Übungsbeispiele zu Komplexe Analysis I

Zusammengestellt von Stefan Haller

Aufgabe 16. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. Zeige:
a) $\bar{X}$ ist abgeschlossen.
b) $X \subseteq \bar{X}$.
c) X ist abgeschlossen genau dann, wenn $X = \bar{X}$.
d) $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.
e) $\bar{X}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ die X umfasst.
f) Ist $z \in \bar{X}$, dann existiert eine Folge a_n in X mit $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.
g) $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$.
h) $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$.
i) Ist $X \subseteq Y$ dann auch $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$.

Aufgabe 17. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$ und $\partial X = \bar{X} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus X}$ der Rand von X. Zeige

$$\mathbb{C} = \mathring{X} \cup \partial X \cup (\mathbb{C} \setminus \bar{X}), \quad \mathring{X} \cap \partial X = \mathring{X} \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \partial X \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{X}) = \emptyset.$$

Zeige weiters, dass für offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ stets $\partial U = \bar{U} \setminus U$ gilt. Bestimme den Rand der Mengen in Aufgabe 11.

Aufgabe 18 (Möbiustransformationen). Für

$$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

definiere

$$f_A : \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{-d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}, \quad f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Rechtfertige Definitionsgebiet und Wertebereich von f_A, und zeige, dass f_A stetig ist. Diskutiere auch den Fall $c = 0$.

b) Für $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ zeige $f_{\lambda A} = f_A$.

c) Für $A, B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ zeige $f_{AB} = f_A \circ f_B$ woimmer beide Seiten definiert sind. Hier bezeichnet AB das übliche Matrizenprodukt. Schließe daraus, dass f_A bijektiv mit Umkehrfunktion $f_{A^{-1}}$ ist.

d) Zeige, dass

$$g : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \quad f(z) := \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$$

bijektiv ist, und die Umkehrabbildung durch

$$h : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, \quad h(z) := \mathbf{i}\frac{1+z}{1-z}$$

Diese und weitere Beispiele finden sich auf `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/KA.html`.

gegeben ist. Hier bezeichnet $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene, und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe.

Aufgabe 19. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : X \to \mathbb{C}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige

$$\|f\|_X = 0 \Leftrightarrow f = 0$$
$$\|\lambda f\|_X = |\lambda| \cdot \|f\|_X$$
$$\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$$
$$\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$$

Diskutiere auch die Fälle $\|f\|_X = \infty$ und/oder $\|g\|_X = \infty$.

Aufgabe 20 (Euler). Zeige, dass die Polynomfolge

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) := \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n$$

lokal gleichmäßig gegen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert. Insbesondere gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \exp(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Anleitung: a) Zeige

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \cdot \frac{z^k}{k!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

b) Für jedes $0 \leq a \leq 1$ und $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$|1 - a^k| = (1 - a)\big(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}\big) \leq (1 - a)k.$$

Schließe daraus

$$\Big|1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\Big| \leq \frac{k(k-1)}{n} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ n \geq k.$$

c) Verwende dies um die folgende Abschätzung zu etablieren

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

d) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ auf $\mathbb{C}$ normal konvergiert. Argumentiere warum daher f_n lokal gleichmäßig gegen exp konvergiert.