Übungsbeispiele zu Komplexe Analysis I

Zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 1. Sei $z := 3 - 4\mathbf{i}$. Berechne $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$, z^2 sowie z^{-3}.

Aufgabe 2. Seien $z_1 := 3 + 4\mathbf{i}$, $z_2 := -1 - 2\mathbf{i}$. Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ sowie $\frac{z_2}{z_1}$.

Aufgabe 3. Verifiziere den binomischen Lehrsatz für komplexe Zahlen:

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}, \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ betrachte

$$\zeta := \sqrt{(|z| + \operatorname{Re} z)/2} + \mathbf{i}\tfrac{\operatorname{Im} z}{|\operatorname{Im} z|}\sqrt{(|z| - \operatorname{Re} z)/2}.$$

Zeige $\zeta^2 = z$. Bestimme damit die beiden Quadratwurzeln der folgenden komplexen Zahlen: $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$, $-5 + 12\mathbf{i}$.

Aufgabe 5. Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ betrachte die komplexe Zahl

$$z_{r,\theta} := r\big(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta\big).$$

Unter Zuhilfenahme der Analysis 1 Vorlesung, zeige:

a) $r = |z_{r,\theta}|$.
b) $\cos\theta = \frac{\langle z_{r,\theta}, 1\rangle}{|z_{r,\theta}||1|}$ und $\sin\theta = \frac{\langle z_{r,\theta}, \mathbf{i}\rangle}{|z_{r,\theta}||\mathbf{i}|}$.
c) $z_{r_1,\theta_1} = z_{r_2,\theta_2}$ genau dann, wenn $r_1 = r_2$ und $\theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.
d) Jede nicht verschwindende komplexe Zahl ist von der Form $z_{r,\theta}$.
e) $z_{r_1,\theta_1} \cdot z_{r_2,\theta_2} = z_{r_1 r_2, \theta_1+\theta_2}$.
f) Jede nicht verschwindende komplexe Zahl hat genau n n-te Wurzeln.

Aufgabe 6. Verifiziere folgende Variante der Dreiecksungleichung:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 7. Eine reell lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt komplex antilinear falls gilt $\psi(\lambda z) = \bar{\lambda}\psi(z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeige $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex antilinear genau dann, wenn $z \mapsto \psi(\bar{z})$ komplex linear ist. Schließe daraus und aus der entsprechenden Charakterisierung komplex linearer Abbildungen, dass eine injektive reell lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann komplex antilinear ist, wenn sie winkeltreu und orientierungsumkehrend ist.

b) Charakterisiere die reellen 2×2-Matrizen die, bezüglich der Standardbasis $(1, \mathbf{i})$ von $\mathbb{C}$, komplex antilineare Abbildungen repräsentieren.

Diese und weitere Beispiele finden sich auf `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/KA.html`.

c) Zeige weiters, dass sich jede reell lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eindeutig als Summe einer komplex linearen und einer komplex antilinearen Abbildung schreiben lässt.

Aufgabe 8. Es sei a_n eine Folge komplexer Zahlen, und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Die Folge a_n konvergiere gegen z_1 und gegen z_2. Zeige, dass dann $z_1 = z_2$ gilt, d.h. der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 9. Es sei z_n eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, dass z_n genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$ beide konvergieren. Zeige weiters, dass in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathbf{i} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Formuliere und begründe das analoge Resultat für (absolut) konvergente Reihen.

Aufgabe 10. Es seien z_n und w_n zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen, und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann auch die Folgen $\bar{z}_n$, $|z_n|$, λz_n, $z_n + w_n$, $z_n w_n$ konvergieren, und die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n &= \overline{\lim_{n\to\infty} z_n} \\
\lim_{n\to\infty} |z_n| &= \big|\lim_{n\to\infty} z_n\big| \\
\lim_{n\to\infty} \lambda z_n &= \lambda \lim_{n\to\infty} z_n \\
\lim_{n\to\infty} z_n + w_n &= \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n \\
\lim_{n\to\infty} z_n w_n &= \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n
\end{aligned}$$

Sind alle $w_n \neq 0$, und gilt $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, dann konvergiert auch $\frac{z_n}{w_n}$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$$

Formuliere und begründe analoge Eigenschaften (absolut) konvergenter Reihen.

Aufgabe 11. Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen sind, und bestimme jeweils den Abschluss:

$$\begin{aligned}
B_r(c) &:= \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z - c| < r\big\} \quad \text{wobei } c \in \mathbb{C} \text{ und } r > 0. \\
\mathbb{H} &:= \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| \operatorname{Im} z > 0\big\} \\
\mathbb{C}^- &:= \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\
\mathbb{C}^\times &:= \mathbb{C} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ bestimme

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \qquad \text{und} \qquad \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0}$$

wobei im zweiten Fall $z_0 \neq 0$ vorausgesetzt sei.

Aufgabe 13. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass jede wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Zeige, dass für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ auch die Umkehrung gilt: eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 14. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ zwei (lokal) gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen. Seien weiters $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ und $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ (lokal) beschränkt. Zeige, dass dann $f_n g_n : X \to \mathbb{C}$ (lokal) gleichmäßig gegen fg konvergiert. Formuliere und begründe ein analoges Kriterium für (lokal) gleichmäßige Konvergenz von $\frac{f_n}{g_n}$.

Aufgabe 15. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ normal (und daher lokal gleichmäßig) konvergiert. Zeige nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

Zeige weiters, dass $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $B_1(0)$ nicht gleichmäßig konvergiert.