# Übungsbeispiele zu Komplexe Analysis I

Zusammengestellt von Stefan Haller[1]

Aufgabe 38. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(a) = 1$, $\gamma(b) = \mathbf{i}$. Bestimme

$$\int_\gamma 4z^3 + 3\mathbf{i}z^2 - 4z + 5\mathbf{i}dz.$$

Aufgabe 39. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = -2\mathbf{i}$. Bestimme

$$\int_\gamma ze^{z^2} dz.$$

Aufgabe 40. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ein geschlossener Weg. Bestimme

$$\int_\gamma 1 + \tan^2(z + \pi/2)dz.$$

Aufgabe 41. a) Zeige, dass die beiden Wege

$$\gamma_0 : [0, \pi] \to \mathbb{C}^\times \qquad \gamma_0(t) := e^{\mathbf{i}t}$$
$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}^\times \qquad \gamma_1(t) := e^{-\mathbf{i}t}$$

in $\mathbb{C}^\times$ nicht homotop relativ Endpunkte sind. Hinweis: Betrachte die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z}$ und $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$.

b) Fassen wir nun $\gamma_0$ und $\gamma_1$ als Wege in $\mathbb{C}$ auf. Zeige, dass sie dann in $\mathbb{C}$ sehr wohl homotop relativ Endpunkte sind. Warum funktioniert jetzt das Argument mit den Kurvenintegralen, siehe a), nicht mehr?

Aufgabe 42. Wir erinnern uns an das Wegintegral der reellen Analysis. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $p, q : X \to \mathbb{R}$ stetig, und $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit Komponenten $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Dann heißt

$$\int_\gamma pdx + qdy := \int_a^b p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt$$

das Wegintegral von $pdx + qdy$ längs $\gamma$. Mittels der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z \leftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, ist $X \subseteq \mathbb{C}$, und $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ ein Weg. Sei $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, d.h. $f = u + \mathbf{i}v$. Zeige

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma udx - vdy + \mathbf{i} \int_\gamma vdx + udy.$$

Anmerkung: Mit $f = u + \mathbf{i}v$ und $dz = dx + \mathbf{i}dy$ erhalten wir durch formales Ausmultiplizieren $f dz = (u + \mathbf{i}v)(dx + \mathbf{i}dy) = udx - vdy + \mathbf{i}(vdx + udy)$. Dies kann als Merkregel dienen, und mit dem Kalkül der Differentialformen präzisiert werden.

Aufgabe 43 (Satz von Green). Wir erinnern uns an einen Spezialfall des Satzes von Green aus der Analysisvorlesung. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen und $B_r(c)$ eine Kreisscheibe mit $\bar{B}_r(c) \subseteq U$. Seien $p, q : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Betrachte den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := c+re^{\mathbf{i}t}$, der einmal den Rand der Kreisscheibe

[1] Diese und weitere Beispiele finden sich auf `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/KA.html`

$B_r(c)$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft. Der Satz von Green besagt in dieser Situation

$$\int_{\bar{B}_r(c)} (q_x - p_y) dx dy = \int_\gamma p dx + q dy,$$

wobei $q_x = \frac{\partial q}{\partial x}$, $p_y = \frac{\partial p}{\partial y}$ die partiellen Ableitungen bezeichnen, und das Wegintegral auf der rechten Seite wie in Aufgabe 43 zu interpretieren ist.

Sei nun $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig.[21] Zeige, wie der Cauchysche Integralsatz für Kreisscheiben, siehe Korollar 3.6.13,

$$\int_{\partial B_r(c)} f dz = 0$$

aus dem Satz von Green abgeleitet werden kann.

Aufgabe 44. a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0, z_1 \in U$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Betrachte die Menge aller Wege $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$. Für zwei solche Wege $\gamma_0$ und $\gamma_1$ schreibe $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls eine Homotopie $H$ von Wegen relativ Endpunkten in $U$ existiert, mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$, vgl. Definition 3.6.1. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Betrachte die Menge aller geschlossenen Wege $\gamma : [a, b] \to U$. Für zwei solche Wege $\gamma_0$ und $\gamma_1$ schreibe $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls eine Homotopie $H$ geschlossener Wege in $U$ existiert, mit $H_0 = \gamma_0$ und $H_1 = \gamma_1$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 45. Es sei $G$ ein Sterngebiet. Zeige, dass $G$ zusammenhängend, also ein Gebiet ist. Zeige weiters, dass $G$ einfach zusammenhängend ist, vgl. Beispiel 3.6.4.

Aufgabe 46 (Holomorphe Wurzelfunktionen). Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $0 \notin G$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, eine holomorphe Funktion $f_k : G \to \mathbb{C}$ existiert, sodass $(f_k(z))^k = z$ für alle $z \in G$, vgl. Beispiel 3.7.5. Zeige auch, dass $f$ bis auf eine $k$-te Einheitswurzel eindeutig bestimmt ist, d.h. ist $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit der gleichen Eigenschaft, dann existiert $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^k = 1$, sodass $\tilde{f}(z) = \xi \cdot f(z)$ für alle $z \in G$ gilt. Zeige weiters, dass es keine lokal um $0 \in \mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion $g$ geben kann, die $(g(z))^k = z$ erfüllt, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

[21] Wie schon öfters erwähnt, werden wir bald sehen, dass jede holomorphe Funktion glatt ist. Also ist die Voraussetzung, dass $f'$ stetig sei, überflüssig.