilde c(b,s) = c(b)$ und $\frac{\partial\tilde c}{\partial s}(t,0) = X(t)$. Aus Lemma III.5.8 folgt $\frac{\partial}{\partial s}|_0 E(\tilde c_s) = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 E(\tilde c_s) = I_c(X,X) < 0$, also $E(\tilde c_s) < E(\tilde c_0) = E(c)$, für hinreichend kleine s. Analog erhalten wir $\frac{\partial}{\partial s}|_0 L(\tilde c_s) = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2}|_0 L(\tilde c_s) = \frac{1}{\tau} I_c(X^\perp, X^\perp) \leq \frac{1}{\tau} I_c(X,X) < 0$, siehe Bemerkung III.5.9, und somit $L(\tilde c_s) < L(\tilde c_0) = L(c)$.[36] □

III.5.11. Satz (Myers)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric} \geq \lambda > 0$.[37] Dann ist M kompakt und es gilt*

$$\operatorname{diam}(M) \leq \pi\sqrt{(n-1)/\lambda}. \tag{III.73}$$

Darüber hinaus hat M endliche Fundamentalgruppe.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**7**]. Es seien $x, y \in M$, $\rho := d(x,y) > 0$ und $c : [0,\rho] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte von $c(0) = x$

[36] Diese Ungleichung lässt sich auch mittels Lemma III.3.9 aus $E(\tilde c_s) < E(c)$ herleiten,

$$L(\tilde c_s)^2 \leq 2(b-a)E(\tilde c_s) < 2(b-a)E(c) = L(c)^2.$$

[37] Dh. $\mathrm{Ric}(X,X) \geq \lambda\langle X, X\rangle$, für eine reelle Zahl $\lambda > 0$ und alle Tangentialvektoren X.

nach $c(\rho) = y$, siehe Satz III.3.27. Mittels Paralleltransport konstruieren wir parallele orthonormale Vektorfelder $c' = X_1, X_2, \dots, X_n$ längs c, dh.

$$\nabla_{\partial_t} X_i = 0 \quad \text{und} \quad \langle X_i(t), X_j(t)\rangle = \delta_{ij}.$$

Setze $Y_i(t) := \sin(\pi t/\rho) X_i(t)$ und beachte $(\nabla_{\partial_t} Y_i)(t) = (\pi/\rho)\cos(\pi t/\rho) X_i(t)$, also $|\nabla_{\partial_t} Y_i)(t)|^2 = (\pi/\rho)^2 \cos^2(\pi t/\rho)$, $i = 2, \dots, n$. Da c Kurve minimaler Länge ist, und weil $Y_i(0) = 0 = Y_i(\rho)$, erhalten wir aus Lemma III.5.10

$$\begin{aligned} 0 \le I(Y_i, Y_i) &= \int_0^\rho |\nabla_{\partial_t} Y_i|^2 dt - \int_0^\rho \big\langle R(Y_i, c')c', Y_i\big\rangle dt \\ &= (\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) \big\langle R(X_i, c')c', X_i\big\rangle dt \end{aligned}$$

Aufsummieren liefert

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=2}^n I(Y_i, Y_i) &= (n-1)(\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) \operatorname{Ric}(c', c') dt \\ &\le (n-1)(\pi/\rho)^2 \int_0^\rho \cos^2(\pi t/\rho) dt - \lambda \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) dt \\ &= \Big((n-1)(\pi/\rho)^2 - \lambda\Big) \int_0^\rho \sin^2(\pi t/\rho) dt, \end{aligned}$$

woraus wir $d(x, y) = \rho \le \pi\sqrt{(n-1)/\lambda}$ schließen. Da dies für je zwei Punkte $x, y \in M$ gilt, erhalten wir die Abschätzung (III.73) für den Durchmesser. Die Kompaktheit von M folgt nun aus Satz III.3.27.

Beachte, dass auch die universelle Überlagerung von M die Voraussetzungen-des Satzes erfüllt, siehe Proposition III.4.38, und daher ebenfalls kompakt ist. Insbesondere sind ihre Fasern endlich. Da die Fundamentalgruppe frei auf den Fasern wirkt, siehe Korollar III.4.19, muss auch sie endlich sein. □

III.5.12. Bemerkung. Die runde Sphäre S^n_r mit Radius $r > 0$ hat Durchmesser $\operatorname{diam}(S^n_r) = \pi r$ und konstante Ricci Krümmung $\operatorname{Ric} = (n-1)r^{-2}$, siehe Beispiel III.1.11. Satz III.5.11 besagt daher, dass wenn die Ricci Krümmung von M mindestens so groß ist wie die der runden Sphäre S^n_r,

$$\operatorname{Ric}_M \ge \operatorname{Ric}_{S^n_r} = (n-1)/r^2,$$

so ist der Durchmesser von M höchstens so groß wie der der runden Sphäre S^n_r,

$$\operatorname{diam}(M) \le \pi r = \operatorname{diam}(S^n_r).$$

III.5.13. Beispiel. Das folgende Beispiel [**19**, Chapter 6.4, Example 42] illustriert die Vollständigkeitsvoraussetzung in Satz III.5.11. Es bezeichne $P \in S^2$ einen Punkt in der runden Sphäre. Die unvollständige Mannigfaltigkeit $M := S^2 \setminus \{P, -P\}$ hat konstante Krümmung $K = 1$, Durchmesser $\operatorname{diam}(M) = \pi$ und Fundamentalgruppe $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Beachte, dass auch die universelle Überlagerung von M Durchmesser π hat.

III.5.14. Definition (Jacobifeld)**.** Ein Vektorfeld X längs einer Geodäte $c : I \to M$, dh. $X \in \Gamma(c^*TM)$, wird Jacobifeld genannt, falls

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X + R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t} = 0. \tag{III.74}$$

III.5.15. Lemma. *Ist $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte und $X \in \Gamma(c^*TM)$, dann sind äquivalent:*
(a) X ist ein Jacobifeld längs c.
(b) $I(X, Y) = \langle\nabla_{\partial_t}X, Y\rangle\big|_a^b$, für alle $Y \in \Gamma(c^*TM)$.
(c) $I(X, Y) = 0$, für alle $Y \in \Gamma(c^*TM)$ mit $Y(a) = 0 = Y(b)$.

Beweis. Sind $X, Y \in \Gamma(c^*TM)$, dann gilt

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_a^b \big\langle\nabla_{\partial_t}X, \nabla_{\partial_t}Y\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle\nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle - \big\langle\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle - \big\langle R(\tfrac{\partial c}{\partial t}, X)Y, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle dt \\ &= \big\langle\nabla_{\partial_t}X, Y\big\rangle\big|_a^b - \int_a^b \big\langle\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X + R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, Y\big\rangle dt, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichheit verwendet haben, dass $\langle R(X, Y)Z, W\rangle$ schiefsymmetrisch in (X, Y) und schiefsymmetrisch in (Z, W) ist. □

III.5.16. Proposition. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $v, w \in T_{c(t_0)}M$. Dann existiert genau ein Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass (III.74) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für X darstellt. Genauer, verwenden wir den Paralleltransport um das Vektorbündel c^*TM zu trivialisieren,

$$I \times V \xrightarrow{\cong} c^*TM, \qquad (t, v) \mapsto \mathrm{pt}^c_{t,t_0}(v),$$

wobei $V := T_{c(t_0)}M$, siehe Satz II.3.11. Dies liefert einen $C^\infty(I)$-linearen Isomorphismus

$$\phi : \Gamma(c^*TM) \xrightarrow{\cong} C^\infty(I, V),$$

mit $\phi(\nabla_{\partial_t}X) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi(X))$ und $\phi(X)(t_0) = X(t_0)$ für alle $X \in \Gamma(c^*TM)$. Folglich ist ein Vektorfeld $X \in \Gamma(c^*TM)$ genau dann Jacobifeld, wenn $\xi := \phi(X) \in C^\infty(I, V)$ die Gleichung

$$\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\xi + \rho\xi = 0, \tag{III.75}$$

erfüllt, wobei $\rho : I \to \mathrm{end}(V)$, $\rho(t)v := \phi\big(R(\phi^{-1}(\xi), \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}\big)$. Da (III.75) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für ξ bildet, gibt es zu $v, w \in V = T_{c(t_0)}M$ genau eine Lösung $\xi \in C^\infty(I, V)$ mit $\xi(t_0) = v$ und $\frac{\partial\xi}{\partial t}(0) = w$. Das entsprechende Vektorfeld $X = \phi^{-1}(\xi) \in \Gamma(c^*TM)$ ist daher das eindeutige Jacobifeld längs c mit $X(t_0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$. □

III.5.17. Lemma. *Es sei X ein Jacobifeld längst einer Geodäte c, und es bezeichne $X = X^\| + X^\perp$ die Zerlegung von X in tangentialen und orthogonalen Teil, dh.*

$$X^\| := \big\langle X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle \big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t}, \qquad X^\perp := X - X^\|.$$

Dann sind auch $X^\|$ und $X^\perp$ Jacobifelder längs c.

Beweis. Zunächst gilt $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ und $\big|\frac{\partial c}{\partial t}\big| = \mathrm{const}$, denn c ist Geodäte. Somit $\nabla_{\partial_t}X^\| = \big\langle \nabla_{\partial_t}X, \frac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\big|\frac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2}\frac{\partial c}{\partial t}$, und erneutes Ableiten liefert, unter Verwendung der Jacobigleichung (III.74) für X,

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X^\| = \big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}X, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t} = -\big\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, \tfrac{\partial c}{\partial t}\big\rangle\big|\tfrac{\partial c}{\partial t}\big|^{-2}\tfrac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

denn $\langle R(X,Y)Z,W\rangle$ ist schiefsymmetrisch in (Z,W). Wegen der Schiefsymmetrie in (X,Y) haben wir weiters $R(X^\|, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, also ist $X^\|$ ein Jacobifeld. Aus der Linearität der Jacobigleichung folgt sofort, dass auch $X^\perp$ Jacobifeld ist. □

III.5.18. Lemma (Tangentiale Jacobifelder)**.** *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist das (eindeutige) Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = \lambda\frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = \mu\frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ durch folgende Formel gegeben*

$$X(t) = \big(\lambda + (t-t_0)\mu\big)\tfrac{\partial c}{\partial t}, \qquad t \in I. \tag{III.76}$$

Beweis. Für das durch (III.76) gegebene Vektorfeld $X \in \Gamma(c^*TM)$ gilt offensichtlich $\nabla_{\partial t}X = \mu\frac{\partial c}{\partial t}$ und $\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}X = 0 = R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}$, denn c ist Geodäte und $R(X,Y)$ schiefsymmetrisch. Folglich ist dieses X Jacobifeld mit $X(t_0) = \lambda\frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = \mu\frac{\partial c}{\partial t}(t_0)$. □

III.5.19. Satz. *Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und I ein kompaktes Intervall, dann gilt:*

(a) Ist $c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ glatt, sodass jede der Kurven $c_s(t) := c(t,s)$ eine Geodäte bildet, $|s| < \varepsilon$, dann ist $X(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(t,0)$ ein Jacobifeld längs c_0.

(b) Ist X ein Jacobifeld längs einer Geodäte $c_0 : I \to M$, dann existiert eine glatte Abbildung $c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, sodass jede der Kurven $c_s(t) = c(t,s)$ eine Geodäte bildet, $|s| < \varepsilon$, und $c(t,0) = c_0(t)$, $\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = X(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. Um (a) zu verifizieren, beobachten wir

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s} = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t} = \nabla_{\partial_s}\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial t} - R(\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t} = -R(\tfrac{\partial c}{\partial s}, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t},$$

denn $\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, da jedes c_s Geodäte ist. Somit gilt $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t}\frac{\partial c}{\partial s} + R(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, insbesondere ist also $X(t) = \frac{\partial c}{\partial s}(t,0)$ ein Jacobifeld längs c_0.

Um (b) zu verifizieren, fixieren wir $t_0 \in I$ und wählen eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit

$$\gamma(0) = c_0(t_0) \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}(0) = X(t_0). \tag{III.77}$$

Weiters sei $\xi \in \Gamma(\gamma^*TM)$ ein Vektorfeld längs γ mit[38]

$$\xi(0) = \tfrac{\partial c_0}{\partial t}(t_0) \quad \text{und} \quad (\nabla_{\partial_s}\xi)(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0). \tag{III.78}$$

Betrachte nun die glatte Abbildung

$$c : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad c(t,s) := \exp_{\gamma(s)}\big((t-t_0)\xi(s)\big).$$

Da I kompakt vorausgesetzt wurde, ist dies für hinreichend kleine ε tatsächlich wohldefiniert. Nach Konstruktion ist jede der Kurven $c_s(t) = c(t,s)$ eine Geodäte, $|s| < \varepsilon$, und $c(t,0)$ stimmt mit der gegebenen Geodäte c_0 überein, denn

$$c(t,0) = \exp_{\gamma(0)}\big((t-t_0)\xi(0)\big) = \exp_{c_0(t_0)}\big((t-t_0)\tfrac{\partial c_0}{\partial t}(t_0)\big) = c_0(t),$$

vgl. (III.77) und (III.78). Nach (a) ist $Y(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(t,0)$ Jacobifeld längs c_0. Es genügt nun $Y(t_0) = X(t_0)$ und $(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0)$ zu zeigen, denn aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.5.16 folgt dann $Y(t) = X(t)$, für alle $t \in I$. Für die erste dieser Gleichungen beachte

$$Y(t_0) = \tfrac{\partial c}{\partial s}(t_0,0) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}(0) = X(t_0),$$

und für die zweite Gleichung,

$$(\nabla_{\partial_t}Y)(t_0) = (\nabla_{\partial_t}\tfrac{\partial c}{\partial s})(t_0,0) = (\nabla_{\partial_s}\tfrac{\partial c}{\partial t})(t_0,0) = (\nabla_{\partial_s}\xi)(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0),$$

vgl. (III.77). □

III.5.20. Korollar. *Killing Vektorfelder sind Jacobifelder längs jeder Geodäte.*

Beweis. Sei also X ein Killing Vektorfeld, siehe Seite 110 in Abschnitt III.1, und $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte. Betrachte die Variation $c : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $c(t,s) := \mathrm{Fl}^X_s(c(t))$. Wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ ist dies für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ wohldefiniert. Für jedes $|s| < \varepsilon$ ist $c_s : [a,b] \to M$ eine Geodäte, denn als Fluss eines Killing Vektorfeldes ist Fl^X_s eine (lokale) Isometrie und bildet daher Geodäten auf Geodäten ab. Nach Satz III.5.19(a) ist daher $\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \mathrm{Fl}^X_s(c(t)) = X(c(t))$ ein Jacobifeld längs c. □

III.5.21. Korollar. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0 \in I$ und $w \in T_{c(t_0)}M$. Dann ist das (eindeutige) Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t}X)(t_0) = w$ durch folgenden Ausdruck gegeben:*

$$X(t) = T_{(t-t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot\big((t-t_0)w\big)$$

Beweis. In der Variation $\tilde c(t,s) := \exp_{c(t_0)}\big((t-t_0)(c'(t_0)+sw)\big)$ ist jedes $\tilde c_s$ eine Geodäte und es gilt $\tilde c_0 = c$. Nach Satz III.5.19(a) bildet daher

$$X(t) = \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(t,0) = T_{(t-t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot\big((t-t_0)w\big)$$

[38] Um so ein Vektorfeld ξ zu konstruieren, wählen wir parallele Vektorfelder $V, W \in \Gamma(\gamma^*TM)$, $\nabla_{\partial_s}V = 0 = \nabla_{\partial_s}W$, mit $V(0) = \frac{\partial c_0}{\partial t}(t_0)$ und $W(0) = (\nabla_{\partial_t}X)(t_0)$. Dann hat $\xi(s) := V(s) + sW(s)$ die gewünschten Eigenschaften.

ein Jacobifeld längs c. Offensichtlich gilt $X(t_0) = T_0 \exp_{c(t_0)} \cdot 0 = 0$ aber auch $(\nabla_{\partial_t} X)(t_0) = (\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s})(t_0, 0) = (\nabla_{\partial_s} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t})(t_0, 0) = \nabla_{\partial_s}(c'(t_0) + sw)\big|_{s=0} = w$. $\square$

III.5.22. Definition (Konjugierte Punkte)**.** Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte und $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \neq t_1$. Existiert ein nicht triviales Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = 0 = X(t_1)$, dann werden t_0 und t_1 konjugiert längs c genannt.

III.5.23. Korollar. *Es sei $c : I \to M$ eine Geodäte, $t_0, t_1 \in I$ und $t_0 \neq t_1$. Dann sind äquivalent:*

(a) t_0 und t_1 sind nicht konjugiert längs c.
(b) Zu jedem $v \in T_{c(t_0)}M$ und jedem $w \in T_{c(t_1)}M$ existiert ein eindeutiges Jacobifeld X längs c mit $X(t_0) = v$ und $X(t_1) = w$.
(c) Die Exponentialabbildung $\exp_{c(t_0)} : T_{c(t_0)}M \to M$ ist bei $(t_1 - t_0)c'(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Beweis. Bezeichnet J_c den Vektorraum der Jacobifelder längs c, dann gilt $\dim J_c = 2 \dim M$, siehe Proposition III.5.16. Betrachte nun die lineare Abbildung

$$\phi : J_c \to T_{c(t_0)}M \times T_{c(t_1)}M, \qquad \phi(X) := (X(t_0), X(t_1)).$$

Aus Dimensionsgründen gilt daher (a) $\Leftrightarrow \ker \phi = 0 \Leftrightarrow \phi$ bijektiv $\Leftrightarrow$ (b). Betrachte nun die Ableitung der Exponentialabbildung

$$\psi : T_{c(t_0)}M = T_{(t_1-t_0)c'(t_0)} T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M, \qquad \psi(w) := T_{(t_1-t_0)c'(t_0)} \exp_{c(t_0)} \cdot w.$$

Aus Korollar III.5.21, $\dim T_{c(t_0)}M = \dim T_{c(t_1)}M$ und dem impliziten Funktionensatz erhalten wir die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow \ker \psi = 0 \Leftrightarrow \psi$ bijektiv $\Leftrightarrow$ (c). $\square$

III.5.24. Satz (Mangoldt, Hadamard, Cartan)**.** *Es sei M eine vollständige Riemannsche n-Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Dann ist die Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ eine Überlagerungsabbildung, für jedes $x \in M$. Insbesondere ist die universelle Überlagerung von M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, es existiert genau eine Geodäte in jeder Homotopieklasse von Wegen relativ Endpunkten und $\pi_k(M) = 0$, für alle $k \geq 2$. Ist darüber hinaus M einfach zusammenhängend, dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ und je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch genau eine Geodäte verbinden.*

Beweis. Es sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodäte und X ein Jacobifeld längs c mit $X(a) = 0 = X(b)$. Nach Voraussetzung an die Krümmung folgt aus der Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X + R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle &= \big\langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle + \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 \\ &= -\underbrace{\big\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, X \big\rangle}_{\leq 0} + \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 \geq \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2, \end{aligned}$$

und somit

$$0 = \big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle\Big|_a^b = \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t}\big\langle \nabla_{\partial_t} X, X \big\rangle dt \geq \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 dt,$$

also $\nabla_{\partial_t} X \equiv 0$. Dies zeigt, dass a und b nicht konjugiert längs c sind. Nach Korollar III.5.23 ist daher $\exp_x : T_x M \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus, für jedes $x \in M$. Der Satz folgt nun aus Korollar III.4.40. $\square$

III.5.25. Proposition. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, sodass kein $t \in [a,b]$ konjugiert zu a längs c ist, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ von $\gamma(a) = c(a)$ nach $\gamma(b) = c(b)$ mit $d(\gamma(t), c(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$, gilt $L(\gamma) \geq L(c)$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn γ monotone, stückweise glatte Reparametrisierung von c ist.*

Beweis. O.B.d.A. seien $a = 0$ und $b = 1$. Setze $p := c(0)$ und $v := c'(0)$. Nach Korollar III.5.23 ist die Exponentialabbildung $\exp_p : T_p M \to M$ längs $[0,1]v$ ein lokaler Diffeomorphismus. Es existieren daher $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ und offene Umgebungen V_i von $[t_{i-1}, t_i]v$, sodass $\exp_p : V_i \to M$ ein Diffeomorphismus auf die offene Mennge $U_i := \exp_p(V_i)$ bildet, $i = 1, \ldots, N$. Insbesondere gilt $c([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, $i = 1, \ldots, N$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass jede Kurve $\gamma : [0,1] \to M$ mit $d(\gamma(t), t(t))$ für alle $t \in [0,1]$, ebenfalls $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ erfüllt, $i = 1, \ldots, N$. Jede solche Kurve kann daher nach $T_p M$ geliftet werden, dh. es existiert eine Kurve $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \bigcup_{i=1}^N V_i \subseteq T_p M$, sodass $\exp_p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Gilt $\gamma(0) = c(0)$ ud $\gamma(1) = c(1)$, dann auch $\tilde{\gamma}(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}(1) = v$. Die Proposition folgt nun genau wie im Beweis von Satz III.3.18(b). $\square$

III.5.26. Beispiel. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung, $K = \text{const}$. Nach Lemma III.1.4 gilt daher

$$R(X,Y)Z = -Kg(X,Z)Y + Kg(Y,Z)X. \tag{III.79}$$

Weiters sei $c : I \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, $|c'(t)| = 1$, $0 \in I$, $v, w \in T_{c(0)} M$ und $v \perp c'(0) \perp w$. Wir wollen nun das Jacobifeld X längs c mit $X(0) = v$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) = w$ bestimmen. Es bezeichnen dazu V und W die parallelen Vektorfelder längs c, dh. $\nabla_{\partial_t} V = 0 = \nabla_{\partial_t} W$, mit $V(0) = v$ und $W(0) = w$. Setzen wir das Jacobifeld als $X(t) = f(t)V(t) + g(t)W(t)$ an, so erhalten wir $\nabla_{\partial_t} X = f'V + g'W$, $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X = f''V + g''W$ und $R(X, c')c' = KX = KfV + KgW$, vgl. (III.79). Das Vektorfeld X erfüllt daher die Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X + R(X, c')c' = 0$ genau dann, wenn $f'' + Kf = 0$ und $g'' + Kg = 0$. Die Anfangsbedingungen übersetzen sich zu $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Wir erhalten die Lösungen:

$$K > 0 : \qquad X(t) = \cos(\sqrt{K}t)V(t) + \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}} W(t)$$

$$K = 0 : \qquad X(t) = V(t) + tW(t)$$

$$K < 0 : \qquad X(t) = \cosh(\sqrt{|K|}t)V(t) + \frac{\sinh(\sqrt{|K|}t)}{\sqrt{|K|}} W(t)$$

Beachte, dass im Fall $K \leq 0$ keine konjugierten Punkte existieren.

III.5.27. Lemma. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, dann existiert eine Konstante $C \geq 0$, sodass $\big|I_c(X,X)\big| \leq C \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X|^2 + |X|^2 dt$, für alle $X \in \Gamma(c^*TM)$.*

Beweis. Aus Kompaktheitsgründen existiert eine Konstante $C_1 \geq 0$, sodass $\big|\langle R(c'(t),\xi)\xi, c'(t)\rangle\big| \leq C_1|\xi|^2$, für jedes $t \in [a,b]$ und $\xi \in T_{c(t)}M$. Für $X \in \Gamma(c^*TM)$ erhalten wir

$$\big|I_c(X,X)\big| \leq \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X\big|^2 + \big|\langle R(c',X)X,c'\rangle\big| dt \leq \int_a^b \big|\nabla_{\partial_t} X|^2 dt + C_1 \int_a^b |X|^2 dt.$$

Das Lemma folgt daher mit $C := \max\{1, C_1\}$. □

III.5.28. Proposition. *Ist $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte und $t_0 \in (a,b)$ konjugiert zu a längs c, dann existiert ein Vektorfeld X längs c mit $I_c(X,X) < 0$ und $X(a) = 0 = X(b)$. Darüber hinaus existiert in diesem Fall eine Variation $\tilde{c} : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ von $\tilde{c}_0 = c$, sodass $\tilde{c}_s(a) = c(a)$, $\tilde{c}_s(b) = c(b)$, $E(\tilde{c}_s) < E(c)$ und $L(\tilde{c}_s) < L(c)$ für alle $0 < |s| < \varepsilon$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein nicht triviales Jacobifeld Y längs c mit $Y(a) = 0 = Y(t_0)$. Aus Proposition III.5.16 erhalten wir $(\nabla_{\partial_t} Y)(t_0) \neq 0$. Für das stückweise glatte Vektorfeld

$$V(t) := \begin{cases} Y(t) & \text{falls } t \in [a,t_0] \\ 0 & \text{falls } t \in [t_0,b] \end{cases}$$

längs c gilt nach Lemma III.5.15 $I_c(V,V) = 0$. Weiters sei W ein Vektorfeld längs mit $W(a) = 0 = W(b)$ und $W(t_0) = -(\nabla_{\partial_t} Y)(t_0)$. Nach Lemma III.5.15 gilt

$$I_c(V,W) = \big\langle \nabla_{\partial_t} Y, W\big\rangle\big|_a^{t_0} = \big\langle(\nabla_{\partial_t} Y)(t_0), W(t_0)\big\rangle = -\big|(\nabla_{\partial_t} Y)(t_0)\big|^2 < 0.$$

Wir erhalten

$$I_c(V+\eta W, V+\eta W) = \underbrace{I_c(V,V)}_{=0} + 2\eta \underbrace{I_c(V,W)}_{<0} + \eta^2 I_c(W,W).$$

Für $\eta > 0$ hinreichend klein, erfüllt das stückweise glatte Vektorfeld $Z := V + \eta W$ daher $I_c(Z,Z) < 0$ und $Z(a) = 0 = Z(b)$. Approximieren wir nun Z durch ein glattes Vektorfeld X längs c, das sich von Z nur in einer kleinen Umgebung von t_0 unterscheidet, $\int_a^b |X-Z|^2 + |\nabla_{\partial_t}(X-Z)|^2 dt < \delta$, so folgt $I_c(X,X) < 0$ und $X(a) = 0 = X(b)$, vgl. Lemma III.5.27. Die zweite Aussage der Proposition folgt nun aus Lemma III.5.10. □

Ist $c : [a,b] \to M$ eine Kurve so bezeichnen wir mit

$$\Gamma_0(c^*TM) := \big\{X \in \Gamma(c^*TM) : X(a) = 0 = X(b)\big\},$$

den Vektorraum der Vektorfelder längs c, die an den Randpunkten verschwinden.

III.5.29. Korollar. *Für eine Geodäte $c : [a,b] \to M$ sind äquivalent:*

(a) Kein $t \in (a,b)$ ist konjugiert zu a längs c.