*(b) Die Indexform ist positiv semidefinit, $I_c(X,X) \geq 0$ für alle $X \in \Gamma_0(c^*TM)$.*

Beweis. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus Proposition III.5.28. Für die umgekehrte Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) betrachten wir $X \in \Gamma_0(c^*TM)$ mit $I_c(X,X) < 0$. O.B.d.A. dürfen wir weiters $X|_{[b-\delta,b]} \equiv 0$ annehmen, vgl. Lemma III.5.27. Nach Lemma III.5.10 existiert daher eine Variation $\tilde{c} : [a, b-\delta] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von $\tilde{c}_0 = c|_{[a,b-\delta]}$ mit $\tilde{c}_s(a) = c(a)$, $\tilde{c}_s(b-\delta) = c(b-\delta)$ und $L(\tilde{c}_s) < L(c|_{[a,b-\delta]})$, für alle $0 < |s| < \varepsilon$. Nach Proposition III.5.25 muss es daher einen Punkt $t \in (a, b-\delta] \subseteq (a,b)$ geben, der konjugiert zu $a$ längs $c$ ist. □

**III.5.30. Korollar.** *Für eine Geodäte $c : [a,b] \to M$ sind äquivalent:*

*(a) Kein $t \in (a,b]$ ist konjugiert zu $a$ längs $c$.*
*(b) Die Indexform ist positiv definit, $I_c(X,X) > 0$ für alle $0 \neq X \in \Gamma_0(c^*TM)$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Nach Korollar III.5.29 gilt zunächst $I_c(X,X) \geq 0$, für alle $X \in \Gamma_0(c^*TM)$. Ist $X \in \Gamma_0(c^*TM)$ und $I_c(X,X) = 0$, dann folgt

$$0 \leq I_c(X+\eta Y, X+\eta Y) = \underbrace{I_c(X,X)}_{=0} + 2\eta I_c(X,Y) + \eta^2 I_c(Y,Y),$$

für alle $Y \in \Gamma_0(c^*TM)$ und alle $\eta \in \mathbb{R}$. Betrachten wir $\eta$ nahe 0, dann erhalten wir $I_c(X,Y) = 0$, für alle $Y \in \Gamma_0(c^*TM)$. Nach Lemma III.5.15 muss daher $X$ ein Jacobifeld längs $c$ sein. Nach Voraussetzung ist $b$ nicht konjugiert zu $a$ längs $c$, also $X \equiv 0$. Dies zeigt, dass $I_c$ auf $\Gamma_0(c^*TM)$ positiv definit ist. Nun zur umgekehrten Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Nach Korollar III.5.29 wissen wir, dass kein $t \in (a,b)$ konjugiert zu $a$ sein kann. Es kann aber auch $b$ nicht konjugiert zu $a$ sein, denn sonst gäbe es ein Jacobifeld $0 \neq X \in \Gamma_0(c^*TM)$, für das dann $I_c(X,X) = 0$ gelten würde, siehe Lemma III.5.15. □

Ohne Beweis sei hier noch folgende Verallgemeinerung der vorangehenden Resultate erwähnt, etwa in [**7**, Theorem 4.3.2] oder [**13**, §15].

**III.5.31. Satz** (Morse Index Theorem)**.** *Ist $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, dann existieren nur endlich viele Punkte $t \in [a,b]$ die konjugiert zu $a$ längs $c$ sind, und es gilt*

$$\operatorname{ind}(I_c) = \sum_{t \in (a,b)} \dim\big\{X \text{ Jacobifeld längs } c \text{ mit } X(a) = 0 = X(t)\big\},$$

*wobei* $\operatorname{ind}(I_c) := \max\big\{\dim V \bigm| V \subseteq \Gamma_0(c^*TM) \text{ Teilraum mit } I_c|_V < 0\big\}$. *Weiters*

$$\operatorname{ind}_0(I_c) = \sum_{t \in (a,b]} \dim\big\{X \text{ Jacobifeld längs } c \text{ mit } X(a) = 0 = X(t)\big\},$$

*wobei* $\operatorname{ind}_0(I_c) := \max\big\{\dim V \bigm| V \subseteq \Gamma_0(c^*TM) \text{ Teilraum mit } I_c|_V \leq 0\big\}$.

Ein Beweis des folgenden Satzes findet sich in [**13**, Theorem 17.3].

**III.5.32. Satz.** *Es sei $M$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$ nicht konjugiert, dh. für jede Geodäte $c : [a,b] \to M$ von $c(a) = p$ nach $c(b) = q$ ist $a$ nicht konjugiert zu $b$.*[39] *Dann hat der Pfadraum*

$$\Omega(M,p,q) := \big\{\gamma : [0,1] \to M \;\big|\; \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\big\},$$

*versehen mit der kompakt-offenen Topologie, den Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes mit einer $k$-Zelle für jede Geodäte $c$ von $p$ nach $q$ mit* $\operatorname{ind}(I_c) = k$.

## III.6. Vergleich von Jacobifeldern.

**III.6.1. Proposition.** *Für $p \in M$ betrachte die Funktion*

$$f_p : M \to \mathbb{R}, \qquad f_p(x) := \tfrac{1}{2} d(x,p)^2.$$

*Weiters sei $x \in M$, sodass $f_p$ in einer Umgebung von $x$ glatt ist. Schließlich sei $c : [0,1] \to M$ eine minimale Geodäte von $c(0) = p$ nach $c(1) = x$ und $X$ ein Jacobifeld längs $c$ mit $X(0) = 0$. Dann gilt* $\operatorname{grad}_x(f_p) = c'(1)$ *und* [40]

$$H(f_p)\big(X(1), X(1)\big) = \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1).$$

Beweis. Wir betrachten eine Variation $\tilde c(t,s)$, sodass jedes $\tilde c_s(t) := \tilde c(t,s)$ Geodäte ist, dh. $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde c}{\partial t} = 0$, mit $\tilde c_s(0) = p$ und $\tilde c_0 = c$. Für hinreichend kleine $s$ ist $\tilde c_s$ eine minimale Geodäte von $p$ nach $\tilde c(1,s)$ und daher

$$f_p(\tilde c(1,s)) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \big|\tfrac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big| dt\Big)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \big|\tfrac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big|^2 dt = E(\tilde c_s),$$

denn $\big|\frac{\partial \tilde c_s}{\partial t}\big|$ ist konstant in $t$. Aus Lemma III.5.1 folgt somit

$$(df_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1,s)\big) = \tfrac{\partial}{\partial s} f_p(\tilde c(1,s)) = \tfrac{\partial}{\partial s} E(\tilde c_s) = \langle \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\rangle\Big|_{t=0}^{t=1} = \big\langle \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}\big\rangle(1,s)$$

denn $\nabla_{\partial_t} \frac{\partial \tilde c}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \tilde c}{\partial s}(0,s) = 0$, da $\tilde c(0,s) = \text{const} = p$. Da $\frac{\partial \tilde c}{\partial s}(1,s)$ in $T_x M$ beliebig vorgegeben werden kann, folgt daraus

$$\operatorname{grad}_{\tilde c(1,s)}(f_p) = \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}(1,s).$$

Setzen wir $s = 0$, so erhalten wir die erste Behauptung, $\operatorname{grad}_x(f_p) = c'(1)$. Erneutes Ableiten liefert

$$\begin{aligned} H(f_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1,s), \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1,s)\big) &= (\nabla_{\partial_s} df_p)\big(\tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}(1,s)\big) \\ &= \big\langle \nabla_{\partial_s} \operatorname{grad}(f_p), \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1,s) = \big\langle \nabla_{\partial_s} \tfrac{\partial \tilde c}{\partial t}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1,s) = \big\langle \nabla_{\partial_t} \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}, \tfrac{\partial \tilde c}{\partial s}\big\rangle(1,s). \end{aligned}$$

---

[39] Die Existenz solcher Paare von Punkten $(p,q)$ folgt aus Korollar III.5.23 mit Hilfe des Satzes von Sard, vgl. [**13**, §18].

[40] Unter dem *Gradienten* einer glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, verstehen wir jenes Vektorfeld $\operatorname{grad}(f) \in \Gamma(TM)$, das bezüglich $g$ der 1-Form $df \in \Gamma(T^*M)$ entspricht, dh. $\langle \operatorname{grad}(f), - \rangle = df$, oder $\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle = df(X) = X \cdot f$, für alle $X \in T_x M$. Die *Hessesche* von $f$ ist $H(f) := \nabla df \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, dh. $H(f)(X,Y) = (\nabla_X df)(Y) = X \cdot (Y \cdot f) - df(\nabla_X Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle$, für $X, Y \in T_x M$. Beachte, dass die Hessesche aufgrund der Torsionsfreiheit von $\nabla$ symmetrisch ist, dh. $H(f) \in \Gamma(S^2 T^*M)$, also $H(f)(X,Y) = H(f)(Y,X)$ für $X, Y \in T_x M$.

Nach Satz III.5.19 ist $X(t) := \frac{\partial \tilde{c}}{\partial s}(t,0)$ Jacobifeld längs $c$ und $X(0) = 0$. Setzen wir in obiger Formel für die Hessesche $s = 0$, so erhalten wir die zweite Behauptung, $H(f_p)\big(X(1), X(1)\big) = \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1)$. $\square$

**III.6.2. Lemma.** *Es sei $M$ eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, und $p \in M$. Dann ist die Funktion $f_p : M \to \mathbb{R}$, $f_p(x) := \frac{1}{2} d(x,p)^2$, glatt und für ihre Hessesche gilt $H(f_p) \geq g$, dh.*

$$H(f_p)(X,X) \geq |X|^2, \qquad X \in T_x M. \tag{III.80}$$

*Ist darüber hinaus $K < 0$ und $x \neq p$, so gilt Gleichheit in* (III.80) *genau dann, wenn $X$ tangential an die (eindeutige) Geodäte durch $p$ und $x$ ist.*

Beweis. Die Glattheit von $f_p$ folgt sofort aus Satz III.5.24, denn in Riemannschen Polarkoordinaten zentriert bei $p$ stimmt $f_p$ mit $\frac{1}{2} r^2$ überein, wobei $r$ den Euklidischen Abstand zu $0 \in T_p M$ bezeichnet.

Es sei nun $x \in M$ und $c : \mathbb{R} \to M$ die eindeutige Geodäte von $c(0) = p$ nach $c(1) = x$. Weiters sei $X$ ein nicht-triviales Jacobifeld längs $c$ mit $X(0) = 0$. Nach Satz III.5.24 und Korollar III.5.23 gilt daher $X(t) \neq 0$, für alle $t > 0$. Die Funktion

$$\lambda : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \lambda(t) := \frac{\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle}{|X|^2}(t).$$

ist daher glatt. Ihre Ableitung lässt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \Big(\big\langle \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X, X\big\rangle |X|^2 + |\nabla_{\partial_t} X|^2 |X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&= \Big(-\langle R(X, \tfrac{\partial c}{\partial t})\tfrac{\partial c}{\partial t}, X\rangle |X|^2 + |\nabla_{\partial_t} X|^2 |X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&\geq \Big(|\nabla_{\partial_t} X|^2 |X|^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&\geq \Big(\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2 - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2\Big)|X|^{-4} \\
&= -\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle^2 |X|^{-4} = -\lambda^2,
\end{aligned}$$

wobei wir die Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X + R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t} = 0$, die Vorausseqtzung an die Schnittkrümmung $K \leq 0$, und auch die Cauchy–Schwarz Ungleichung verwendet haben. Somit gilt $1 \geq -\lambda'\lambda^{-2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\lambda}$. Da $\lim_{t\to 0}\lambda(t) = \infty$, erhalten wir durch Integration $1 \geq \frac{1}{\lambda(t)}\big|_0^1 = \frac{1}{\lambda(1)}$, also $\lambda(1) \geq 1$. Zusammen mit Proposition III.6.1 folgt

$$|X(1)|^2 \leq \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(1) = H(f_p)\big(X(1), X(1)\big).$$

Dies zeigt (III.80), denn $X(1)$ in $T_x M$ ist beliebig, siehe Korollar III.5.23. Tritt in (III.80) Gleichheit ein, dann muss $\langle R(X, \frac{\partial c}{\partial t})\frac{\partial c}{\partial t}, X\rangle \equiv 0$ gelten. Im Fall $K < 0$ folgt daraus, dass $X$ und $\frac{\partial c}{\partial t}$ punktweise linear abhängig sind. Gilt darüber hinaus $x \neq p$, dann ist $c$ nicht konstant, und daher $X$ tangential an $c$. $\square$

**III.6.3. Satz** (Cartan)**.** *Auf einer vollständigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, besitzt jede Isometrie endlicher Ordnung einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [**19**, Chapter 6§3.2]. Sei also $M$ eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Für jedes $p \in M$ ist die Funktion $f_p : M \to \mathbb{R}$ strikt konvex, dh. für jede nicht konstante Geodäte $c$ ist $f_p \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Abbildung.[41] Dies folgt aus Lemma III.6.2, denn

$$(f_p \circ c)'' = \tfrac{\partial}{\partial t} df_p(c') = (\nabla df_p)(c', c') - df_p(\nabla_{\partial_t} c') = H(f_p)(c', c') \geq |c'|^2 > 0.$$

Sei nun $\varphi \in \operatorname{Isom}(M)$ eine Isometrie endlicher Ordnung, dh. $\varphi^k = \mathrm{id}_M$, für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Funktion

$$F : M \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \max\bigl\{f_p(x), f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi^2(p)}(x), \dots, f_{\varphi^{k-1}(p)}(x)\bigr\}$$

strikt konvex, denn das Maximum zweier (endlich vieler) strikt konvexer Fuktionen ist offensichtlich selbst wieder strikt konvex. Aus Stetigkeitsgründen muss $F$ ein Minimum annehmen, denn für jedes $r > 0$ ist $\{x \in M : F(x) \leq r\}$ beschränkt und abgeschlossen also kompakt, siehe Satz III.3.27. Da $F$ *strikt* konvex ist, wird dieses Minimum bei genau einem Punkt $q \in M$ angenommen. Wären nämlich $q_1 \neq q_2$ zwei verschiedene Punkte an denen $F$ ihr Minimum annimmt, und $\gamma$ eine Geodäte die $q_1$ mit $q_2$ verbindet, dann wäre $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion, die ihr Minimum mehrmals annimmt.[42] Da $\varphi$ eine Isometrie ist gilt $f_{\varphi^{k+1}(p)}(\varphi(x)) = f_{\varphi^k(p)}(x)$ und somit $F(\varphi(x)) = F(x)$. Aus der Eindeutigkeit des Minimums folgt daher $\varphi(q) = q$, also ist $q$ der gesuchte Fixpunkt. □

**III.6.4. Korollar.** *Die Fundamentalgruppe einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$, ist torsionsfrei.*[43]

BEWEIS. Die universelle Überlagerung einer solchen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, auf der die Fundamentalgruppe durch Isometrien frei wirkt. Das Korollar folgt daher aus Satz III.6.3. □

**III.6.5. Proposition.** *Es sei $M$ eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung, $K \leq 0$. Bezeichnen $\alpha, \beta$ und $\gamma$ die Winkel eines (geodätischen) Dreiecks in $M$, dann gilt*

[41] Wir erinnern uns, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird strikt konvex genannt, falls

$$f\bigl(tx + (1-t)y\bigr) < tf(x) + (1-t)f(y),$$

für alle $x \neq y$ und $0 < t < 1$. Ist $f$ zweimal stetig differenzierbar und $f'' > 0$, dann ist $f$ strikt konvex.

[42] Strikt konvexe Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nehmen ihr Minimum, falls es existiert, höchstens an einer Stelle an. Dies folgt sofort aus der Definition strikt konvexer Funktionen.

[43] dh. jedes nicht-triviale Element hat unendliche Ordnung

$\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$. *Ist darüber hinaus* $K < 0$ *und das Dreieck nicht degeneriert,*[44] *dann gilt sogar* $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Beweis. Es sei $p \in M$ und $\sigma : \mathbb{R} \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Nach Lemma III.6.2 gilt

$$(f_p \circ \sigma)'' = \tfrac{\partial}{\partial t} df_p(\sigma') = (\nabla df_p)(\sigma', \sigma') - df_p(\nabla_{\partial t}\sigma') = H(f_p)(\sigma', \sigma') \geq |\sigma'|^2 = 1.$$

Es folgt

$$(f_p \circ \sigma)'(\tau) - (f_p \circ \sigma)'(0) = \int_0^\tau (f_p \circ \sigma)''(t)dt \geq \int_0^\tau dt = \tau,$$

und erneutes Integrieren liefert

$$\begin{aligned} f_p(\sigma(t)) - f_p(\sigma(0)) &= \int_0^t (f_p \circ \sigma)'(\tau)d\tau \\ &\geq \int_0^t (f_p \circ \sigma)'(0) + \tau d\tau = t(f_p \circ \sigma)'(0) + t^2/2. \end{aligned} \tag{III.81}$$

Wir fixieren nun $t$ und betrachten das Dreieck mit Eckpunkten $A := \sigma(t)$, $B := p$ und $C := \sigma(0)$. Weiters bezeichne $\rho$ die Geodäte mit $\rho(0) = p$ und $\rho(1) = \sigma(0)$. Für die Längen der entsprechenden Seiten gilt daher $a = d(p, \sigma(0)) = |\rho'(1)|$, $b = t$ und $c = d(p, \sigma(t))$. Für den Winkel $\gamma$ bei $C$ erhalten wir aus Proposition III.6.1

$$\begin{aligned} -a\cos\gamma &= a\frac{\langle \rho'(1), \sigma'(0)\rangle}{|\rho'(1)||\sigma'(0)|} = \langle \rho'(1), \sigma'(0)\rangle \\ &= \big\langle \mathrm{grad}_{\rho(1)}(f_p), \sigma'(0)\big\rangle = (df_p)(\sigma'(0)) = (f_p \circ \sigma)'(0). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (III.81) besagt daher

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{III.82}$$

Da $p$ und $\sigma$ beliebig waren, gilt diese Relation in jedem Dreieck. Bezeichnen $\alpha_0$, $\beta_0$ und $\gamma_0$ die entsprechenden Winkel in einem Euklidischen Dreieck mit Seitenlägen $a$, $b$ und $c$, dann gilt der Kosinussatz, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_0$, und mit (III.82) folgt $\gamma \leq \gamma_0$ und analog $\alpha \leq \alpha_0$ und $\beta \leq \beta_0$. Somit erhalten wir $\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi$, denn die Winkelsumme in Euklidischen Dreiecken ist stets $\pi$. Ist $K < 0$ und das Dreieck $ABC$ nicht degeneriert, so gilt in (III.82) strikte Ungleichheit und daher auch $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. □

**III.6.6. Proposition.** *Es sei* $M$ *eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung,* $K \leq 0$. *Weiters seien* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ *die Eckpunkte eines Vierecks mit entsprechenden Winkeln* $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ *und* $\alpha_4$. *Für die Winkelsumme gilt dann* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\pi$. *Ist darüber hinaus* $K < 0$, *dann tritt Gleichheit tritt nur dann ein, wenn alle vier Eckpunkte auf einer Geodäte liegen.*

[44] dh. die drei Eckpunkte liegen nicht auf einer Geodäte

Beweis. Aus Proposition III.6.5 erhalten wir für die Winkelsumme des Dreiecks mit Ecken $A_1$, $A_2$, $A_3$

$$\alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_3' \leq \pi, \tag{III.83}$$

wobei $\alpha_1'$ und $\alpha_3'$ die Winkel bei $A_1$ bzw. $A_3$ bezeichnen. Analog gilt für die Winkelsumme des Dreiecks mit Ecken $A_1$, $A_3$, $A_4$

$$\alpha_1'' + \alpha_3'' + \alpha_4 \leq \pi, \tag{III.84}$$

wobei $\alpha_1''$, $\alpha_3''$ die Winkel bei $A_1$ und $A_3$ bezeichnen. Zusammen mit

$$\alpha_1 \leq \alpha_1' + \alpha_1'' \qquad \text{und} \qquad \alpha_3 \leq \alpha_3' + \alpha_3''$$

folgt nun $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \leq 2\pi$. Tritt hier Gleichheit ein, so muss auch in (III.83) und (III.84) Gleichheit gelten. Im Fall $K < 0$ folgt daraus, dass $A_1$, $A_2$, $A_3$ und $A_1$, $A_3$, $A_4$ jeweils auf einer Geodäte liegen, und somit liegen alle vier Punkte auf einer Geodäte. □

**III.6.7. Satz** (Preissmann). *Es sei $M$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung, $K < 0$. Dann ist jede nicht-triviale abelsche Untergruppe der Fundamentalgruppe zyklisch, dh. isomorph zu $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**19**, Chapter 6§3.2], andere Zugänge mittels harmonischer Abbildungen bzw. total geodätischer Tori finden sich u.a. in [**7**, Chapter 8.10] oder [**8**, Chapter 3.8]. Es bezeichne $p : \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Wir identifizieren die Fundamentalgruppe mit der Gruppe der Decktransformationen, $\pi_1(M) = \operatorname{Deck}(\tilde{M}) \subseteq \operatorname{Isom}(\tilde{M})$, siehe Beispiel III.4.36. Ist $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ das Bild einer Geodäte, dann bildet

$$G_\Gamma := \bigl\{\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde{M}) \bigm| \varphi(\Gamma) = \Gamma\bigr\} \subseteq \operatorname{Deck}(\tilde{M})$$

eine Untergruppe. Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ eine Parametrisierung von $\Gamma$ und $\varphi \in G_\Gamma$. Da Isometrien Geodäten auf Geodäten abbilden, existieren reelle Zahlen $a$ und $b$ mit $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(bt + a)$. Da nicht-triviale Decktransformationen fixpunktfrei sind, kann die Gleichung $t = bt + a$ keine Lösung besitzen, es muss daher $b = 1$ gelten, also $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+a)$. Die Zuordnung $\varphi \mapsto a$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G_\Gamma \to \mathbb{R}$. Beachte, dass höchstens ein $a$ mit $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+a)$ existiert, und $\phi$ daher wohldefiniert ist, vgl. Satz III.5.24. Auch ist der Homomorphismus $\phi$ injektiv, denn nicht-triviale Decktransformationen besitzen keine Fixpunkte. Schließlich ist das Bild von $\phi$ diskret in $\mathbb{R}$, denn für $\varphi_n \in G_\Gamma$ und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(\gamma(t)) = \gamma(t+a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\gamma(0)) = \gamma(0)$ und dann $\varphi_n = \mathrm{id}_M$ für hinreichend große $n$, da $\operatorname{Deck}(\tilde{M})$ strikt diskontinuierlich auf $\tilde{M}$ wirkt. Somit ist $G_\Gamma$ isomorph zu einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{R}$, dh.

(a) Für jede Geodäte $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ gilt $G_\Gamma = 0$ oder $G_\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Wir werden nun folgende Behauptung verifizieren:

(b) Zu jedem $\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde{M})$ existiert eine Geodäte $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ mit $\varphi \in G_\Gamma$, dh. $\varphi(\Gamma) = \Gamma$. Jede solche Geodäte $\Gamma$ wird eine *Achse* für $\varphi$ genannt.

Sei dazu $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ beliebig, und $\tilde{\sigma}_0 : [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg von $\tilde{\sigma}_0(0) = \tilde{x}_0$ nach $\tilde{\sigma}_0(1) = \varphi(\tilde{x}_0)$. Da $p(\tilde{\sigma}_0(0)) = p(\tilde{\sigma}_0(1))$ existiert eine stetige Abbildung $\sigma_0 : S^1 \to M$ mit $\sigma_0(e^{2\pi\mathbf{i}t}) = p(\tilde{\sigma}_0(t))$. Nach Korollar III.4.42 ist $\sigma_0$ homotop zu einer geschlossenen Geodäte $\sigma_1 : S^1 \to M$, dh. es existiert eine Homotopie $H : S^1 \times [0,1] \to M$ mit $H_0 = \sigma_0$ und $H_1 = \sigma_1$. Nach Satz III.4.13 lässt sich diese zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{M}$ liften, dh. $p(\tilde{H}(t,s)) = H(e^{2\pi\mathbf{i}t}, s)$ und $\tilde{H}(t,0) = \tilde{\sigma}_0(t)$. Setzen wir $\tilde{\sigma}_1(t) := \tilde{H}(t,1)$, dann gilt $p(\tilde{\sigma}_1(t)) = \sigma_1(e^{2\pi\mathbf{i}t})$ aber auch $\varphi(\tilde{\sigma}_1(0)) = \tilde{\sigma}_1(1)$, denn $p(\varphi(\tilde{H}(0,s))) = p(\tilde{H}(1,s))$ und $\varphi(\tilde{H}(0,0)) = \tilde{H}(1,0)$, also $\varphi(\tilde{H}(0,s)) = \tilde{H}(1,s)$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Korollar III.4.14. Es bezeichne nun $\gamma : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ den Lift der Geodäte $\sigma_1$, dh. $p(\gamma(t)) = \sigma_1(e^{2\pi\mathbf{i}t})$ und $\gamma(0) = \tilde{\sigma}_1(0)$. Dann ist auch $\gamma$ eine Geodäte und $\gamma|_{[0,1]} = \tilde{\sigma}_1$, also $\varphi(\gamma(0)) = \gamma(1)$. Daraus folgt nun $\varphi(\gamma(t)) = \gamma(t+1)$ für alle $t$, denn $p(\varphi(\gamma(t))) = \sigma_1(e^{2\pi\mathbf{i}t}) = p(\gamma(t+1))$. Somit ist $\gamma$ die gesuchte Geodäte.[45]

(c) Für $\mathrm{id}_M \neq \varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M})$ ist die Geodäte $\Gamma$ in (b) eindeutig bestimmt.

Seien dazu $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \tilde{M}$ die Bilder zweier Geodäten die invariat unter $\varphi$ sind, dh. $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_1$ und $\varphi(\Gamma_2) = \Gamma_2$. Wähle $A \in \Gamma_1$ und $B \in \Gamma_2$. Wir betrachten nun das Viereck mit Ecken $A$, $B$, $C := \varphi(B)$ und $D := \varphi(A)$. Da $\varphi$ eine Isometrie ist, summieren sich die Winkel des Vierecks bei $A$ und $D$ zu $\pi$, und auch die Winkel bei $B$ und $C$ summieren sich zu $\pi$. Die Winklesumme des Vierecks beträgt daher $2\pi$. Da $K < 0$, muss das Viereck also degeneriert sein, dh. alle vier Punkte liegen auf einer Geodäte, siehe Proposition III.6.6. Daraus folgt nun $\Gamma_1 = \Gamma_2$, denn $A \neq D$ da $\varphi$ eine nicht triviale Decktransformation ist, und durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Geodäte, siehe Satz III.5.24. Dies zeigt (c).

(d) Ist $\Gamma \subseteq \tilde{M}$ eine Geodäte und $H \subseteq G_\Gamma$ eine Teilmenge, die ein nicht-triviales Element enthält, dann gilt auch $N := \{\psi \in \mathrm{Deck}(\tilde{M}) : \psi^{-1} H \psi = H\} \subseteq G_\Gamma$.

Sei dazu $\mathrm{id}_M \neq \gamma \in H$ und $\psi \in N$. Es existiert daher $\bar{\varphi} \in H$ mit $\varphi\psi = \psi\bar{\varphi}$. Aus $\bar{\varphi}(\Gamma) = \Gamma$ folgt $\psi(\Gamma) = \psi(\bar{\varphi}(\Gamma)) = \varphi(\psi(\Gamma))$, also ist $\psi(\Gamma)$ eine Achse für $\varphi$. Aus (c) erhalten wir $\psi(\Gamma) = \Gamma$, also $\psi \in G_\Gamma$. Dies zeigt (d). Kombinieren wir dies mit (a) und (b) folgt der Satz. ☐

**III.6.8. Korollar.** *Sind $M$ und $N$ zwei kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und $\pi_1(M) \neq 0 \neq \pi_1(N)$, dann existiert auf $M \times N$ keine Riemannsche Metrik mit negativer Schnittkrümmung, $K < 0$.*

Beweis. Sind $a \in \pi_1(M)$ und $b \in \pi_1(N)$ nicht trivial, dann erzeugen diese eine abelsche Untergruppe in $\pi_1(M \times N) = \pi_1(M) \times \pi_1(N)$, die nicht zyklisch ist. Das Korollar folgt daher aus Satz III.6.7. ☐

[45] Kombinieren wir (a) mit (b) so erhalten wir erneut die Torsionsfreiheit von $\pi_1(M) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{M})$. In Korollar III.6.4 wurde dies unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen.

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\operatorname{sn}_\kappa(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{falls } \kappa > 0, \\ t & \text{falls } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{falls } \kappa < 0, \end{cases}$$

und

$$\operatorname{cn}_\kappa(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \text{falls } \kappa > 0, \\ 1 & \text{falls } \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

Beachte $\operatorname{sn}_\kappa'(t) = \operatorname{cn}_\kappa(t)$ und $\operatorname{cn}_\kappa'(t) = -\kappa \operatorname{sn}_\kappa(t)$, die Funktionen $\operatorname{sn}_\kappa$ und $\operatorname{cn}_\kappa$ lösen daher die Jacobigleichung

$$f''(t) + \kappa f(t) = 0$$

mit Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ bzw. $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

**III.6.9. Bemerkung.** Ist $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$ und $X$ ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodäte $c$ mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \perp c'(0)$, dann gilt $|X(t)| = |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\kappa(t)$, siehe Beispiel III.5.26. TODO: $X = \operatorname{cn}_\kappa(t)V(t) + \operatorname{sn}_\kappa(t)W(t)$ wobei $\nabla_{\partial_t} V = 0 = \nabla_{\partial_t} W$.

Für die folgenden Vergleichstheoreme von Rauch siehe [**20**, Theorem IX.2.1] oder [**7**, Theorem 4.5.1].

**III.6.10. Satz** (Rauch). *Es sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $c : [0, b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ falls $\kappa > 0$. Schließlich sei $X$ ein Jacobifeld längs $c$ mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \perp c'(0)$. Dann ist $|X|/\operatorname{sn}_\kappa$ monoton wachsend auf $(0, b)$ und*

$$|X(t)| \geq |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\kappa(t), \qquad t \in [0, b].$$

Beweis. O.B.d.A. sei $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \neq 0$ und daher $X(t) \neq 0$ für kleine $t > 0$. Es sei $0 < \tau \leq b$ so, dass $X$ auf dem Intervall $(0, \tau)$ nicht verschwindet. Nach Voraussetzung ist dann auch $\operatorname{sn}_\kappa > 0$ auf $(0, \tau)$. Auf $(0, \tau)$ gilt $|X|' = |X|^{-1}\langle X, \nabla_{\partial_t} X\rangle$ und wegen der Jacobigleichung $\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X + R_{X,c'}c' = 0$ daher

$$\begin{aligned} |X|'' + \kappa|X| &= |X|^{-1}\big(|\nabla_{\partial_t} X|^2 + \langle X, \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} X\rangle\big) - |X|^{-3}\langle X, \nabla_{\partial_t} X\rangle^2 + \kappa|X| \\ &= |X|^{-1}\underbrace{\Big(\kappa|X|^2 - \langle R_{X,c'}c', X\rangle\Big)}_{\geq 0} + |X|^{-3}\underbrace{\Big(|X|^2|\nabla_{\partial_t} X|^2 - \langle X, \nabla_{\partial_t} X\rangle^2\Big)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Für die Abschätzungen haben wir die Cauchy–Schwarz Ungleichung, $K \leq \kappa$ sowie $X(t) \perp c'(t)$ verwendet, siehe Lemma III.5.17. Daraus erhalten wir

$$\big(|X|' \operatorname{sn}_\kappa - |X| \operatorname{cn}_\kappa\big)' = \big(|X|'' + \kappa|X|\big) \operatorname{sn}_\kappa \geq 0 \qquad \text{auf } (0, \tau).$$

Da $\lim_{t\to 0}\big(|X|' \operatorname{sn}_\kappa - |X| \operatorname{cn}_\kappa\big)(t) = 0$ folgt

$$|X|' \operatorname{sn}_\kappa - |X| \operatorname{cn}_\kappa \geq 0 \qquad \text{auf } (0,\tau),$$

und dann

$$\big(|X|/\operatorname{sn}_\kappa\big)' = \operatorname{sn}_\kappa^{-2}\big(|X|' \operatorname{sn}_\kappa - |X| \operatorname{cn}_\kappa\big) \geq 0 \qquad \text{auf } (0,\tau).$$

Somit ist $|X|/\operatorname{sn}_\kappa$ auf dem Intervall $(0,\tau)$ monoton wachsend. Da

$$\lim_{t\to 0}\big(|X|/\operatorname{sn}_\kappa\big)(t) = |(\nabla_{\partial_t} X)(0)|, \tag{III.85}$$

erhalten wir schließlich

$$|X(t)| \geq |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\kappa(t), \qquad t \in [0,\tau].$$

Daraus folgt nun auch, dass $X$ auf $(0,b)$ keine Nullstelle besitzen kann, die obigen Überlegungen bleiben daher für $\tau = b$ richtig. □

**III.6.11. Satz** (Rauch)**.** *Es sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\rho \leq K$, $\rho \in \mathbb{R}$. Weiters sei $c : [0,b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, sodass kein $t \in (0,b)$ konjugiert zu $0$ längs $c$ ist. Schließlich sei $X$ ein Jacobifeld längs $c$ mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \perp c'(0)$. Dann ist $|X|/\operatorname{sn}_\rho$ monoton fallend auf $(0,b)$ und*

$$|X(t)| \leq |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\rho(t), \qquad t \in [0,b].$$

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir $(\nabla_{\partial_t} X)(0) \neq 0$ annehmen, denn andernfalls gilt $X \equiv 0$. Sei nun $0 < \tau < b$ und $\tau < \pi/\sqrt{\rho}$ falls $\rho > 0$. Dann gilt $\operatorname{sn}_\rho > 0$ auf $(0,\tau]$. Auch besitzt $X$ auf $(0,\tau]$ keine Nullstelle, denn nach Voraussetzung ist kein $t \in (0,b)$ konjugiert zu $0$ längs $c$. Es bezeichne $I$ die Indexform von $c|_{[0,\tau]}$, vgl. Definition III.5.7. Nach Korollar III.5.29 ist $I$ positiv semidefinit, denn nach Voraussetzung ist kein $t \in (0,\tau)$ konjugiert zu $0$ längs $c$. Für jedes $Y \in \Gamma(c^*TM)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y(\tau) = X(\tau)$ folgt mittels Lemma III.5.15

$$\begin{aligned}
0 &\leq I(Y-X, Y-X)\\
&= I(Y,Y) - 2I(X,Y) + I(X,X)\\
&= I(Y,Y) - 2\langle \nabla_{\partial_t} X, Y\rangle\big|_0^\tau + \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle\big|_0^\tau\\
&= I(Y,Y) - \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(\tau).
\end{aligned}$$

Ist darüber hinaus $Y \perp c'$, dann liefert dies

$$\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(\tau) \leq I(Y,Y) = \int_0^\tau |\nabla_{\partial_t} Y|^2 - \langle R_{c',Y} Y, c'\rangle dt \leq \int_0^\tau |\nabla_{\partial_t} Y|^2 - \rho |Y|^2 dt.$$

Es bezeichne $Z$ das parallele Vektorfeld längs $c$ mit $Z(\tau) = X(\tau)$. Wenden wir obige Abschätzung auf $Y(t) := \operatorname{sn}_\rho(t) Z(t) / \operatorname{sn}_\rho(\tau)$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle(\tau) &\leq \frac{|X(\tau)|^2}{\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)} \int_0^\tau \operatorname{cn}_\rho^2(t) - \rho \operatorname{sn}_\rho^2(t) dt \\ &= \frac{|X(\tau)|^2}{\operatorname{sn}_\rho^2(\tau)} \big(\operatorname{sn}_\rho(t) \operatorname{cn}_\rho(t)\big)\Big|_0^\tau = \frac{|X(\tau)|^2 \operatorname{cn}_\rho(\tau)}{\operatorname{sn}_\rho(\tau)},\end{aligned}$$

denn $Y(0) = 0$, $Y(\tau) = X(\tau)$, $Y(t) \perp c'(t)$, $|Y(t)|^2 = \operatorname{sn}_\rho^2(t)|X(\tau)|^2 / \operatorname{sn}_\rho^2(\tau)$, $(\nabla_{\partial_t} Y)(t) = \operatorname{cn}_\rho(t) Z(t) / \operatorname{sn}_\rho(\tau)$ und $|(\nabla_{\partial_t} Y)(t)|^2 = \operatorname{cn}_\rho^2(t)|X(\tau)|^2 / \operatorname{sn}_\rho^2(\tau)$. Da $|X|' = |X|^{-1} \langle \nabla_{\partial_t} X, X\rangle$, folgt

$$\big(|X|' \operatorname{sn}_\rho - |X| \operatorname{cn}_\rho\big)(\tau) \leq 0$$

und somit

$$\big(|X| / \operatorname{sn}_\rho\big)'(\tau) = \operatorname{sn}_\rho^{-2}(\tau) \big(|X|' \operatorname{sn}_\rho - |X| \operatorname{cn}_\rho\big)(\tau) \leq 0.$$

Beachte, dass dies für alle kleineren $\tau$ richtig bleibt, es gilt daher

$$\big(|X| / \operatorname{sn}_\rho\big)' \leq 0 \qquad \text{auf } (0, \tau].$$

Somit ist $|X| / \operatorname{sn}_\rho$ auf dem Intervall $(0, \tau]$ monoton fallend. Zusammen mit (III.85) folgt

$$|X(t)| \leq |(\nabla_{\partial_t} X)(0)| \operatorname{sn}_\rho(t), \qquad t \in [0, \tau].$$

Da $X$ auf $(0, b)$ keine Nullstelle besitzt, sehen wir nun, dass auch $\operatorname{sn}_\rho$ auf $(0, b)$ nicht verschwinden kann. Obige Überlegungen bleiben daher für $\tau = b$ richtig. $\square$

**III.6.12. Korollar** (Rauch)**.** *Es sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\rho \leq K \leq \kappa$, $\rho, \kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $x \in M$, $\xi \in T_x M$, $|\xi| = 1$ und $t > 0$ so, dass $\exp_x(t\xi)$ definiert ist. Im Fall $\kappa > 0$ sei darüber hinaus $t \leq \pi / \sqrt{\kappa}$. Dann gilt für alle $0 \neq w \in \xi^\perp \subseteq T_x M$*

$$\frac{\operatorname{sn}_\kappa(t)}{t} \leq \frac{|T_{t\xi} \exp_x \cdot w|}{|w|} \leq \frac{\operatorname{sn}_\rho(t)}{t}. \tag{III.86}$$

Beweis. Nach Korollar III.5.21 ist $X(t) := T_{t\xi} \exp_x \cdot (tw)$ ein Jacobifeld längs der Geodäten $c(t) := \exp_x(t\xi)$ mit $X(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X)(0) = w$. Aus Satz III.6.10 erhalten wir die Abschätzung nach unten in (III.86). Diese bleibt für kleinere $t$ richtig und zeigt daher, dass kein $s \in (0, t)$ konjugiert zu $0$ längs $c$ ist, vgl. Korollar III.5.23. Somit ist Satz III.6.11 anwendbar und dieser liefert die Abschätzung nach oben in (III.86). $\square$

**III.7. Volumsvergleich.** Wir wollen in diesem Abschnitt das Volumen von Sphären und Bällen in $M$ mit dem Volumen von Sphären und Bällen in konstant gekrümmten Mannigfaltigkeiten vergleichen. Wir bezeichnen die sogenannten *Raumformen* mit

$$(\mathbb{M}^n_\kappa, g_\kappa) := \begin{cases} \text{runde Sphäre mit Schnittkrümmung } K = \kappa & \text{falls } \kappa > 0 \\ \text{Euklidische Ebene mit der Standardmetrik} & \text{falls } \kappa = 0 \\ \text{Hyperbolische Raum mit Schnittkrümmung } K = \kappa & \text{falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

**III.7.1. Bemerkung.** Es sei $x \in \mathbb{M}^n_\kappa$ und $\exp_x : T_xM \to \mathbb{M}^n_\kappa$ die Exponentialabbildung. Weiters sei $r > 0$ und $r < \pi/\sqrt{\kappa}$ falls $\kappa > 0$. Nach Korollar III.5.21 und Beispiel III.5.26 (oder Korollar III.6.12) haben wir

$$\big(\exp_x|_{S_r(0)}\big)^* g_\kappa = \frac{\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}{r^2} g_0, \tag{III.87}$$

wobei $g_0$ die von $g_\kappa$ auf $S_r(0) \subseteq T_xM$ induzierte Metrik bezeichnet. Die Sphäre $S_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}(x)$ ist daher zur Euklidischen Sphären mit Radius $\mathrm{sn}_\kappa(r)$ isometrisch, denn Multiplikation mit $\mathrm{sn}_\kappa(r)/r$ liefert einen Diffeomorphismus $\varphi : T_xM \to T_xM$ mit $\varphi(S_r(0)) = S_{\mathrm{sn}_\kappa(r)}(0)$ und $\varphi^* g_0 = \frac{\mathrm{sn}^2_\kappa(r)}{r^2} g_0$. Beachte, dass dies unabhängig vom Mittelpunkt $x \in \mathbb{M}^n_\kappa$ gilt. Für das Volumen der Sphären mit Radius $r$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$ folgt

$$\mathrm{Vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \mathrm{sn}^{n-1}_\kappa(r). \tag{III.88}$$

Mittels Lemma III.7.2 unten erhalten wir für das Volumen der abgeschlossenen Bälle mit Radius $r$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$,

$$\mathrm{Vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\kappa}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^r \mathrm{sn}^{n-1}_\kappa(\rho) d\rho. \tag{III.89}$$

**III.7.2. Lemma.** *Es sei $M$ eine orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit und $g$ eine Riemannsche Metrik auf $[a,b] \times M$. Für $t \in [a,b]$ bezeichne $M_t$ die Teilmannigfaltigkeit $\{t\} \times M \subseteq [a,b] \times M$ versehen mit der von $g$ induzierten Riemannschen Metrik. Weiters sei $|\partial_t| = 1$ und $\partial_t \perp M_t$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}\big([a,b] \times M\big) = \int_a^b \mathrm{Vol}(M_t) dt.$$

Beweis. Es bezeichne $\iota_t : M_t \to [a,b] \times M$ die kanonische Inklusion, $\iota_t(x) := (t,x)$. Bezeichnet $\mathrm{vol}_{[a,b]\times M}$ die Volumsform von $g$, dann gilt für die Volumsform von $M_t$,

$$\mathrm{vol}_{M_t} = \iota_t^* i_{\partial_t} \mathrm{vol}_{[a,b]\times M},$$

denn $|\partial_t| = 1$ und $\partial_t \perp M_t$. Aus dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\big([a,b]\times M\big) &= \int_{[a,b]\times M} \operatorname{vol}_{[a,b]\times M}\\ &= \int_a^b \Big(\int_{M_t} \iota_t^* i_{\partial_t} \operatorname{vol}_{[a,b]\times M}\Big)dt = \int_a^b \Big(\int_{M_t} \operatorname{vol}_{M_t}\Big)dt = \int_a^b \operatorname{Vol}(M_t)dt,\end{aligned}$$

wie behauptet. □

**III.7.3. Lemma.** *Es seien $g$ und $h$ zwei Riemannsche Metriken auf einer orientierten Mannigfaltigkeit $M$ mit $g \geq h$. Dann gilt für die assozierten Volumsformen* $\operatorname{vol}_g \geq \operatorname{vol}_h$*.*

Beweis. Es sei $x \in M$ und $A : T_xM \to T_xM$ eine orientierungsbewarende lineare Abbildung mit $h(X,Y) = g(AX,AY)$, $X,Y \in T_xM$. Nach Voraussetzung gilt $|AX|^2 = g(AX,AX) = h(X,X) \leq g(X,X) = |X|^2$. Somit sind alle Eigenwerte von $A$ betragsmäßig kleiner oder gleich 1 und damit $\det A \leq 1$. Ist $e_1,\dots,e_n$ eine positiv orientierte h-Orthonormalbasis, dann bildet $Ae_1,\dots,Ae_n$ eine positiv orientierte $g$-Orthonormalbasis und wir erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_h(e_1,\dots,e_n) = 1 = \operatorname{vol}_g(Ae_1,\dots,Ae_n)&\\ = \det(A)\operatorname{vol}_g(e_1,\dots,e_n) &\leq \operatorname{vol}_g(e_1,\dots,e_n),\end{aligned}$$

also $\operatorname{vol}_h \leq \operatorname{vol}_g$. □

**III.7.4. Korollar** (Günther)**.** *Es sei $M$ eine Riemannsche $n$-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $x \in M$ und $R > 0$, sodass die Exponentialabbildung $\exp_x : T_xM \to M$ auf dem Euklidischen Ball $B_R(0) \subseteq T_xM$ ein Diffeomorphismus ist, und $0 < r < R$. Für das Volumen der Sphäre bzw. des abgeschlossnen Balls in $M$ mit Radius $r$ und Mittelpunkt $x$ gilt dann, vgl.* (III.88) *bzw.* (III.89)*,*

$$\operatorname{vol}(S_r(x)) \geq \operatorname{vol}(S_r^{\mathbb{M}_\kappa^n}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{vol}(D_r(x)) \geq \operatorname{vol}(D_r^{\mathbb{M}_\kappa^n}).$$

Beweis. Es bezeichne $g$ die Riemannsche Metrik auf $M$. Für die Riemannmetrik $\tilde g := (\exp_x|_{S_r(0)})^* g$ auf $S_r(0) \subseteq T_xM$ gilt nach Korollar III.6.12

$$\tilde g \geq \frac{\operatorname{sn}_\kappa^2(r)}{r^2} g_0 =: \tilde g_\kappa,$$

wobei $g_0$ die von $g$ auf $T_xM$ induzierte Euklidische Metrik bezeichnet. Für die damit assozierten Volumsformen auf $S_r(0)$ folgt aus Lemma III.7.3

$$\operatorname{vol}_{\tilde g} \geq \operatorname{vol}_{\tilde g_\kappa}.$$

Nach Konstruktion ist $(S_r(0), \tilde g) \cong (S_r(x), g)$, und nach Bemerkung III.7.1 auch $(S_r(0), \tilde g_\kappa) \cong (S_r^{\mathbb{M}_\kappa^n}, g_\kappa)$. Wir erhalten somit

$$\operatorname{Vol}(S_r(x)) = \operatorname{Vol}(S_r(0), \tilde g) \geq \operatorname{Vol}(S_r(0), \tilde g_\kappa) = \operatorname{Vol}(S_r^{\mathbb{M}_\kappa^n}).$$

Die Abschätzung für das Volumen das abgeschlossenen Balls folgt nun aus Lemma III.7.2, denn das radiale Vektorfeld $\partial_r$ ist normiert und steht orthogonal auf $S_r(x)$. □

**III.7.5. Bemerkung.** Völlig analog lassen sich unter der Voraussetzung $\rho \leq K$ die Abschätzungen

$$\operatorname{vol}(S_r(x)) \leq \operatorname{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho}) \quad \text{und} \quad \operatorname{vol}(D_r(x)) \leq \operatorname{vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\rho}).$$

herleiten. Wir werden jedoch ein stärkeres Resultat zeigen, siehe Satz III.7.8 unten.

**III.7.6. Lemma.** *Es sei $f : (0, b) \to \mathbb{R}^+$ glatt und $\kappa \in \mathbb{R}$, sodass*

$$f'' + \kappa f \leq 0,$$

*$\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ und $\lim_{t\to 0} f'(t) = 1$. Dann hat $\operatorname{sn}_\kappa$ auf dem Intervall $(0, b)$ keine Nullstelle, dh. im Fall $\kappa > 0$ muss $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ gelten, $f/\operatorname{sn}_\kappa$ ist monoton fallend auf $(0, b)$ und $\lim_{t\to 0}(f/\operatorname{sn}_\kappa)(t) = 1$. Insbesondere gilt daher $f \leq \operatorname{sn}_\kappa$ auf $(0, b)$.*

Beweis. Aus $\operatorname{sn}_\kappa'' = -\kappa \operatorname{sn}_\kappa$ und $\operatorname{sn}_\kappa \geq 0$ erhalten wir

$$\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big)' = \big(f'' + \kappa f\big) \operatorname{sn}_\kappa \leq 0,$$

also ist $f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'$ monoton fallend. Da $\lim_{t\to 0}\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big)(t) = 0$, folgt

$$f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa' \leq 0 \qquad \text{auf } (0, b).$$

Sei nun $0 < \tau < b$ mit $\operatorname{sn}_\kappa|_{(0,\tau)} > 0$. Aus der vorangehenden Ungleichung folgt

$$\big(f/\operatorname{sn}_\kappa\big)' = \operatorname{sn}_\kappa^{-2}\big(f' \operatorname{sn}_\kappa - f \operatorname{sn}_\kappa'\big) \leq 0,$$

also ist $f/\operatorname{sn}_\kappa$ auf $(0, \tau)$ monoton fallend. Da auch

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\operatorname{sn}_\kappa(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{\operatorname{sn}_\kappa'(t)} = \lim_{t\to 0} f'(t) = 1,$$

erhalten wir $f/\operatorname{sn}_\kappa \leq 1$, dh. $f \leq \operatorname{sn}_\kappa$, auf $(0, \tau)$. Daraus folgt nun auch, dass $\operatorname{sn}_\kappa$ auf $(0, b)$ nicht verschwinden kann, denn $f$ wurde positiv vorausgesetzt. Somit bleiben obige Überlegungen für $\tau = b$ richtig und das Lemma ist bewiesen. □

**III.7.7. Lemma** (Heintze und Karcher)**.** *Es sei $M$ eine Riemannsche $n$-Mannigfaltigkeit, $c$ eine Geodäte in $M$ und $X_1, \dots, X_{n-1}$ Jacobifelder längs $c$ mit $X_i \perp c'$ und $X_i(0) = 0$. Dann genügt die Funktion*

$$f(t) := \operatorname{vol}\big(c'(t), X_1(t), \dots, X_{n-1}(t)\big)^{1/(n-1)}$$

*der Differentialungleichung*

$$f'' + \frac{\operatorname{Ric}(c', c')}{n-1} f \leq 0,$$

*auf jedem Intervall der Form $(0, b)$ auf dem $f$ definiert und positiv ist.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [**20**, Beweis von Theorem III.4.3], siehe auch [**21**, Section 7.1] oder Es sei $b > 0$ so, dass $f$ auf $(0, b)$ positiv ist. Auf diesem Intervall sind die Jacobifelder $X_i$ daher linear unabhängig. Da $\nabla_{\partial_t} X_i$ normal auf $c$ steht, können wir eine Kurve von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen $\Lambda(t)$ wie folgt definieren $\nabla_{\partial_t} X_i = \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_i^j X_j$. Dann gilt

$$f' = \frac{f}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\operatorname{vol}(c', X_1, \dots, \nabla_{\partial_t} X_i, \dots, X_{n-1})}{\operatorname{vol}(c', X_1, \dots, X_{n-1})} = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)}{n-1} f,$$

und somit

$$f'' = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)'}{n-1} f + \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)^2}{(n-1)^2} f.$$

Wir definieren eine weitere Kurve von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen $\mathcal{R}(t)$ durch $R_{X_i, c'} c' = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{R}_i^j X_j$. Beachte $\operatorname{tr}(\mathcal{R}) = \operatorname{Ric}(c', c')$. Aus der Jacobigleichung für $X_i$ erhalten wir

$$\Lambda' + \Lambda^2 + \mathcal{R} = 0.$$

Anwenden der Spur liefert

$$\operatorname{tr}(\Lambda)' + \operatorname{tr}(\Lambda^2) + \operatorname{Ric}(c', c') = 0,$$

und daher

$$f'' + \frac{\operatorname{Ric}(c', c')}{n-1} f = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda)^2 - (n-1) \operatorname{tr}(\Lambda^2)}{(n-1)^2} f. \tag{III.90}$$

Beachte, dass $\operatorname{tr}(A^* B)$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der Matrizen definiert, die Cauchy–Schwarz Ungleichung lautet $\operatorname{tr}(A^* B)^2 \leq \operatorname{tr}(A^* A) \operatorname{tr}(B^* B)$. Ist $A$ die Einheitsmatrix so erhalten wir

$$\operatorname{tr}(B)^2 \leq (n-1) \operatorname{tr}(B^* B). \tag{III.91}$$

Wir werden unten zeigen, dass zu jedem $t \in (0, b)$ eine invertierbare Matrix $S$ existiert, sodass $S^{-1} \Lambda(t) S$ symmetrisch ist. Da die rechte Seite von (III.90) invariant unter Konjugation ist, folgt der Satz dann durch Kombination von (III.90) mit (III.91).

Aufgrund der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors gilt

$$\begin{aligned}\big(\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j \rangle\big)' &= \langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_t} X_j \rangle \\ &= -\langle R_{X_i, c'} c', X_j \rangle + \langle X_i, R_{X_j, c'} c' \rangle = 0,\end{aligned}$$

also ist der Ausdruck $\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j \rangle$ konstant. Da $X_i(0) = 0$, folgt

$$\langle \nabla_{\partial_t} X_i, X_j \rangle = \langle X_i, \nabla_{\partial_t} X_j \rangle. \tag{III.92}$$

Sei nun $t \in (0, b)$ fix und $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $c'(t)^\perp$. Weiters bezeichne $G$ die durch $X_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} G_i^j Z_j$ definierte $(n-1) \times (n-1)$ Matrix. Aus (III.92) folgt $\Lambda(t) G G^* = G G^* \Lambda(t)^*$, für die symmetrische Matrix $S := (G G^*)^{1/2}$ gilt daher $S^{-1} \Lambda(t) S = (S^{-1} \Lambda(t) S)^*$. $\square$

**III.7.8. Satz** (Bishop). *Es sei $M$ eine Riemannsche $n$-Mannigfaltigkeit mit Riccikrümmung* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\rho$. *Weiters sei $x \in M$ und $R > 0$, sodass die Exponentialabbildung* $\exp_x : T_xM \to M$ *auf dem Euklidischen Ball $B_R(0) \subseteq T_xM$ ein Diffeomorphismus ist. Für das Volumen der Sphäre bzw. des abgeschlossnen Balls in $M$ mit Radius* $0 < r < R$ *und Mittelpunkt $x$ gilt dann, vgl.* (III.88) *bzw.* (III.89),

$$\mathrm{vol}(S_r(x)) \leq \mathrm{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{vol}(D_r(x)) \leq \mathrm{vol}(D_r^{\mathbb{M}^n_\rho}).$$

Beweis. Es sei $\xi \in T_xM$ mit $|\xi| = 1$ und $w_1, \ldots, w_{n-1}$ eine positiv positiv orientierte Orthonormalbasis von $\xi^\perp \subseteq T_xM$. Dann ist $c(t) := \exp_x(t\xi)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $X_i(t) := T_{t\xi}\exp_x \cdot tw_i$ Jacobifelder längs $c$ mit $X_i(0) = 0$ und $(\nabla_{\partial_t} X_i)(0) = w_i$. Solange

$$f(t) := \mathrm{vol}(c'(t), X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t))^{1/(n-1)}$$

positiv ist gilt nach Lemma III.7.7 und der Abschätzung für die Riccikrümmung

$$f'' + \rho f \leq f'' + \frac{\mathrm{Ric}(c', c')}{n-1} f \leq 0.$$

Weiters ist $f(0) = 0$ und $\lim_{t\to 0} f'(t) = 1$. Aus Lemma III.7.6 folgt daher $f \leq \mathrm{sn}_\rho$.

Betrachte nun die beiden Metrik $\tilde{g} := (\exp_x^M)^* g$ und $\tilde{g}_\rho := \big(\exp_x^{\mathbb{M}^n_\rho}\big)^* g_\rho$ auf $T_xM = T_x\mathbb{M}^n_\rho$. Nach obigen Betrachtungen folgt $\mathrm{vol}_{\tilde{g}}^{S_r(0)} \leq \mathrm{vol}_{\tilde{g}_\rho}^{S_r(0)}$ für die induzierten Volumsformen auf den Euklidischen Sphären $S_r(0) \subseteq T_xM$. Mittels Integration erhalten wir $\mathrm{vol}(S_r^M(x)) \leq \mathrm{vol}(S_r^{\mathbb{M}^n_\rho})$ und aus Lemma III.7.2 dann auch die zweite Abschätzung. $\square$

**III.8. Distanzvergleich.** In diesem Abschnitt werden wir zwei Versionen des Satzes von Toponogov beweisen, siehe Satz III.8.11 und Korollar III.8.12 unten. Diese Resultate vergleichen Seitenlängen und Winkel von Dreiecken in $M$ mit entsprechenden Seitenlängen und Winkeln von Vergleichsdreiecken in den konstant gekrümmten Raumformen $\mathbb{M}^n_\kappa$ unter der Voraussetzung, dass die Schnittkrümmung von $M$ nach unten durch $\kappa$ beschränkt ist. Der Beweis den wir hier wiedergeben werden geht auf Karcher zurück, siehe [**22**] oder [**19**, Section 11.2].

Unter einem *Dreieck in $M$* verstehen wir drei Punkte die durch drei minmale Geodäten miteinander verbunden sind. Unter einem *Vergleichsdreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$* verstehen wir jedes Dreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$, das die gleichen Seitenlängen besitzt. Unter einem *Gelenk in $M$* verstehen wir drei Punkte $A, C, B$ zusammen mit zwei minimalen Geodäten (den Schenkeln) von $C$ nach $A$ bzw. $B$. Unter dem Winkel eines Gelenks verstehen wir den Winkel den die beiden Schenkel bei $C$ einschließen. Unter einem *Vergleichsgelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$* verstehen wir jedes Gelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$, das den gleichen Winkel einschließt und die gleichen Schenkellängen besitzt.

**III.8.1. Lemma** (Existenz von Vergleichsdreiecken und Gelenken). *Es sei $M$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$,*

$\kappa \in \mathbb{R}$. *Dann existiert zu jedem Dreieck in $M$ ein Vergleichsdreieck in $\mathbb{M}^n_\kappa$, und zu jedem Gelenk in $M$ existiert ein Vergleichsgelenk in $\mathbb{M}^n_\kappa$.*

Beweis. Betrachte ein Gelenk in $M$ mit Eckpunkten $A, B, C$, Schenkellängen $a$, $b$ und Winkel $\gamma$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\tilde{C} \in \mathbb{M}^n_\kappa$ und zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ die bei $\tilde{C}$ einen Winkel $\gamma$ einschließen, dh. $\langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{\beta}'(0)\rangle = \cos\gamma$. Setzen wir $\tilde{A} := \tilde{\beta}(b)$ und $\tilde{B} := \tilde{\alpha}(a)$, dann bilden die drei Punkte $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B}$ zusammen mit diesen Geodäten das gesuchte Vergleichsgelenk, denn

$$d(\tilde{C}, \tilde{A}) = b \quad \text{und} \quad d(\tilde{C}, \tilde{B}) = a.$$

Für $\kappa \leq 0$ sind die letzten beiden Relationen offensichtlich, da jede Geodäte in $\mathbb{M}^n_\kappa$ minimal ist. Im Fall $\kappa > 0$ folgen sie aus dem Satz von Myers, siehe Satz III.5.11, denn dieser impliziert $a, b \leq \operatorname{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa} = \operatorname{diam}(\mathbb{M}^n_\kappa)$.

Um auch die Existenz von Vergleichsdreiecken zu zeigen, seien nun $A, B, C$ die drei Eckpunkte eines Dreiecks in $M$ mit Seitenlängen $a$, $b$, $c$ und o.B.d.A. $a \geq b$. Wie im ersten Teil des Beweises erhalten wir zwei Punkte $\tilde{C}$ und $\tilde{B}$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$ mit $d(\tilde{C}, \tilde{B}) = a$, wobei im Fall $\kappa > 0$ wieder der Satz von Myers eingeht. Es bezeichne $S \subseteq \mathbb{M}^n_\kappa$ die Sphäre mit Mittelpunkt $\tilde{C}$ und Radius $b$. Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass $\tilde{A} \in S$ mit $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = c$ existiert. Da $a \geq b$ schneidet $S$ die minimale Geodäte von $\tilde{B}$ nach $\tilde{C}$, wir erhalten somit Punkte auf $S$, die von $\tilde{B}$ einen Abstand kleiner als $c$ haben, denn die drei Seitenlängen genügen der Dreiecksungleichung,

$$a = d(C, B) \leq d(C, A) + d(A, B) = b + c.$$

Aus Satz III.8.11 unten folgt, dass es auf $S$ auch Punkte gibt, die von $\tilde{B}$ eine Abstand größer als $c$ haben. Aus Stetigkeitsgründen muss es daher auch einen Punkt $\tilde{A} \in S$ geben, der $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = c$ erfüllt. □

**III.8.2. Bemerkung.** Vergleichsgelenke sind im wesentlichen eindeutig, dh. je zwei Gelenke in $\mathbb{M}^n_\kappa$ mit gleichem Winkel und gleichen Schenkellängen können durch eine Isometrie von $\mathbb{M}^n_\kappa$ aufeinander abgebildet werden. Für Vergleichsdreiecke ist die Situation ein wenig komplizierter. Zu zwei Dreiecken mit gleichen Seitenlägen in $\mathbb{M}^n_\kappa$ existiert zwar eine Isometrie, die die Eckpunkte aufeinander abbildet, ist jedoch $\kappa > 0$ und ist eine Seitelänge gleich $\pi/\sqrt{\kappa}$, dann kann die Isometrie im allgemeinen nicht so gewählt werden, dass auch alle Seiten aufeinander abgebildet werden.

Es wird sich als hilfreich erweisen die Distanz mit folgender Funktion zu modifizieren:

$$\operatorname{md}_\kappa(r) := \int_0^r \operatorname{sn}_\kappa(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}\big(1 - \operatorname{cn}_\kappa(r)\big) & \text{falls } \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2}r^2 & \text{falls } \kappa = 0. \end{cases} \tag{III.93}$$

Beachte die offensichtlichen Relationen

$$\operatorname{md}_\kappa' = \operatorname{sn}_\kappa \quad \text{und} \quad \operatorname{md}_\kappa'' + \kappa \operatorname{md}_\kappa = \operatorname{cn}_\kappa + \kappa \operatorname{md}_\kappa = 1. \tag{III.94}$$

**III.8.3. Proposition** (Kosinussatz)**.** *Sind $a$, $b$, $c$ die Seitenlängen eines Dreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$ und bezeichnet $\gamma$ den der Seite $c$ gegenüberliegenden Winkel, dann gilt*

$$\mathrm{md}_\kappa(c) = \mathrm{md}_\kappa(a-b) + \mathrm{sn}_\kappa(a)\,\mathrm{sn}_\kappa(b)\big(1-\cos\gamma\big). \tag{III.95}$$

*In anderen Worten,*

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ \cos(\sqrt{\kappa}c) &= \cos(\sqrt{\kappa}a)\cos(\sqrt{\kappa}b) + \sin(\sqrt{\kappa}a)\sin(\sqrt{\kappa}b)\cos\gamma \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}c) &= \cosh(\sqrt{|\kappa|}a)\cosh(\sqrt{|\kappa|}b) - \sinh(\sqrt{|\kappa|}a)\sinh(\sqrt{|\kappa|}b)\cos\gamma \end{aligned} \tag{III.96}$$

*in den Fällen $\kappa = 0$, $\kappa > 0$ bzw. $\kappa < 0$.*

Beweis. Es bezeichnen $A$, $B$ und $C$ die Eckpunkte des Dreiecks, die den Seiten $a$, $b$, $c$ gegenüber liegen. Weiters sei $r : \mathbb{M}^n_\kappa \to \mathbb{R}$, $r(x) := d(A,x)$ und

$$f : \mathbb{M}^n_\kappa \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \mathrm{md}_\kappa(r(x)) = \mathrm{md}_\kappa(d(A,x)).$$

Beachte, dass $f$ auf ganz $\mathbb{M}^n_\kappa$ glatt ist. Es gilt

$$df = (\mathrm{md}'_\kappa \circ r)dr = (\mathrm{sn}_\kappa \circ r)dr \tag{III.97}$$

und daher, siehe auch (III.94),

$$\begin{aligned} H(f) = \nabla df = \nabla\big((\mathrm{sn}_\kappa \circ r)dr\big) &= (\mathrm{sn}_\kappa \circ r)\nabla dr + (\mathrm{cn}_\kappa \circ r)dr \otimes dr \\ &= (\mathrm{sn}_\kappa \circ r)H(r) + (\mathrm{cn}_\kappa \circ r)dr\otimes dr = (\mathrm{cn}_\kappa \circ r)g = (1-\kappa f)g. \end{aligned} \tag{III.98}$$

Dabei haben wir

$$H(r) = \frac{\mathrm{cn}_\kappa \circ r}{\mathrm{sn}_\kappa \circ r}\big(g - dr \otimes dr\big)$$

verwendet, was sofort aus Proposition III.6.1 und Beispiel III.5.26 folgt.

Sei nun $\sigma$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte, $|\sigma'| = 1$, von $\sigma(0) = C$ nach $\sigma(a) = B$. Die Funktion

$$\varphi(t) := f(\sigma(t)) = \mathrm{md}_\kappa(d(A,\sigma(t)))$$

erfüllt $\varphi' = df(\sigma')$ und wegen (III.98) auch

$$\begin{aligned} \varphi'' &= (\nabla df)(\sigma',\sigma') - df(\nabla_{\partial_t}\sigma') \\ &= H(f)(\sigma',\sigma') = \big(1-\kappa(f\circ\sigma)\big)g(\sigma',\sigma') = 1-\kappa\varphi, \end{aligned}$$

denn $\nabla_{\partial_t}\sigma' = 0$ und $|\sigma'| = 1$. Dieses $\varphi$ genügt daher der Differentialgleichung

$$\varphi'' + \kappa\varphi = 1.$$

Nach (III.94) stellt $\mathrm{md}_\kappa$ eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung dar. Da $\mathrm{sn}_\kappa$ und $\mathrm{cn}_\kappa$ eine Basis der Lösungen des homogenen Systems $\varphi''+\kappa\varphi = 0$ bilden, muss $\varphi$ die Gestalt

$$\varphi(t) = \mathrm{md}_\kappa(t) + C_0\,\mathrm{cn}_\kappa(t) + C_1\,\mathrm{sn}_\kappa(t)$$

haben, mit Integrationskonstanten

$$C_0 = \varphi(0) = \mathrm{md}_\kappa(d(A,\sigma(0))) = \mathrm{md}_\kappa(d(A,C)) = \mathrm{md}_\kappa(b)$$

und, siehe (III.97),

$$\begin{aligned} C_1 = \varphi'(0) = df(\sigma'(0)) = \operatorname{sn}_\kappa(r(\sigma(0)))dr(\sigma'(0)) = \operatorname{sn}_\kappa(b)dr(\sigma'(0)) \\ = \operatorname{sn}_\kappa(b)\langle\nabla r, \sigma'(0)\rangle = \operatorname{sn}_\kappa(b)|\nabla r||\sigma'(0)|\cos(\pi-\gamma) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma. \end{aligned}$$

Da $\varphi(a) = \operatorname{md}_\kappa(d(A,\sigma(a))) = \operatorname{md}_\kappa(d(A,B)) = \operatorname{md}_\kappa(c)$ erhalten wir somit

$$\operatorname{md}_\kappa(c) = \operatorname{md}_\kappa(a) + \operatorname{cn}_\kappa(a)\operatorname{md}_\kappa(b) - \operatorname{sn}_\kappa(a)\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma \tag{III.99}$$

Mit (III.93) folgt daraus sofort (III.96). Kombinieren wir (III.99) mit

$$\operatorname{md}_\kappa(a-b) = \operatorname{md}_\kappa(a) + \operatorname{cn}_\kappa(a)\operatorname{md}_\kappa(b) - \operatorname{sn}_\kappa(a)\operatorname{sn}_\kappa(b) \tag{III.100}$$

dann folgt auch (III.95). Um die letzte Gleichung zu verifizieren genügt es zu beobachten, dass die Funktion $a \mapsto \operatorname{md}_\kappa(a-b) - \operatorname{md}_\kappa(a)$ der Differentialgleichung $\varphi'' + \kappa\varphi = 0$ genügt und daher von der Form $a \mapsto D_0 \operatorname{cn}_\kappa(a) + D_1 \operatorname{sn}_\kappa(a)$ sein muss. Betrachten wir Wert und Ableitung bei $a = 0$ erhalten wir $D_0 = \operatorname{md}_\kappa(-b) = \operatorname{md}_\kappa(b)$ und $D_1 = \operatorname{sn}_\kappa(-b) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)$, also (III.100). □

**III.8.4. Definition** ([**19**, Section 9.3])**.** Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $x \in M$ und $B \in S^2T_x^*M$ eine symmetrische Bilinearform. Wir schreiben $H(f)(x) \geq B$ *im Sinn der Träger,* falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lokal um $x$ definierte glatte Funktion $f_\varepsilon$ existiert für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(a) $f_\varepsilon(x) = f(x)$
(b) $f_\varepsilon \leq f$ in einer Umgebung von $x$
(c) $H(f_\varepsilon)(x) \geq B - \varepsilon g_x$
Analog schreiben wir $H(f) \leq B$ falls $H(-f) \geq -B$.

**III.8.5. Bemerkung.** Ist $H(f)(x) \geq B$ im Sinn der Träger, und $\lambda > 0$, dann gilt auch $H(\lambda f)(x) \geq \lambda B$ im Sinn der Träger. Gilt $H(f_1)(x) \geq B_1$ und $H(f_2)(x) \geq B_2$ im Sinn der Träger, dann auch $H(f_1 + f_2)(x) \geq B_1 + B_2$.

**III.8.6. Bemerkung.** Ist $f$ eine $C^2$ Funktion, und bezeichnet $B$ die Hessesche von $f$ bei $x$, dann gilt $B \leq H(f)(x) \leq B$ im Sinn der Träger.

**III.8.7. Lemma.** *Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, $B \in \Gamma(S^2T^*M)$ und $H(f) \geq B$ im Sinn der Träger, dh. $H(f)(x) \geq B(x)$, für alle $x \in M$. Für jede Geodäte $\sigma$ in $M$ gilt dann $(f \circ \sigma)'' \geq B(\sigma', \sigma')$ im Sinn der Träger.*

Beweis. Sind $f_\varepsilon$ wie in Definition III.8.4, dann gilt

$$\begin{aligned} (f_\varepsilon \circ \sigma)'' = \nabla_{\partial_t}(df_\varepsilon(\sigma')) = (\nabla df_\varepsilon)(\sigma', \sigma') - df_\varepsilon(\nabla_{\partial_t}\sigma') \\ = H(f_\varepsilon)(\sigma', \sigma') \geq B(\sigma', \sigma') - \varepsilon|\sigma'|^2, \end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen die Geodätengleichung $\nabla_{\partial_t}\sigma' = 0$ eingegangen ist. Dies zeigt, dass $f_\varepsilon \circ \sigma$ geeignete Trägerfunktionen für $f \circ \sigma$ bilden. □

**III.8.8. Bemerkung.** Ist $f : M \to \mathbb{R}$ stetig und $H(f) \geq 0$ im Sinn der Träger, dann ist $f$ konvex, dh. konvex entlang jeder Geodäten in $M$. Dies folgt aus Lemma III.8.7, denn eine stetige Funktion $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die $\psi'' \geq 0$ im Sinn der Träger gilt, muss konvex sein.

**III.8.9. Lemma.** *Es sei* $\psi : [0, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $\psi'' + \kappa\psi \geq 0$ *im Sinn der Träger,* $\kappa \in \mathbb{R}$. *Ist* $\kappa > 0$ *dann setzen wir auch* $b \leq \pi/\sqrt{\kappa}$ *voraus. Weiters sei* $\psi(0) = 0$ *und es existiere* $\psi'(0) \geq 0$. *Dann gilt* $\psi \geq 0$ *auf ganz* $[0, b]$.

Beweis. Wir gehen indirekt vor und nehmen an es existiert $0 < b_0 < b$ mit $\psi(b_0) < 0$. Durch Addition eines kleinen positiven Vielfachen von $\mathrm{md}_\kappa$ dürfen wir o.B.d.A. $\psi'' + \kappa\psi > 0$ voraussetzen, denn $\mathrm{md}_\kappa'' + \kappa \,\mathrm{md}_\kappa = 1$ und $\mathrm{md}_\kappa(0) = 0 = \mathrm{md}_\kappa'(0)$. Durch Addition eines kleinen positiven Vielfachen von $\mathrm{sn}_\kappa$ können wir weiters $\psi'(0) > 0$ erreichen, denn $\mathrm{sn}_\kappa'' + \kappa \,\mathrm{sn}_\kappa = 0$, $\mathrm{sn}_\kappa(0) = 0$ und $\mathrm{sn}_\kappa'(0) = 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$ so, dass die Funktion $s(t) := \mathrm{sn}_\kappa(t + \varepsilon)$ auf $[0, b_0]$ strikt positiv ist, etwa $\varepsilon := (b - b_0)/2$. Dann gilt $(\psi/s)'(0) = \psi'(0)/s(0) > 0$ und daher

$$(\psi/s)(t) > (\psi/s)(0) \geq 0,$$

für hinreichend kleine $t > 0$. Da $\psi(b_0) < 0$, existiert eine Stelle $t_0 \in (0, b_0)$ bei der die Funktion $\psi/s$ ein lokales Maximum besitzt und $\psi(t_0) > 0$ gilt.

Da $\psi'' + \kappa\psi > 0$ im Sinn der Träger, existiert eine glatte Funktion $\phi$ mit $\phi \leq \psi$ in einer Umgebung von $t_0$, $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ und

$$\phi''(t_0) + \kappa\psi(t_0) > 0. \tag{III.101}$$

Auch die Funktion $\phi/s$ besitzt bei $t_0$ ein lokales Maximum, denn $\phi(t)/s(t) \leq \psi(t)/s(t) \leq \psi(t_0)/s(t_0) = \phi(t_0)/s(t_0)$, für $t$ hinreichend nahe bei $t_0$. Somit gilt $(\phi/s)'(t_0) = 0$ und wegen $s'' + \kappa s = 0$ auch

$$0 \geq (\phi/s)''(t_0) = \frac{\phi'' s - \phi s''}{s^2}(t_0) = \frac{\phi'' + \kappa\phi}{s}(t_0),$$

ein Widerspruch zu (III.101). Somit kann $\psi$ auf $[0, b]$ keine negativen Werte annehmen. Im letzten Schritt sind wir [**19**, Section 11.2, Seite 345] gefolgt. □

**III.8.10. Lemma.** *Es sei* $M$ *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung* $K \geq \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. *Weiters sei* $A \in M$, $r(x) := d(A, x)$ *und*

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \mathrm{md}_\kappa(r(x)) = \mathrm{md}_\kappa(d(A, x)).$$

*Dann gilt* $H(f) \leq (1 - \kappa f)g$ *auf ganz* $M$ *im Sinne der Träger.*

Beweis. Es ist also $H(f)(x) \leq (1 - \kappa f(x))g_x$ zu zeigen, für jedes $x \in M$. O.B.d.A. dürfen wir $x \neq A$ annehmen, denn $f(A) = 0$ und $H(f)(A) = 0$. Wir wählen eine nach Bogenlänge parametrisierte minimale Geodäte $\sigma : [0, \rho] \to M$ von $\sigma(0) = A$ nach $\sigma(\rho) = x$, dh. $\rho = r(x) = d(A, x) > 0$. Wir setzen zunächst voraus, dass die Distanzfunktion $r$ bei $x$ glatt ist. Beachte, dass im Fall $\kappa > 0$ nach dem Satz von Myers, siehe Satz III.5.11, auch $\rho < \mathrm{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\kappa}$

gilt. Ist $X$ ein Jacobifeld längs $\sigma$, dass orthogonal auf $\sigma$ steht, dann folgt aus Proposition III.6.1

$$H(r)\big(X(t),X(t)\big)=\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t).$$

Weiters ist $df=d(\mathrm{md}_\kappa\circ r)=(\mathrm{md}_\kappa'\circ r)dr=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)dr$, also $H(f)=\nabla(df)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r)H(r)+(\mathrm{sn}_\kappa'\circ r)dr\otimes dr$ und somit

$$H(f)\big(X(t),X(t)\big)=\mathrm{sn}_\kappa(t)\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t),$$

denn $dr(X)=\langle\operatorname{grad}r,X\rangle=\langle\sigma',X\rangle=0$. Im Beweis von Satz III.6.11 haben wir die Abschätzung

$$\langle\nabla_{\partial_t}X,X\rangle(t)\leq\frac{\mathrm{cn}_\kappa(t)}{\mathrm{sn}_\kappa(t)}|X(t)|^2$$

hergeleitet, wir erhalten somit

$$H(f)\big(X(t),X(t)\big)\leq\mathrm{cn}_\kappa(t)|X(t)|^2. \tag{III.102}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}H(f)(\sigma'(t),-)=\nabla_{\partial_t}df=\nabla_{\partial_t}(\mathrm{sn}_\kappa(t)dr)&\\ =\mathrm{sn}_\kappa'(t)dr+\mathrm{sn}_\kappa(t)\nabla_{\partial_t}dr&=\mathrm{cn}_\kappa(t)g(\sigma'(t),-)\end{aligned}$$

denn $\sigma'(t)=\operatorname{grad}_{\sigma(t)}(r)$ und $\nabla_{\partial_t}dr=0$ da $\nabla_{\partial_t}\sigma'=0$. Zusammen mit (III.102) erhalten wir

$$H(f)_x(w,w)\leq\mathrm{cn}_\kappa(r(x))|w|^2=(1-\kappa f(x))|w|^2,$$

für alle $w\in T_xM$, siehe auch (III.94).

Ist die Distanzfunktion $r$ bei $x$ nicht glatt, dann betrachten wir zu jedem $0<\varepsilon<r(x)$ die Funktion $r_\varepsilon:M\to\mathbb{R}$, $r_\varepsilon(y):=\varepsilon+d(\sigma(\varepsilon),y)$. Dann gilt $r_\varepsilon(x)=r(x)$, und wegen der Dreiecksungleichung auch $r\leq r_\varepsilon$ auf ganz $M$. Darüberhinaus ist $r_\varepsilon$ in einer Umgebung von $x$ glatt. Betrachten wir nun $f_\varepsilon(y):=\mathrm{md}_\kappa(r_\varepsilon(y))=\mathrm{md}_\kappa(\varepsilon+d(\sigma(\varepsilon),y))$, dann ist $f_\varepsilon$ in einer Umgebung von $x$ glatt, es gilt $f_\varepsilon(x)=f(x)$ und $f\leq f_\varepsilon$ in einer Umgebung von $x$ wegen der Monotonie von $\mathrm{md}_\kappa$. Um die Hessesche von $f_\varepsilon$ abzuschätzen, betrachten wir $\tilde r_\varepsilon(y):=d(\sigma(\varepsilon),y)$ und $\tilde f_\varepsilon(y):=\mathrm{md}_\kappa(\tilde r_\varepsilon(y))=\mathrm{md}_\kappa(d(\sigma(\varepsilon),y))$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$H(\tilde f_\varepsilon)(x)\leq(1-\kappa\tilde f_\varepsilon(x))g_x,$$

denn $\tilde r_\varepsilon$ ist bei $x$ glatt. Weiters gilt

$$H(f_\varepsilon)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ r_\varepsilon)H(r_\varepsilon)+(\mathrm{cn}_\kappa\circ r_\varepsilon)dr_\varepsilon\otimes dr_\varepsilon$$

und analog

$$H(\tilde f_\varepsilon)=(\mathrm{sn}_\kappa\circ\tilde r_\varepsilon)H(\tilde r_\varepsilon)+(\mathrm{cn}_\kappa\circ\tilde r_\varepsilon)d\tilde r_\varepsilon\otimes d\tilde r_\varepsilon.$$

Da sich $r_\varepsilon$ und $\tilde{r}_\varepsilon$ nur um eine Konstante unterscheiden ist $dr_\varepsilon = d\tilde{r}_\varepsilon$ und $H(r_\varepsilon) = H(\tilde{r}_\varepsilon)$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
H(f_\varepsilon)(x) &= \frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))} H(\tilde{f}_\varepsilon)(x) \\
&\qquad + \Big(\operatorname{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\operatorname{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x \\
&\le \frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\big(1 - \kappa \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\
&\qquad + \Big(\operatorname{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\operatorname{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x \\
&= \big(1 - \kappa f(x)\big) g_x + \kappa\big(f(x) - \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\
&\qquad + \Big(\frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))} - 1\Big)\big(1 - \kappa \tilde{f}_\varepsilon(x)\big) g_x \\
&\qquad + \Big(\operatorname{cn}_\kappa(r_\varepsilon(x)) - \frac{\operatorname{sn}_\kappa(r_\varepsilon(x))}{\operatorname{sn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))}\operatorname{cn}_\kappa(\tilde{r}_\varepsilon(x))\Big)(d\tilde{r}_\varepsilon \otimes d\tilde{r}_\varepsilon)_x
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren alle bis auf den ersten Term gegen Null, und wir erhalten $H(f)(x) \le (1 - \kappa f(x)) g_x$ im Sinn der Träger, bei jedem $x \in M$. □

**III.8.11. Satz** (Toponogov, Gelenkversion)**.** *Es sei $M$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \ge \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Bezeichnen $A, C, B$ die Eckpunkte eines Gelenks in $M$ und $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B}$ die Eckpunkte eines Vergleichsgelenks in $\mathbb{M}^n_\kappa$, dann gilt $d(A, B) \le d(\tilde{A}, \tilde{B})$.*

Beweis. Es sei $\sigma$ nach Bogenlänge parametriesierte Geodäte in $M$, $|\sigma'| = 1$, von $\sigma(0) = C$ nach $\sigma(a) = B$, und

$$\varphi(t) := \operatorname{md}_\kappa(d(A, \sigma(t))).$$

Analog sei $\tilde{\sigma}$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte in $\mathbb{M}^n_\kappa$, $|\tilde{\sigma}'| = 1$ von $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{C}$ nach $\tilde{\sigma}(a) = \tilde{B}$, und

$$\tilde{\varphi}(t) := \operatorname{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{\sigma}(t))).$$

Es genügt zu zeigen, dass die Differenz

$$\psi(t) := \tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)$$

nicht negativ wird, denn dann folgt $0 \le \psi(a) = \tilde{\varphi}(a) - \varphi(a) = \operatorname{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{\sigma}(a))) - \operatorname{md}_\kappa(d(A, \sigma(a))) = \operatorname{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{B})) - \operatorname{md}_\kappa(d(A, B))$, und dann $d(A, B) \le d(\tilde{A}, \tilde{B})$ wegen der Monotonie von $\operatorname{md}_\kappa$.

Im Beweis von Proposition III.8.3 haben wir $\tilde{\varphi}'' + \kappa\tilde{\varphi} = 1$ gezeigt. Aus Lemma III.8.10 und Lemma III.8.7 folgt $\varphi'' + \kappa\varphi \le 1$ im Sinn der Träger. Für die Differenz $\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$ erhalten wir daher, vgl. Bemerkung III.8.5,

$$\psi'' + \kappa\psi \ge 0 \quad \text{im Sinn der Träger.}$$

Weiters gilt

$$\psi(0) = \tilde{\varphi}(0) - \varphi(0) = \mathrm{md}_\kappa(d(\tilde{A}, \tilde{C})) - \mathrm{md}_\kappa(d(A, C)) = 0$$

und, wie im Beweis von Proposition III.8.3,

$$\psi'(0) = \tilde{\varphi}'(0) - \varphi'(0) = -\operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma + \operatorname{sn}_\kappa(b)\cos\gamma = 0. \tag{III.103}$$

Der Satz folgt nun aus Lemma III.8.9. Die Relation (III.103) gilt zunächst nur, falls $\varphi$ und $\tilde{\varphi}$ bei 0 glatt sind. Im allgemeinen Fall können wir durch eine kleine Modifikation von $A$ erreichen, dass dies zutrifft, der Satz folgt dann aus Stetigkeitsgründen. □

**III.8.12. Korollar** (Toponogov, Dreiecksversion)**.** *Es sei $M$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$. Betrachten wir ein beliebiges Dreieck in $M$, dann sind seine inneren Winkel mindestens so gross wie die entsprechenden inneren Winkel jedes Vergleichsdreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$.*

Beweis. Es bezeichnen $A$, $B$, $C$ die Eckpunkte eines Dreiecks in $M$ und $\gamma$ den Winkel bei $C$. Weiters seien $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ die Eckpunkte eines Vergleichsdreiecks in $\mathbb{M}^n_\kappa$ und $\bar{\gamma}$ der Winkel bei $\bar{C}$. Aus Symmetriegründen genügt es $\bar{\gamma} \leq \gamma$ zu zeigen. Wir fassen $(A, C, B)$ als Gelenk auf und wählen ein Vergleichsgelenk $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B})$ in $\mathbb{M}^n_\kappa$. Nach Satz III.8.11 gilt $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B) \leq d(\tilde{A}, \tilde{B})$. Aus (III.95) folgt daher $\bar{\gamma} \leq \tilde{\gamma} = \gamma$. □

## III.9. Aufgaben zu Kapitel III.

**45. Aufgabe.** Es sei $\nabla$ eine torsionsfreie Konnexion auf $TM$. Zeige

$$(d\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\nabla^{\Lambda^k T^*M}_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_k)$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, wobei $\nabla^{\Lambda^k T^*M}$ die induzierte Konnexion auf $\Lambda^k T^*M$ bezeichnet. Daher ist $d\alpha \in \Omega^k(M)$ gerade die Schiefsymmetrisierung von $\nabla\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$.

**46. Aufgabe.** Ist $e_1, \dots, e_n$ ein lokaler Rahmen, und bezeichnet $e^1, \dots, e^n$ den dualen Korahmen, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, dann gilt für jedes $\alpha \in \Omega^k(M)$,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha.$$

**47. Aufgabe.** Verifiziere, dass die rechte Seite von (III.9) unabhängig von der Basis $X, Y$ von $\xi \subseteq T_x M$ ist.

**48. Aufgabe.** Verifiziere (III.13).

**49. Aufgabe.** Zeige, dass auf $S^2$ keine Riemannsche Metrik mit $K \leq 0$ existiert. Zeige weiters, dass auf $T^2 = S^1 \times S^1$ keine Riemannsche Metrik mit $K < 0$ und auch keine mit $K > 0$ existiert. *Hinweis:* Verwende die Formel von Gauß–Bonnet, siehe (III.10).

**50. Aufgabe.** Verifiziere (III.12). *Hinweis: Verwende*

$$(L_X g)(Y, Z) = (X \cdot g)(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]),$$

$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *sowie* $X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

**51. Aufgabe.** Zeige, dass der Laplace-Beltrami Operator auf $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ mit dem Laplace aus Proposition III.1.13(c) übereinstimmt. Leite auch folgende Koordinatendarstellung her,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial u^j}\big(\sqrt{g} g^{ij} \tfrac{\partial f}{\partial u^i}\big) = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} + \text{Terme 1. Ordnung in } f,$$

wobei $\sqrt{g} := \det(g_{ij})$, siehe Bemerkung III.1.16 und auch [**7**, Section 2.1].

**52. Aufgabe.** Zeige, dass die Definition der Länge stückweiser glatter Kurven unabhängig von der verwendeten Unterteilung ist, siehe (III.40). Zeige, dass die Länge stückweise glatter Kurven invariant unter Reparametrisierung mit stückweise glatten Homöomorphismen ist. Zeige auch, dass zu jeder stückweise glatten Kurve $c : I \to M$ ein glatter Homöomorphismus $\phi : I \to I$ existiert, sodass $c \circ \phi : I \to M$ glatt ist. *Hinweis:* Für die letzte Behauptung reparametrisiere mit glatten Homöomorphismen $\phi : [t_{i-1}, t_i] \to [t_{i-1}, t_i]$, die platt an den Randpunkten sind, dh. $\phi^{(k)}(t_{i-1}) = 0 = \phi^{(k)}(t_i)$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

**53. Aufgabe.** Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Manigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Es bezeichne $h$ die von $g$ auf $U$ induzierte Riemannsche Metrik. Zeige, dass die von $h$ indzuierte Metrik $d_h$ auf $U$ i.A. nicht mit der Einschränkung der von $g$ auf $M$ induzierten Metrik $d_g$ übereinstimmt. *Hinweis.* Betrachte $M = \mathbb{R}^2$ mit der standard Riemannmetrik $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine geeignete nicht konvexe Teilmenge.

**54. Aufgabe.** Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine glatte Funktion $f : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass die Riemannmetrik $fg$ vollständig ist.

**55. Aufgabe.** Es sei $M$ eine zusmmenhängende Mannigfaltigkeit. Zeige, dass je zwei Punkt durch eine (stückweise) glatte Kurve verbunden werden können. *Hinweis:* Für fixes $x \in M$ betrachte die Menge der Punkte, die mit $x$ durch eine stückweise glatte Kurve verbunden werden können. Zeige, dass diese Menge offen und abgeschlossen ist.

**56. Aufgabe.** Gib einen Beweis vom Satz in [**3**, Abschnitt 2.11] analog zum Beweis von Satz III.3.14. Details finden sich etwa in [**10**, Section 3.7] oder [**2**, §8].

**57. Aufgabe.** Es sei $\pi : E \to M$ ein Euklidisches Vektorbündel und $U$ eine Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq E$. Zeige, dass eine glatte Funktion $\varepsilon : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass $\{\xi \in E : |\xi| < \varepsilon(\pi(\xi))\} \subseteq U$. *Hinweis.* Zeige dies zunächst lokal in $M$ und verwende dann eine Partition der Eins um die globale Aussage zu erhalten.

**58. Aufgabe.** Es sei $(M, g)$ eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda : M \to (0, \infty)$ glatt. Für die Volumsform der Riemannmetrik $\lambda g$ zeige $\mathrm{vol}_{\lambda g} = \lambda^{n/2}\,\mathrm{vol}_g$.

**59. Aufgabe.** Nicht vollständige Riemannfläche in $\mathbb{R}^3$ mit $K = -1$.

**60. Aufgabe.** Jedes orientierbare Vektorbündel über $S^1$ ist trivialisierbar.

**61. Aufgabe.** Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zeige:

(a) $X$ ist genau dann lokal wegzusammenhängend, wenn $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend ist.
(b) $X$ ist genau dann semi lokal einfach zusammenhängend, wenn $\tilde{X}$ semi lokal einfach zusammenhängend ist.

Zeige auch, dass ein lokal wegzusammenhängender Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn er wegzusammenhängend ist.

**62. Aufgabe.** Es sei $X$ ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum. Weiters seinen $p : Y \to X$ und $q : Z \to Y$ zwei zusammenhängende Überlagerungen. Zeige, dass auch $p \circ q : Z \to X$ eine Überlagerung ist. *Hinweis:* Nach Wahl von Basispunkten, ist offensichtlich, welche charakteristische Untergruppe die Überlagerung $p \circ q$ haben müsste. Andererseits existiert zu dieser Untergruppe eine Überlagerug $\pi : \tilde{X} \to X$. Zeige nun, dass ein Homöomorphismus $Z \cong \tilde{X}$ existiert, der $\pi$ mit $p \circ q$ identifiziert und schließe daraus, dass auch $p \circ q$ eine Überlagerung sein muss, vgl. den Beweis von Korollar III.4.30.

## Literatur


[1] R. Bott und L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics **82**. Springer-Verlag, 1982.

[2] T. Bröcker und K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie.* Springer-Verlag, 1990.

[3] A. Čap, *Differentialgeometrie I.* Vorlesungsskriptum, Universität Wien, 2004. Frei erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/diffgeom.pdf`

[4] M. W. Hirsch, *Differential Topology.* Graduate Texts in Mathematics **33**. Springer-Verlag, 1976.

[5] K. Jänich, *Topologie.* Springer-Verlag, 1990.

[6] K. Jänich, *Vektoranalysis.* Springer-Verlag, 1992.

[7] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis.* Universitext, Springer-Verlag, 1995.

[8] W. Klingenberg, *Riemannian geometry.* Studies in Mathematics **1**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[9] A. Kriegl, *Differentialgeometrie.* Vorlesungsskriptum, Universität Wien, 2009. Frei erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2009SS.pdf`

[10] P. W. Michor, *Topics in differential geometry.* Graduate Studies in Mathematics **93**. American Mathematical Society, 2008.

[11] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer Verlag, 2004.

[12] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series **38**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[13] J. Milnor, *Morse Theory.* Annals of Mathematical Studies **51**, Princeton University Press.

[14] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Frei erhältlich unter `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[15] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[16] H. Schubert, *Topologie. Eine Einführung.* Vierte Auflage. Mathematische Leitfäden. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[17] E.H. Spanier, *Algebraic Topology.* Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.

[18] R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie. Eine Einführung.* Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[19] P. Petersen, *Riemannian Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **171**, Springer Verlag, 2006.

[20] I. Chavel, *Riemannian Geometry. A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2006.

[21] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian Geometry.* Springer Verlag, 2002.

[22] W. Meyer, *Toponogov's theorem and applications,* lecture notes available at `http://www.math.uni-muenster.de/u/meyer/publications/toponogov.html`.