Übungsbeispiele zu Komplexe Analysis I

Zusammengestellt von Stefan Haller[1]

Aufgabe 21. Warum sind folgende Funktionen holomorph? Berechne ihre Ableitung!

$$p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p_1(z) := (1+2\mathbf{i}) + 3z + 4\mathbf{i}z^2 + (5+6\mathbf{i})z^{17}$$

$$p_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p_2(z) := (4+\mathbf{i})\big(3\mathbf{i}z - (5-6\mathbf{i})\big)^{42}$$

$$p_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p_3(z) := \Big((-3\mathbf{i}z)^7 - (5z^2 - 17\mathbf{i})\big((6+2\mathbf{i})z - 4\mathbf{i}z^2\big)\Big)^{127}$$

$$R : \mathbb{C} \setminus \{2+3\mathbf{i}, 5\mathbf{i}\} \to \mathbb{C}, \quad R(z) := \frac{1 + 2z + 3\mathbf{i}z^2 + 4z^3}{\big(z - (2+3\mathbf{i})\big)\big(z - 5\mathbf{i}\big)}$$

Aufgabe 22. Warum ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x+\mathbf{i}y) := \big(1 + 2x - 3y + 5x^2 - 5y^2\big) + \big(3x + 2y + 10xy\big)\mathbf{i}$$

holomorph? Berechne ihre Ableitung.

Aufgabe 23. Leite die Produktregel für holomorphe Funktionen aus den Rechenregeln für reell differenzierbare Funktionen und Satz 2.2.1 her.

Aufgabe 24. Es bezeichne $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ den Hauptzweig des Logarithmus, siehe Beispiel 2.2.7. Zeige $\lim_{z\to 0} |\log(z)| = \infty$. Seien weiters a_n und b_n zwei Folgen mit $\operatorname{Im} a_n > 0$, $\operatorname{Im} b_n < 0$, die beide gegen $z_0 \in (-\infty, 0)$ konvergieren. Zeige

$$\lim_{n\to\infty} \log(a_n) = \log|z_0| + \mathbf{i}\pi \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \log(b_n) = \log|z_0| - \mathbf{i}\pi.$$

Schließe daraus, dass $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ nicht stetig auf $\mathbb{C}^\times$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 25. Zeige mit Hilfe von Proposition 2.4.2

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}^- \text{ mit } \big|\arg(z) + \arg(w)\big| < \pi.$$

Berechne $\log(\mathbf{i})$, $\log\big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)$, sowie $\log\big(\mathbf{i} \cdot \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)$ und beobachte

$$\log\Big(\mathbf{i} \cdot \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big) \neq \log(\mathbf{i}) + \log\Big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big).$$

Zeige weiters

$$\log(zw) - \big(\log(z) + \log(w)\big) \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}^- \text{ mit } zw \in \mathbb{C}^-.$$

Aufgabe 26. Sei $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in \mathbb{C}$, $a > 0$, $b > 0$,

$$R := \big\{x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \;\big|\; |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\big\}$$

und $u : R \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h. u ist C^2 und es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Definiere

$$v : R \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) := \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s, y_0)ds.$$

Zeige, dass $f := u + \mathbf{i}v : U \to \mathbb{C}$ holomorph und C^2 ist.

[1]Diese und weitere Beispiele finden sich auf `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/KA.html`

Aufgabe 27. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $f' = f$ sowie $f(0) = 1$. Zeige $f(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 28. Beweise Proposition 2.4.6.

Aufgabe 29 (Hyperbolische Sinus- und Cosinusfunktion). Die hyerbolischen Winkelfunktionen werden wie folgt definiert.

$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Zeige

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

und

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

sowie

$$\sinh(z) = -\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z), \quad \cosh(z) = \cos(\mathbf{i}z).$$

Schließe daraus, dass $\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$ die Nullstellenmenge von sinh ist, $\mathbf{i}\pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ die Nullstellenmenge von cosh ist, $\mathrm{Per}(\sinh) = \mathrm{Per}(\cosh) = 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$ gilt, und die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$$
$$\cosh(z + w) = \sinh(z)\sinh(w) + \cosh(z)\cosh(w)$$

Zeige weiters

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

und bestimme den Konvergenzradius dieser Potenzreihen.

Aufgabe 30 (Arcustangens). Es bezeichne $U := \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}t \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$. Zeige, dass die Abbildungen

$$U \to \mathbb{C}^-, \quad z \mapsto \frac{1 + \mathbf{i}z}{1 - \mathbf{i}z} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{C}^- \to U, \quad w \mapsto \frac{w - 1}{\mathbf{i}(w + 1)}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind, vgl. Aufgabe 18. Schließe daraus, dass die Abbildungen

$$\arctan : U \to \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |\mathrm{Re}\, z| < \pi/2\bigr\}, \quad \arctan(z) := \frac{1}{2\mathbf{i}} \log \frac{1 + \mathbf{i}z}{1 - \mathbf{i}z}$$

und

$$\tan : \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |\mathrm{Re}\, z| < \pi/2\bigr\} \to U, \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2\mathbf{i}z} - 1}{\mathbf{i}(e^{2\mathbf{i}z} + 1)}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind, siehe Proposition 2.4.2. Zeige weiters

$$\arctan'(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad \text{für alle } z \in U.$$

Zeige auch, dass arctan nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ ausgedehnt werden kann.

Aufgabe 31 (Potenzreihe des Arcustangens). Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Konvergenzradius 1 hat. Berechne die Ableitung der durch diese Potenzreihe gegebenen holomorphen Funktion $B_1(0) \to \mathbb{C}$ und schließe daraus, vgl. Aufgabe 30,

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für alle } z \in B_1(0).$$

Aufgabe 32 (Komplexe Potenzen). Es sei $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Für $z \in \mathbb{C}^-$ und $s \in \mathbb{C}$ definiere

$$z^s := \exp(s \log(z)).$$

Zeige

$$z^{s_1+s_2} = z^{s_1} \cdot z^{s_2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^- \text{ und alle } s_1, s_2 \in \mathbb{C},$$

sowie

$$z^s \in \mathbb{C}^\times, \quad z^0 = 1, \quad z^1 = z, \quad z^{-s} = \frac{1}{z^s}, \quad 1^s = 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

Schließe daraus, dass für $n \in \mathbb{Z}$ diese Definition mit der üblichen übereinstimmt, d.h. $z^n = z \cdots z$, und $z^{-n} = \frac{1}{z \cdots z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beachte, dass auch $e^s = \exp(s)$. Zeige weiters, vgl. Aufgabe 25,

$$(z_1 \cdot z_2)^s = z_1^s \cdot z_2^s \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ und } z_1, z_2 \in \mathbb{C}^- \text{ mit } \big|\arg(z_1) + \arg(z_2)\big| < \pi$$

und

$$\log(z^s) = s \log(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \big|\operatorname{Im}(s \log(z))\big| < \pi.$$

sowie

$$(z^{s_1})^{s_2} = z^{s_1 \cdot s_2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } s_1, s_2 \in \mathbb{C} \text{ mit } \big|\operatorname{Im}(s_1 \log(z))\big| < \pi.$$

Betrachte schließlich die holomorphen Funktionen

$$p_s : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}^\times, \quad p_s(z) := z^s \quad \text{für } s \in \mathbb{C}$$
$$q_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times, \quad q_z(s) := z^s \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^-.$$

Zeige $(p_s)'(z) = s p_{s-1}(z)$ und $(q_z)'(s) = \log(z) q_s(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$ und alle $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 33. Zeige

$$z^{\mathbf{i}} = e^{-\arg(z)} \in \big(e^{-\pi}, e^{\pi}\big) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^- \text{ mit } |z| = 1.$$

Berechne $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$, $\big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)^{\mathbf{i}}$, sowie $\big(\mathbf{i} \cdot \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\big)^{\mathbf{i}}$ und beobachte

$$\Big(\mathbf{i} \cdot \frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathbf{i}} \neq \mathbf{i}^{\mathbf{i}} \cdot \Big(\frac{-1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathbf{i}}$$
$$\log\big(e^{2\pi\mathbf{i}}\big) \neq (2\pi\mathbf{i}) \cdot \log(e)$$
$$\big(e^{2\pi\mathbf{i}}\big)^{\mathbf{i}} \neq e^{2\pi\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}}$$

Aufgabe 34 (Formel von Newton und Abel). Für $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere Binomialkoeffizienten

$$\binom{s}{0} := 1, \quad \binom{s}{n} := \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zeige

$$\binom{s}{n} + \binom{s}{n+1} = \binom{s+1}{n+1} \quad \text{und} \quad \binom{s+1}{n+1} = \frac{s+1}{n+1}\binom{s}{n} \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n}(z-1)^n$ Konvergenzradius 1 hat. Was passiert für $s \in \mathbb{N}$? Schließe daraus, dass für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_s : B_1(1) \to \mathbb{C}, \quad f_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n}(z-1)^n$$

holomorph ist. Zeige

$$f_s(z) = z f_{s-1}(z) \quad \text{sowie} \quad (f_s)'(z) = s f_{s-1}(z) \quad \text{für } z \in B_1(1) \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

Zeige, dass die Ableitung der holomorphen Funktion $z \mapsto \frac{f_s(z)}{p_s(z)}$ verschwindet, wobei p_s die Funktion aus Aufgabe 32 bezeichnet. Schließe daraus

$$z^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n}(z-1)^n \quad \text{für } z \in B_1(1) \text{ und } s \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 35. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen. Es bezeichne r das Minumum der beiden Konvergenzradien. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ mindestens Konvergenzradius r hat, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n\Big) \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Hinweis: Proposition 1.11.6(ix).

Aufgabe 36 (Der Arcussinus). Es sei $V := \mathbb{C} \setminus \{t \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$. Weiters bezeichne $\mathbb{C}^- \to \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $z \mapsto \sqrt{z} := \exp(\log(z)/2)$ den Hauptzweig der Quadratwurzel. Zeige, dass die Abbildungen

$$\big\{u \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Re} u > 0\big\} \to V, \quad u \mapsto \frac{u - u^{-1}}{2\mathbf{i}}$$

und

$$V \to \big\{u \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Re} u > 0\big\}, \quad w \mapsto \mathbf{i}w + \sqrt{(\mathbf{i}w)^2 + 1}$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind. Verwende dies um zu zeigen, dass die Abbildungen

$$\sin : \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\} \to V, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}$$

und

$$\arcsin : V \to \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\operatorname{Re} z| < \pi/2\big\}, \quad \arcsin(z) := \frac{1}{\mathbf{i}} \log\Big((\mathbf{i}z) + \sqrt{(\mathbf{i}z)^2 + 1}\Big)$$

wohldefiniert, holomorph und invers zueinander sind. Zeige weiters

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \text{für alle } z \in V.$$

Zeige auch, dass arcsin nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ ausgedehnt werden kann. Bestimme auch $\lim_{z \to \pm 1} \arcsin(z)$.

Aufgabe 37 (Potenzreihe des Arcussinus). Folgere aus Aufgabe 34

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} z^{2n} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Schließe daraus

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$