45. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige $W + W' = \mathbb{K}^4$, wobei:

$$W := \left\{x \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\right\}$$
$$W' := \left\{x \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

46. Seien W, W_1, W_2 und W_3 vier Teilräume eines Vektorraums V. Zeige

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$
(b) $W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$
(c) $W + \{0\} = W$
(d) $W_1 + W_2 = W_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$

Warum bildet die Menge aller Teilräume mit dieser Verknüpfung + i.A. keine Gruppe? Gib einen Vektorraum V an, für den dies doch der Fall ist.

47. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte folgende Teilräume von $\mathbb{K}^5$,

$$W := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\} \quad \text{und} \quad W' := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\},$$

wobei $x_i \in \mathbb{K}$ die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{K}^5$ bezeichnen. Zeige

$$\mathbb{K}^5 = W \oplus W'.$$

Bestimme die Matrizen zur Projektion auf W längs W', zur Projektion auf W' längs W, zur Spiegelung an W längs W' und zur Spiegelung an W' längs W.

48. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varepsilon\colon V \to \mathbb{K}$ linear und $g \in V$, sodass $\varepsilon(g) \neq 0$. Zeige, dass V innere direkte Summe der Teilräume $E := \{v \in V : \varepsilon(v) = 0\}$ und $G := \{\lambda g : \lambda \in \mathbb{K}\}$ ist. Gib auch Formeln für die Projektion auf E längs G, die Projektion auf G längs E und die Spiegelung an E längs G an. *Hinweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.10 aus der Vorlesung.*

49. Zeige, dass die Menge der spurfreien Matrizen, d.h.

$$W := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \operatorname{tr}(A) = 0\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bildet. Zeige auch, dass die Vielfachen der Einheitsmatrix,

$$W' := \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{K}\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden. Unter der Annahme $n \neq 0 \in \mathbb{K}$ zeige weiters

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W',$$

und gib Formeln für die Projektion auf W längs W' sowie die Projektion auf W' längs W an.

50. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ in dem $2 \neq 0$ gilt. Weiters sei $\sigma\colon V \to V$ linear, sodass $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass V innere direkte Summe der beiden Teilräume $W_+ = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ und $W_- = \{v \in V : \sigma(v) = -v\}$ ist. Zeige auch, dass die Projektion auf W_+ längs W_- und die Projektion auf W_- längs W_+ durch $\pi_+ = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V + \sigma)$ bzw. $\pi_- = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - \sigma)$ gegeben sind. Inwiefern ist diese eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.12 aus der Vorlesung?

51. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y = 0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

52. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + z = 0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

53. Für einen Teilraum W eines Vektorraums V zeige dass $V/W = \{0\}$ genau dann gilt, wenn $V = W$.

54. Sei $W := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und bezeichne $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/W$ die kanonische Projektion. Zeige $\pi(u) = \pi(v)$ und $\pi(u) \neq \pi(w)$, wobei:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

55. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V und $\varphi\colon V \to V$ linear, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{\varphi}\colon V/W \to V/W$ gibt, sodass $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, wobei $\pi\colon V \to V/W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

56. Sind A und B zwei Teilmengen eines Vektorraums V, dann gilt für die lineare Hülle i.A. $\langle A \cap B \rangle \neq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$. Erläutere dies an einem Beispiel.

57. Welche der folgenden Teilmengen bilden Erzeugendensysteme der angegebenen Vektorräume?

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 17 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ x \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\mathbf{i} \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

58. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear abhängig sind und gib jeweils ein Element an, das sich als Linearkombination der restlichen schreiben lässt:

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ \mathbf{i} \\ 4-\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7+7\mathbf{i} \\ \mathbf{i}-1 \\ 5+3\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

59. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear unabhängig sind:

$$\left\{\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4 \qquad \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\0\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+7\mathbf{i}\\3-\mathbf{i}\\5\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{C}^3$$

60. Fasse $V=\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf und zeige, dass $\{1,\sqrt{2}\}\subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge bildet.

61. Welche der folgenden Teilmengen bilden Basen der angegebenen Vektorräume?

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\13\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\\mathbf{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{i}\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{C}^2 \qquad \left\{1,1+z,1+2z+z^2\right\}\subseteq\mathbb{R}[z]_{\leq 2}$$

62. Erweitere den Vektor $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

63. Zeige, dass jede endliche totalgeordnete Menge ein eindeutiges Maximum besitzt. *Hinweis: Induktion nach der Anzahl der Elemente.*

64. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass ein zu W komplementärer Teilraum M in V existiert, d.h. $W\oplus M=V$, wie folgt:

(a) Sei U ein Teilraum von V, $W\cap U=\{0\}$ und $v\in V\setminus(W+U)$. Zeige, dass $U':=\langle v\rangle+U$ ein Teilraum von V ist, für den $U'\supsetneq U$ und $W\cap U'=\{0\}$ gilt.

(b) Die Mengeninklusion $\subseteq$ definiert eine Halbordnung auf der Menge

$$X=\left\{U\;\middle|\;U \text{ ist Teilraum von } V \text{ und } W\cap U=\{0\}\right\}.$$

Zeige, dass jede Kette in X eine obere Schranke besitzt. *Hinweis: Für jede totalgeordnete Teilmenge $K\subseteq X$ ist $S:=\bigcup_{U\in K}U$ ein Teilraum von V für den $W\cap S=\{0\}$ gilt, vgl. Aufgabe 20.*

(c) Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $M\in X$. Zeige mit Hilfe von (a), dass $W\oplus M=V$ gilt.

65. Seien $U\xrightarrow{\varphi}V\xrightarrow{\psi}W$ linear und $U^*\xleftarrow{\varphi^t}V^*\xleftarrow{\psi^t}W^*$ die dazu dualen Abbildungen. Zeige

$$\operatorname{img}(\varphi)=\ker(\psi)\quad\Leftrightarrow\quad\operatorname{img}(\varphi^t)=\ker(\psi^t).$$

Hinweis: Verwende Satz III.4.10 aus der Vorlesung.

66. a) Sei $\pi\colon V\to V$ ein Projektor, d.h. $\pi\circ\pi=\pi$. Zeige, dass dann auch die duale Abbildung $\pi^t\colon V^*\to V^*$ ein Projektor ist, und beschreibe dessen Bild und Kern. b) Seien nun W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume von V, d.h. $V=W_1\oplus W_2$. Weiters bezeichne $\pi_1\colon V\to W_1$ die damit assoziierte Projektion auf W_1 längs W_2 und $\pi_2\colon V\to W_2$ die Projektion auf W_2 längs W_1. Nach Satz III.4.9 ist dann auch $V^*=W_1^\circ\oplus W_2^\circ$. Zeige, dass π_1^t mit der Projektion auf W_2° längs W_1° übereinstimmt, und analog für π_2^t.