Übungen zu "Einführung in die lineare Algebra und Geometrie"

Wintersemester 2011/12

Stefan Haller

1. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\psi\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix},$$

linear ist, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x).$$

2. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, d.h. es gelte $\psi(x+\tilde{x}) = \psi(x)+\psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$$

einen Teilraum bildet, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x+\tilde{x} \in L$ und $\lambda x \in L$. Zeige weiters, dass auch

$$W := \operatorname{img}(\psi) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = y\}$$

ein Teilraum ist, d.h. für alle $y, \tilde{y} \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $y+\tilde{y} \in W$ und $\lambda y \in W$.

3. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & y_1\\
2x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +3x_4 & = & y_2\\
3x_1 & +8x_2 & +14x_3 & +8x_4 & = & y_3\\
 & +3x_2 & +8x_3 & +14x_4 & = & y_4
\end{array}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}^4$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \psi\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 + 3x_3\\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4\\ 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 8x_4\\ +3x_2 + 8x_3 + 14x_4\end{pmatrix}?$$

4. Für welche $y \in \mathbb{R}^4$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -3x_2 & 2x_3 & = & y_1\\
4x_1 & -6x_2 & -4x_3 & = & y_2\\
6x_1 & -9x_2 & -6x_3 & = & y_3\\
-2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & y_4
\end{array}$$

wenigstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$. Gib ein Gleichungssystem mit möglichst wenigen Gleichungen für die Menge dieser y an.

5. Betrachte das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & & & +4x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +10x_4 & +13x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +16x_4 & +21x_5 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme eines Basis des Lösungsraums

$$L := \big\{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \text{ genügen allen vier Gleichungen oben}\big\},$$

d.h. bestimme Vektoren $b_1, \ldots, b_l \in L$, sodass sich jedes $x \in L$ in der Form

$$x = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l$$

schreiben lässt, für eindeutig bestimmte Skalare $s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* $l = 2$. Gib auch ein Gleichungssystem für L an, das nur aus drei Gleichungen besteht.

6. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h. es gelte $\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ betrachte

$$L_y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = y\}$$

und setze $L := L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$. Weiters sei $\xi_y \in L_y$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi_y\colon L \xrightarrow{\cong} L_y, \quad \phi_y(x) := \xi_y + x,$$

eine Bijektion ist und schließe daraus

$$L_y = \{\xi_y + x \mid \psi(x) = 0\} = \xi_y + L.$$

Was bedeutet dies für ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen?

7. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $\xi \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \phi(x) := \xi + \psi(x),$$

affin ist, d.h. es gilt

$$\phi\big(\lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}\big) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(\tilde{x}),$$

für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wann ist ϕ linear?

8. Bestimme alle komplexen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcr} z_1 & +\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & \mathbf{i}-1 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(-3+\mathbf{i})z_2 & +2\mathbf{i}z_3 & = & -5 \end{array}$$

d.h. bestimme alle $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ die den beiden Gleichungen genügen.

9. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} \mathbf{i}z_1 & +2\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & w_1 \\ (1+\mathbf{i})z_1 & +(2+\mathbf{i})z_2 & +(3+2\mathbf{i})z_3 & = & w_2 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(4+2\mathbf{i})z_2 & +(1+2\mathbf{i})z_3 & = & w_3 \end{array}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}^3$ eine eindeutige Lösung $z \in \mathbb{C}^3$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad \psi\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{i}z_1 + 2\mathbf{i}z_2 + (1+\mathbf{i})z_3 \\ (1+\mathbf{i})z_1 + (2+\mathbf{i})z_2 + (3+2\mathbf{i})z_3 \\ (2+\mathbf{i})z_1 + (4+2\mathbf{i})z_2 + (1+2\mathbf{i})z_3 \end{pmatrix}?$$

10. Bestimme alle rationalen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{5}{6}x_3 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

d.h. bestimme alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$, die dieses System lösen.

11. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{K}^n$ bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet, vgl. Beispiel II.1.3 aus der Vorlesung.

12. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Aus wievielen Elementen besteht der Vektorraum $\mathbb{K}^n$?

13. Sei X eine Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen $X \to V$ bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Vektorraumaxiome (V1) – (V3) und (V6) überprüft, siehe Beispiel II.1.6. Zeige nun analog, dass auch die restlichen Axiome gelten.*

14. Sei X eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die punktweise Multiplikation $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen $X \to \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften besitzt:
(a) $f(gh) = (fg)h$
(b) $fg = gf$
(c) $1f = f = f1$, wobei $1\colon X \to \mathbb{K}$ die konstante Einsfunktion bezeichnet.
(d) $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ und $f(\lambda g) = \lambda(fg)$
(e) $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g$ und $(\lambda f)g = \lambda(fg)$
für beliebige Funktionen $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h\colon X \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Menge aller Funktion $X \to \mathbb{K}$ bildet daher eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, vgl. Bemerkung II.1.7 aus der Vorlesung.

15. Zeige, dass $\mathbb{K}[z]$, d.h. die Menge der Polynome mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$, tatsächlich einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. Zeige weiters, dass die Multipikation von Polynomen folgende Eigenschaften besitzt:
(a) $p(qr) = (pq)r$

(b) $pq = qp$
(c) $1p = p = p1$, wobei $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \cdots$ das Einspolynom bezeichnet.
(d) $r(p+q) = rp + rq$ und $p(\lambda q) = \lambda(pq)$
(e) $(p+q)r = pr + qr$ und $(\lambda p)q = \lambda(pq)$

für beliebige Polynome $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $\mathbb{K}[z]$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Assoziativität bewiesen, vgl. Bemerkung II.1.9.*

16. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume von $\mathbb{R}^2$?

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ und } x - y = 0\right\}$$

17. Wieviele Elemente hat der Teilraum

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\},$$

über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ und wieviele im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$?

18. Zeige, dass die Menge der 1-periodischen Funktionen,

$$\left\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) = f(x)\right\},$$

einen Teilraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bildet.

19. Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V. Zeige, dass die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ genau dann einen Teilraum von V bildet, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

20. Sei W_i, $i \in I$, eine Familie von Teilräumen eines Vektorraums V, sodass für je zwei $i, j \in I$ stets $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$ gilt. Zeige, dass in dieser Situation $\bigcup_{i \in I} W_i$ einen Teilraum von V bildet.

21. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(v) = -v$$
$$\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \rho\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 2x \end{pmatrix} \qquad \kappa\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \kappa\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$$
$$\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \chi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x - y + z \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

22. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgender Bedingung genügt:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda\varphi(v_2)$$

23. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall v, w \in V : \varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

Hinweis: Zeige zunächst $\varphi(nv) = n\varphi(v)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$.

24. Sei V ein Vektorraum und $g\colon Y \to X$ eine Abbildung. Zeige, dass die Zuordnung $F(X, V) \to F(Y, V)$, $f \mapsto f \circ g$, eine lineare Abbildung ist. Schließe daraus, dass für jede Teilmenge $A \subseteq X$, die Abbildung $F(X, V) \to F(A, V)$, $f \mapsto f|_A$, linear ist. Folgere daraus auch, dass für jedes $x \in X$, die sogenannte Evaluationsabbildung, $\mathrm{ev}_x\colon F(X, V) \to V$, $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, linear ist.

25. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte die beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \psi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass φ und ψ beide lineare Isomorphismen sind, und bestimme ihre Umkehrabbildungen. Zeige auch $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, und schließe daraus, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^2)$ nicht abelsch ist.

26. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, 7x - y + 8z = 0 \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K}^2 \cong W$.

27. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 5y + z & = & 0 \end{array} \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K} \cong W$.

28. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{end}(V) \mid \varphi(W) \subseteq W\}$$

einen Teilraum von $\mathrm{end}(V)$ bildet, der auch abgeschlossen unter der Komposition linearer Abbildungen ist. Zeige auch, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(W) = W\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

29 (Fünferlemma). Freiwilliges Beispiel! Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\rho_1"', "\cong"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\rho_2"', "\cong"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\rho_3"] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\cong"', "\rho_4"] & V_5 \arrow[d, "\cong"', "\rho_5"] \\
W_1 \arrow[r, "\psi_1"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit exakten Zeilen. Genauer, sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(a) $V_1, \ldots, V_5$ und $W_1, \ldots, W_5$ sind $\mathbb{K}$-Vektorräume.
(b) $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, $\psi_1, \ldots, \psi_4$ und $\rho_1, \ldots, \rho_5$ sind lineare Abbildungen.
(c) Das Diagramm kommutiert, d.h. für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$\rho_{i+1} \circ \varphi_i = \psi_i \circ \rho_i.$$

(d) Die Zeilen sind exakt, d.h. für $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\operatorname{img}(\varphi_i) = \ker(\varphi_{i+1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{img}(\psi_i) = \ker(\psi_{i+1}).$$

Zeige nun: Sind ρ_1, ρ_2, ρ_4 und ρ_5 Isomorphismen, dann muss auch ρ_3 ein Isomorphismus sein.

Hinweis zur Surjektivität von ρ_3: Beginne etwa wie folgt: Sei $w_3 \in W_3$ beliebig. Da ρ_4 surjektiv ist, existiert $v_4 \in V_4$ mit $\rho_4(v_4) = \psi_3(w_3)$. Wegen der Kommutativität des rechten Quadrats, folgt $\rho_5(\varphi_4(v_4)) = \psi_4(\rho_4(v_4)) = \psi_4(\psi_3(w_3)) = 0$, denn aufgrund der Exaktheit bei W_4 gilt $\psi_4 \circ \psi_3 = 0$. Da ρ_5 injektiv ist, erhalten wir $\varphi_4(v_4) = 0$, also $v_4 \in \ker(\varphi_4)$. Wegen der Exaktheit bei V_4 existiert $v_3 \in V_3$ mit $\varphi_3(v_3) = v_4$. Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt $\psi_3(w_3 - \rho_3(v_3)) = 0$, d.h. $w_3 - \rho_3(v_3) \in \ker(\psi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei W_3 und die Surjektivität von ρ_2 um ein Element $\tilde{v}_3 \in V_3$ mit $\rho_3(\tilde{v}_3) = w_3$ zu konstruieren.

Hinweis zur Injektivität von ρ_3: Zeige, dass ρ_3 trivialen Kern hat. Sei dazu $v_3 \in V_3$ so, dass $\rho_3(v_3) = 0$. Da ρ_4 injektiv ist, lässt sich daraus $\varphi_3(v_3) = 0$ folgern, also $v_3 \in \ker(\varphi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei V_3 ... dann die Exaktheit bei W_2 ... die Surjektivität von ρ_1 ... und schließlich die Exaktheit bei V_2.

30. Sofern diese definiert sind, berechne die Produkte AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB und CC folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme auch $A^4 = AAAA$.

31. Zeige, dass die folgenden Matrizen über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ invertierbar sind und bestimme ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind über den Körpern $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$ invertierbar?

32. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *Diagonalmatrix* verstehen wir eine Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ falls $i \neq j$. Zeige, dass die Diagonalmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass für zwei Diagonalmatrizen D und D' stets $DD' = D'D$ gilt. Formuliere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Invertierbarkeit von Diagonalmatrizen. Wie sieht im invertierbaren Fall die Inverse aus?

33. Zeige, dass die folgenden beiden Matrizen (über jedem Körper) invertierbar sind und berechne ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *oberen Dreiecksmatrix* verstehen wir eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, die folgende Gestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$. Zeige, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige weiters, dass eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, verschieden von 0 sind und, dass in diesem Fall die Inverse Matrix wieder eine obere Dreiecksmatrix bildet. Was kann über die Diagonalelemente der Inversen ausgesagt werden?

35. Betrachte die Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i+1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Berechne $A^k = A \cdots A$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. *Hinweis: Vielleicht ist es hilfreich dies zunächst für kleine n, etwa $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ oder $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ durchzuführen.*

36. Unter der Spur einer quadratischen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir den Skalar $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, d.h. die Summe der Diagonaleinträge. Berechne

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Spur eine surjektive lineare Abbildung $\mathrm{tr}\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert. Zeige auch $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$ und $\mathrm{tr}(I_n) = n$, für je zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

37. Zeige, dass die Verknüpfung

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) \times M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B]$ und $[\lambda A, B] = \lambda[A, B]$.
(b) $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$ und $[A, \lambda B] = \lambda[A, B]$.
(c) $[A, B] = -[B, A]$ und $[A, A] = 0$.
(d) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $[A, B]^t = -[A^t, B^t]$
(f) $\mathrm{tr}\big([A, B]C\big) = \mathrm{tr}\big(A[B, C]\big)$

Dabei sind $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Der Ausdruck $[A, B] = AB - BA$ wird als *Kommutator* der Matrizen A und B bezeichnet. Zeige auch, dass der Kommutator zweier schiefsymmetrischer Matrizen wieder schiefsymmetrisch ist, d.h. aus $A^t = -A$ und $B^t = -B$ folgt stets $[A, B]^t = -[A, B]$.

38. Betrachte die reellen (2×2)-Matrizen,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$ und $[E, F] = H$, wobei $[A, B] = AB - BA$ den Kommutator bezeichnet, vgl. Aufgabe 37. Zeige auch $[[H, H], E] \neq [H, [H, E]]$ und schließe daraus, dass die Verknüpfung $(A, B) \mapsto [A, B]$ nicht assoziativ ist.

39. Seien $n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} A &\in M_{n_1 \times m_1}(\mathbb{K}), & B &\in M_{n_1 \times m_2}(\mathbb{K}), \\ C &\in M_{n_2 \times m_1}(\mathbb{K}), & D &\in M_{n_2 \times m_2}(\mathbb{K}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &\in M_{m_1 \times k_1}(\mathbb{K}), & F &\in M_{m_1 \times k_2}(\mathbb{K}), \\ G &\in M_{m_2 \times k_1}(\mathbb{K}), & H &\in M_{m_2 \times k_2}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Setze $n := n_1 + n_2$, $m := m_1 + m_2$, $k := k_1 + k_2$ und betrachte die Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{K}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbb{K}).$$

Zeige folgende Formel für das Matrizenprodukt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Berechne damit

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $I_r \in M_{r \times r}(\mathbb{K})$ die $(r \times r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

40. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $n := n_1 + n_2$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \,\middle|\, A \in M_{n_1 \times n_1}(\mathbb{K}),\, D \in M_{n_2 \times n_2}(\mathbb{K}),\, B \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{K}) \right\}$$

einen Teilraum von $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ bildet, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass diese Matrizen genau den linearen Abbildungen $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ entsprechen, für die $\psi(\mathbb{K}^{n_1}) \subseteq \mathbb{K}^{n_1}$ gilt, wobei wir $\mathbb{K}^{n_1}$ in offensichtlicher Weise als Teilraum von $\mathbb{K}^n$ auffassen. Zeige, auch dass eine Matrix dieser Form invertierbar ist, falls A und D beide invertierbar sind und, dass in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Schließe daraus, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \,\middle|\, A \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{K}),\, D \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{K}),\, B \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{K}) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bildet, vgl. Aufgabe 28. *Hinweis: Aufgabe 39.*

41. Zeige, dass die folgende Matrix über jedem Körper invertierbar ist und bestimme ihre Inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 40 und Beispiel II.4.8 aus der Vorlesung.

42. Ist $p \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom, d.h. $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ mit Koeffizienten $p_i \in \mathbb{K}$, und ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix, dann können wir A in p einsetzen und erhalten eine Matrix $p(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$p(A) := p_0 I_n + p_1 A + p_2 A^2 + p_3 A^3 + \cdots$$

Für beliebige $p, q \in \mathbb{K}[z]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zeige

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \quad (\lambda p)(A) = \lambda p(A) \quad \text{sowie} \quad (pq)(A) = p(A)q(A).$$

Was bedeutet dies für die Zuordnung $\mathbb{K}[z] \to F(M_{n\times n}(\mathbb{K}), M_{n\times n}(\mathbb{K}))$, die einem Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ die Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto p(A)$, zuordnet? Berechne auch $p(A)$, wobei $p = 2 - 3z + z^2$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

43. Für Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^3$ wird ihr Kreuzprodukt $x \times y \in \mathbb{K}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeige, dass das Kreuzprodukt folgenden Rechenregeln genügt:

(a) $x \times (y + \tilde{y}) = x \times y + x \times \tilde{y}$ und $x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$.
(b) $(x + \tilde{x}) \times y = x \times y + \tilde{x} \times y$ und $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$.
(c) $x \times y = -y \times x$ und $x \times x = 0$.
(d) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $(x \times y)^t z = x^t (y \times z)$.
(f) $(x \times y) \times z = (z^t x) y - (y^t z) x$. (Graßmann-Identität)
(g) $x^t (x \times y) = 0 = y^t (x \times y)$.

Dabei sind $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z \in \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

44. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^3 \to M_{3\times 3}(\mathbb{K}), \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

einen linearen Isomorphismus auf den Teilraum der schiefsymmetrischen Matrizen definiert. Für beliebige $x, y \in \mathbb{K}^3$ zeige weiters

$$\varphi(x \times y) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Dabei bezeichnet $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$ den Kommutator von Matrizen, vgl. Aufgabe 37.